Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben az létezik!

21. 1. $a_n = \frac{n^3}{n!}$ 2. $a_n = \frac{n^{10}}{\sqrt{n!}}$

3. $a_n = \frac{10^n}{n!}$ 4. $a_n = \frac{n!}{n^n}$

5. $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$! 6. $a_n = \sqrt[n]{n!}$

22. 1. $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n-1}$ 2. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$

3. $a_n = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{5n}$ 4. $a_n = \left(\frac{2n+8}{2n+5}\right)^{4n+8}$

5. $a_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ 6. $a_n = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{2^n}$

7. $a_n = \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n$ 8. $a_n = \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n$

23. 1. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 2. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

3. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ 4. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

24. 1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ 2. $a_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

3. $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)}$ 4. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$

5. $a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

6. a) $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ b) $a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

7. $a_n = \prod_{k=3}^{n} \left(1 - \frac{4}{k^2}\right)$

25. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából!

1. $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ 2. $a_n = \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$

3. $a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$ 4. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

5. $a_n = \frac{n!}{n^n}$ 6. $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots 2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

26. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából!

1. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(0,5)^k}{k^2}$ 2. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1,1)^{-k}}{\sqrt{k}}$

3. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-2k}{k+1}$ 4. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

5. $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k-1}}$

2.2 Rekurzív sorozatok

27. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat konvergencia szempontjából, és ha van határértékük, számítsuk ki azt!

1. $a_1 = 1, \quad a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{2}$ $(n \geq 2)$

2. $a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{3^{n-1}}$ $(n \geq 2)$

3. $a_1 = 6, \quad a_n = 5 - \frac{6}{a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$

4. $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$ $(n \geq 2)$

5. $a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$ $(n \geq 2)$

6. $a_1 = -2, \quad a_n = (-1)^n a_{n-1} - 8$ $(n \geq 2)$