A2 jegyzet építőmérnök mérnök hallgatóknak
Többváltozós deriválás

Simon Károly

2007.04.14

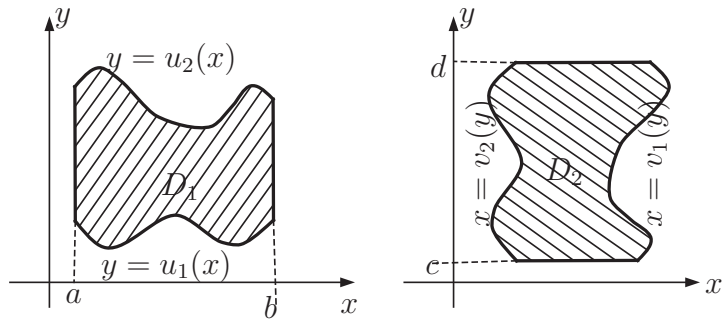
0.1. Többváltozós valósértékű függvények integrálása

0.1.1. Normáltartományok

Normáltartományok síkban A normáltartományok pontosan azok a tartományok, amelyeken könnyű integrálni. Mivel a síkban az x és y tengelyek szerepe azonos, ezért két fajta normál tartományt különböztetünk meg:

$$D_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} a & \leq & x & \leq & b \\ u_1(x) & \leq & y & \leq & u_2(x) \end{array} \right. ; D_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} c & \leq & y & \leq & d \\ v_1(y) & \leq & x & \leq & v_2(y) \end{array} \right.$$

Vagyis:
$D_1 = \{(x, y) \,|a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$
$D_2 = \{(x, y) \,|c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$



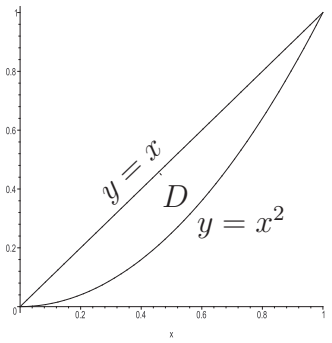
1. ábra. $D_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$ továbbá $D_2 = \{(x, y) : c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$.

A D_1 esetében az x-szel futunk az "a"-tól a "b"-ig, és egy ilyen x felett akkor vagyunk a D_1-ben, amikor $u_1(x) \leq y \leq u_2(x)$.

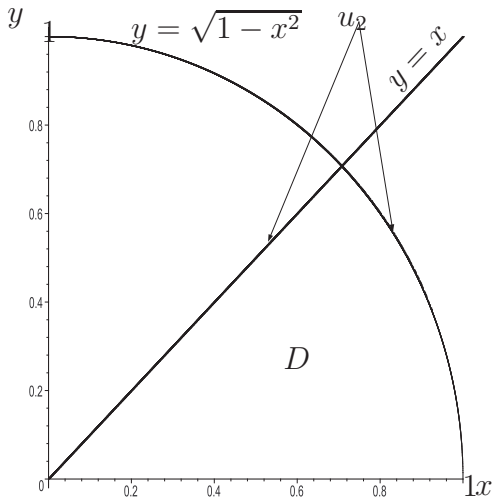
1. PÉLDA: (a) $u_1(x) = x^2$; $u_2(x) = x$ és $0 \leq x \leq 1$ (L. 2. ábra)

(b) $u_1(x) = 0$; $u_2(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x, & \text{ha} & 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1 - x^2}, & \text{ha} & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \end{array} \right.$ és $0 \leq x \leq 1$

(L. 3. ábra)



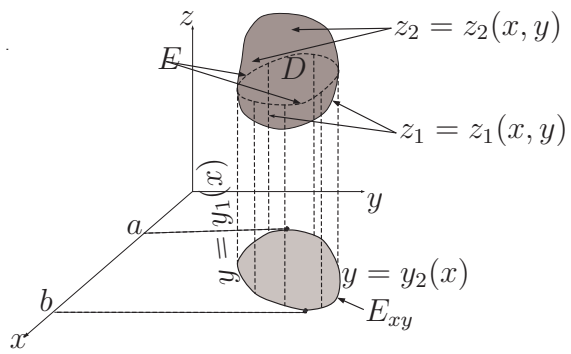
2. ábra. Az $y = x$ és $y = x^2$ közötti terület.



$u_1 \equiv 0$

3. ábra. Az $y = x$ és az egységkör első negyedbe eső darabjának metszete.

Normáltartományok térben Egy D tartomány akkor *normált tartomány* a térben, ha olyan mint egy *krumpli.*



4. ábra. A deformált gömb szerű D tartomány "egyenlítője" az E. A D test felületének az E görbe feletti része a $z = z_2(x, y)$ és az E alatti része a $z = z_1(x, y)$ felületek. Az E görbe vetülete az xy síkra (ugyanaz mint a D vetülete) az E_{xy} görbe. Ennek (az x tengely szempontjából) "alsó" része az $y = y_1(x, y)$, felső része pedig az $y = y_2(x, y)$ görbék.

$$D : \begin{cases} a & \leq & x & \leq & b \\ y_1(x) & \leq & y & \leq & y_2(x) \\ z_1(x, y) & \leq & z & \leq & z_2(x, y) \end{cases} \qquad \text{(L. 4. ábra.)}$$

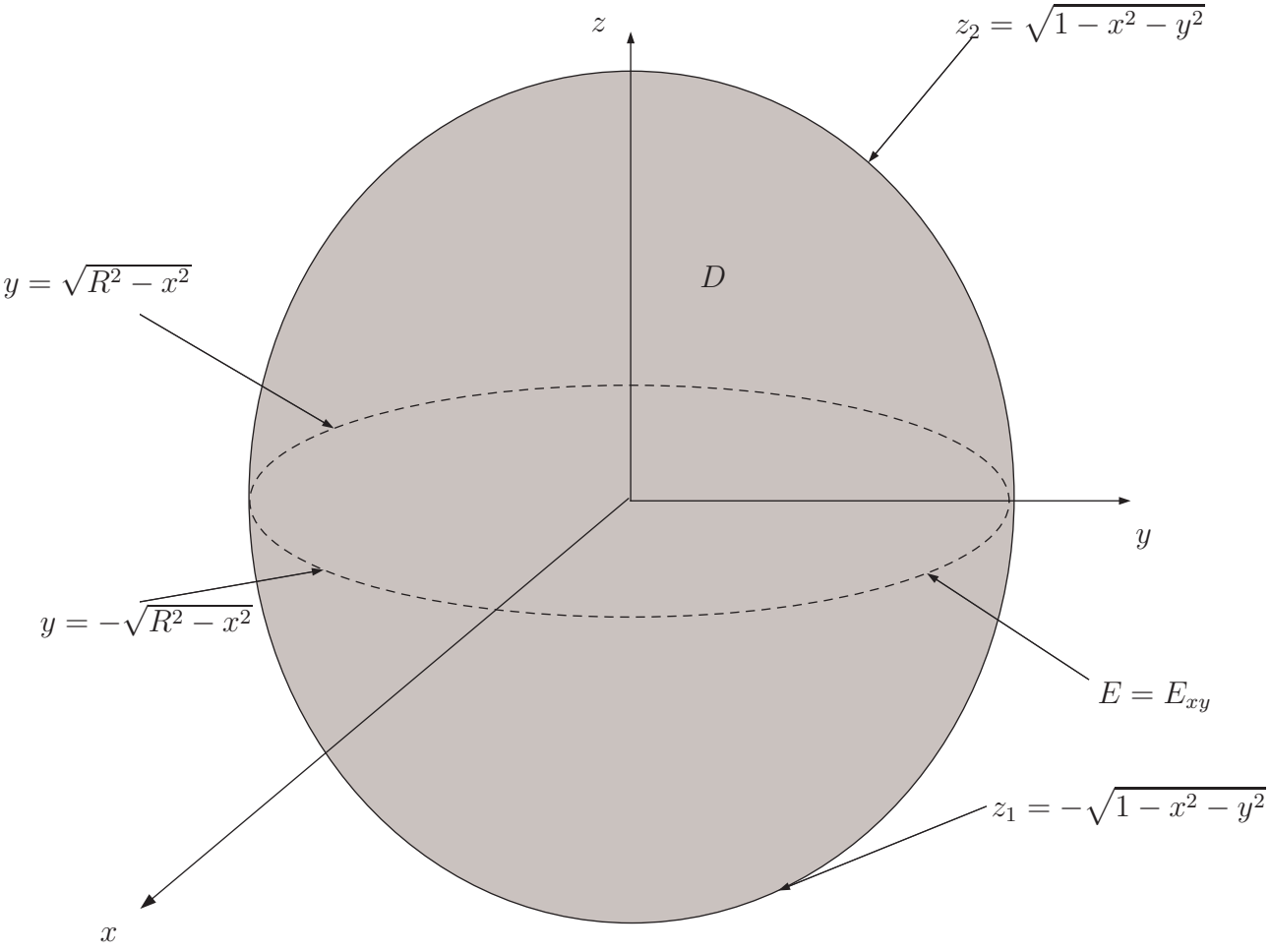
2. PÉLDA: Az origó középpontú, R sugarú gömb:

$$D : \begin{cases} -R & \leq & x & \leq & R \\ -\sqrt{R^2 - x^2} & \leq & y & \leq & \sqrt{R^2 - x^2} \\ -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} & \leq & z & \leq & \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

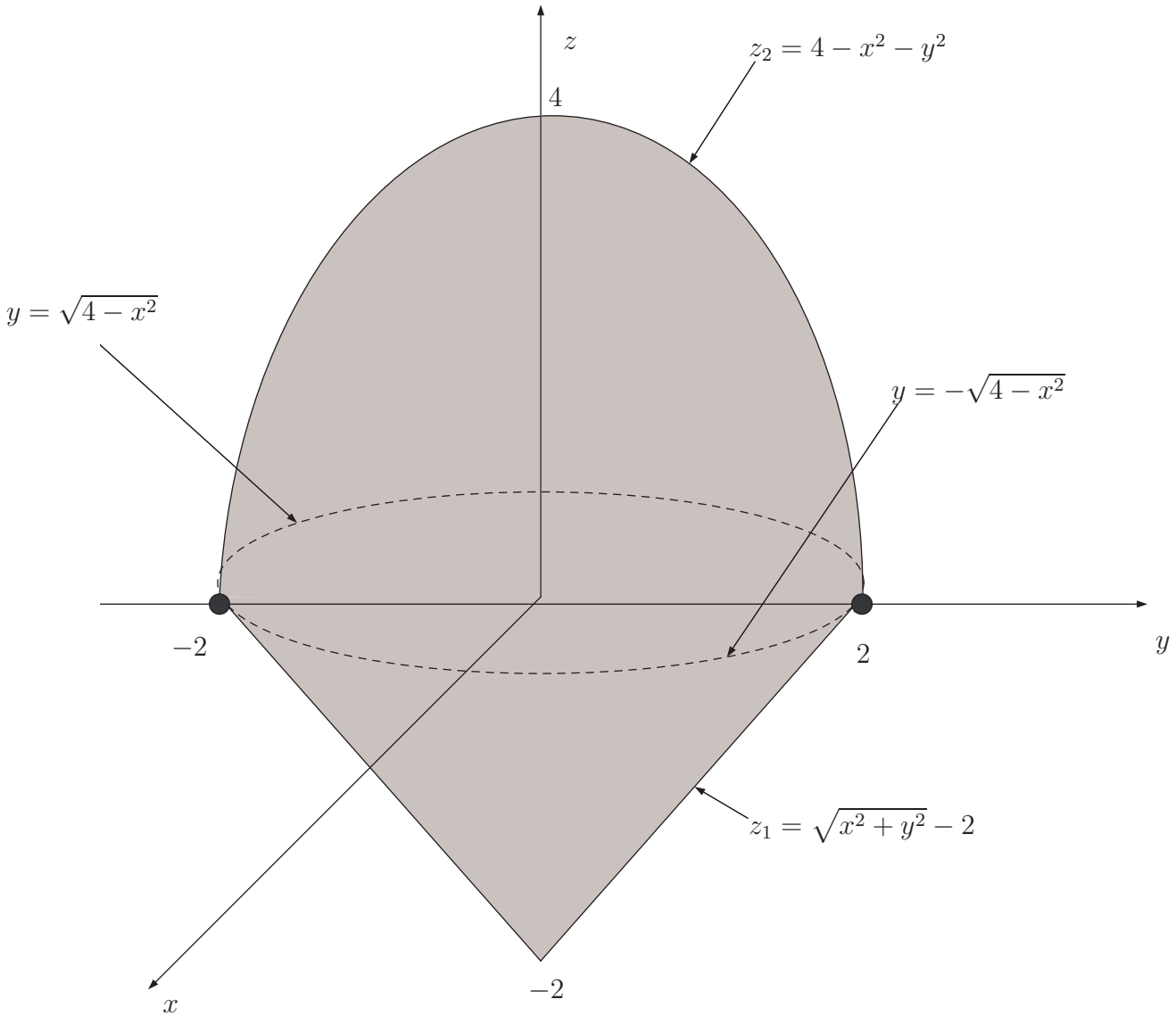
(L. 5. ábra)

3. PÉLDA: Legyen D a $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$ kúp, és a $z = 4 - x^2 - y^2$ forgási paraboloid által határolt korlátos tartomány.

$$D : \begin{cases} -2 & \leq & x & \leq & 2 \\ -\sqrt{4 - x^2} & \leq & y & \leq & \sqrt{4 - x^2} \\ \sqrt{x^2 + y^2} - 2 & \leq & z & \leq & 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \qquad \text{(L. 6. ábra)}$$



5. ábra. Gömb mint normáltartomány.



6. ábra. Felül gömb alul kúp.

0.1.2. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ függvény Riemann integrálja normáltartományon

Legyen D egy síkbeli normáltartomány. Legyen f egy olyan korlátos függvény, amely értelmezve van és *folytonos* a D *majdnem minden pontjában.* Ez biztosan teljesül, ha a rossz pontok (vagyis ahol f nincs is értelmezve vagy ha értelmezve van akkor nem folytonos), lefedhetőek véges sok egyenessel.

Vegyünk egy tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ számot, és tekintsük az $\frac{1}{n}$ oldalú négyzetrácsot. Legyen $\{K_1, \ldots, K_m\}$ azon négyzetek a fenti négyzetrácsból, melyeknek van közös pontja D-vel. Legyen u_i egy tetszőleges eleme a $K_i \cap D$ halmaznak. (L. 7. ábra.) Ekkor : *terület*$(K_i)\, f(u_i) = \frac{1}{n^2} f(u_i) \approx$ az f függvény által meghatározott felület K_i feletti, és a felület alatti rész térfogatával.

Az f felület alatti térfogat közel egyenlő, ha ezen kis térfogatok összegével. Azaz $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{n^2} f(u_i) \approx$ az $f(x, y)$ alatti térfogat. Tehát az $f(x, y)$ alatti térfogatot mint a

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{m} f(u_i)$$

határértékkel (ami belátható, hogy létezik) értelmezzük.

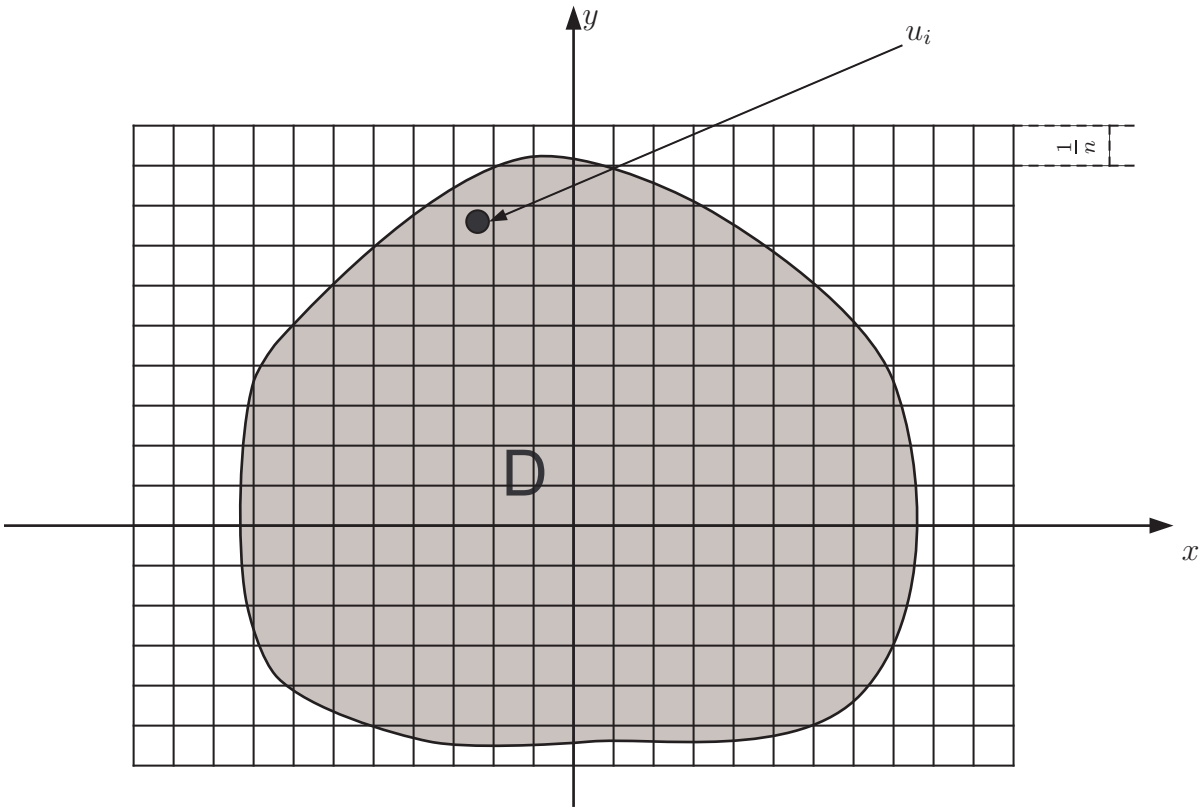
1. DEFINÍCIÓ: A fenti határértéket az$f$ függvény D **tartományra vonatkozó kettős integráljának** nevezzük. Néha pedig mint az f *Riemann integrálját* a D-n emlegetjük.

Tehát a $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$ az f függvény grafikonja alatti térfogat a D tartományon.

Fontos speciális eset: Mivel $f(x, y) \equiv 1$ konstans függvény alatti térfogat a D tartományon értelemszerűen a D tartomány területe kell legyen, ezért: *terület*$(D) = \iint\limits_D 1 dxdy$.

Mivel az $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{m} f(u_i)$, (ahol $\{K_1, \ldots, K_m\}$ az $\frac{1}{n}$-es négyzetrács azon négyzetei, melyek metszik D-t és $u_i \in K_i$) ezért az integrál, mint *terület*$(D) *($*az\ f$ *értékeinek "átlaga"* D*-n*$)$ kifejezéssel *szemléltethető.* Ez nem pontos matematikai kifejezés, csak *szemléltetés.*

Tehát az integrál tulajdonságai az *"átlag"* tulajdonságaiból jönnek.



7. ábra. Az u_i a K_i négyzet egy tetszőleges pontja.

A Riemann integrál tulajdonságai

1. $\iint\limits_D Cf(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy, \qquad C \in \mathbb{R}$

2. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$

3. $D = D_1 \cup D_2$ továbbá $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, akkor $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

4. Ha $p \leq f(x,y) \leq q, \forall (x,y) \in D$, akkor $területp \cdot (D) \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq q \cdot terület(D)$

5. *Integrálszámítás középérték tétele:*

Ha f *folytonos* a D egy összefüggő korlátos tartomány, akkor minden pontjában, úgy $\exists\,(u,v) \in D$, hogy $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = terület\,(D) \cdot f(u,v)$, D *összefüggő*.

Az integrálszámítás középérték tétele szerint tehát ha f *folytonos*, akkor $\exists$ olyan $(u,v) \in D$, hogy a D alapú $f(u,v)$ magasságú test térfogata éppen $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$-nal egyenlő.

Az $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ szemléletesen azt jelenti, hogyha van egy sziget a tengerben, melynek alapja D, és a tengerszint feletti magasságot az $(x,y) \in D$ pontban az $f(x,y)$ adja meg, akkor ha egy nagy buldózerrel ezt a szigetet teljesen símára gyaluljuk (azaz minden pont tengerszint feletti magassága ugyanaz az M szám), akkor $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = M \cdot terület(D)$.

A Riemann integrál kiszámítása normáltartományon

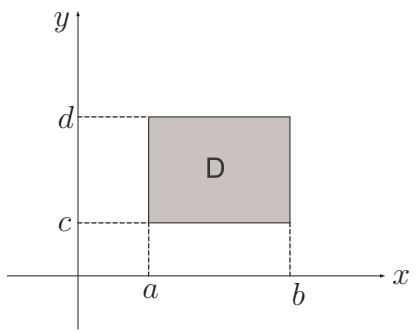
1. TÉTEL:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

ha $D : \left\{ \begin{array}{ccccc} a & \leq & x & \leq & b \\ u_1(x) & \leq & y & \leq & u_2(x) \end{array} \right\}$ és az f a D minden (kivéve esetleg véges sok) pontjában értelmezett korlátos függvény, amely a D minden (kivéve esetleg véges sok) pontjában folytonos.

Megjegyzés: Ha $D := \left\{ \begin{array}{ccccc} c & \leq & y & \leq & d \\ v_1(y) & \leq & x & \leq & v_2(y) \end{array} \right.$, akkor $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=v_1(x)}^{v_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$.

Tehát ha $D = [a,b] \times [c,d]$ téglalap (L. 8. ábra):



8. ábra. Téglalap mint két intervallum szorzata.

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx \right) dy$. Vagyis az integrálás sorrendje felcserélhető mert függetlenek a határai.

4. PÉLDA: Legyen $D = [0,3] \times [1,2]$ téglalap. Mivel egyenlő $\iint\limits_D (1+8xy)\,dxdy$?

Megoldás: $\iint\limits_D (1+8xy)\,dxdy = \int\limits_{x=0}^{3} \left(\int\limits_{y=1}^{2} (1+8xy)\,dy \right) dx = \int\limits_{x=0}^{3} \left[y + 4xy^2 \right]_{y=1}^{2} dx = \int\limits_{x=0}^{3} (2+16x-1-4x)\,dx = \int\limits_{x=0}^{3} (1+12x)\,dx = \left[x + 6x^2 \right]_0^3 = 57.$

5. PÉLDA: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges folytonos függvény és legyen D a 9. ábrán látható tartomány . Feladat: határozzuk meg az integrálás határait az alábbi kettes integrálban:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ?$$

Megoldás: Látható, hogy D egy normál tartomány, ahol $-1 \leq x \leq 2$ és egy ilyen x-re $x^2 \leq y \leq 2+x$. Tehát

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=-1}^{2} \left(\int\limits_{y=x^2}^{2+x} f(x,y)dy \right) dx$$

6. PÉLDA: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges folytonos függvény és legyen a 10. ábrán látható tartomány . Feladat: határozzuk meg az integrálás határait az alábbi kettes integrálban:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ?$$

Megoldás: Az alsó kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 1$. A felső kör egyenlete: $x^2 + (y-1)^2 = 1$. A két kör metszéspontjainak x koordinátái: $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tehát egy $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$-re $1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$. Vagyis:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\int\limits_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \right) dx.$$

7. PÉLDA: Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges folytonos függvény és legyen D a 11. ábrán látható tartomány.

Feladat: határozzuk meg az integrálás határait az alábbi kettes integrálban:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ?$$

Megoldás: Noha a D tartomány **nem** normáltartomány, de előáll mint a D_1 és a D_2 normáltartományok diszjunkt uniója. Ezért

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Tehát elég a jobb oldalon alló két integrált kiszámítani.

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=-1}^{0} \left(\int\limits_{y=1+x}^{2+2x} f(x,y)dy \right) dx + \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=1-x}^{2-2x} f(x,y)dy \right) dx$$

Továbbá:

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=-1}^{0} \left(\int\limits_{y=-2-2x}^{-1-x} f(x,y)dy \right) dx + \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=-2+2x}^{-1+x} f(x,y)dy \right) dx.$$

8. PÉLDA: Határozzuk meg az $x+y+z=4$ sík alatti térfogatot az xy síkbeli $R=[0,1]\times[0,2]$ téglalap feletti részen.

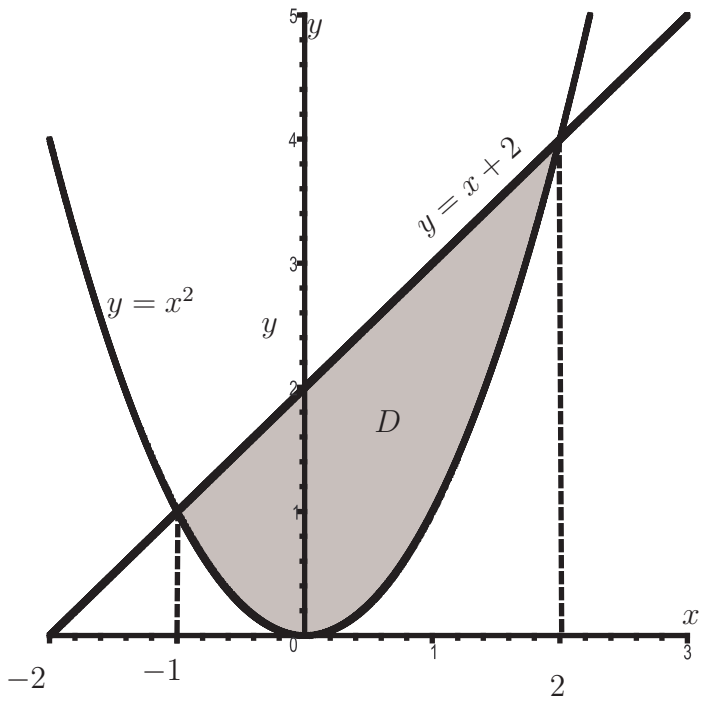
(L. 12. ábra)

Megoldás: $térfogat = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=0}^{2} (4-x-y)\, dy \right) dx = \int\limits_{x=0}^{1} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx =$ $\int\limits_{x=0}^{1} (8-2x-2)\, dx = \int\limits_{x=0}^{1} (6-2x)\, dx = [6x - x^2]_0^1 = 5.$

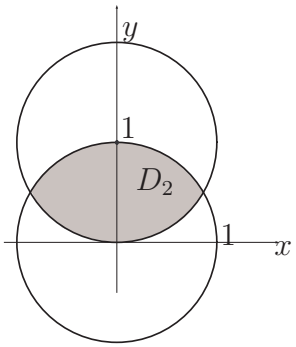
9. PÉLDA: Mivel egyenlő az $\iint\limits_R xydxdy$, ha R az a korlátos tartomány, amit az $y=\frac{1}{2}x$; $y=\sqrt{x}$; $x=2$; $x=4$ határolnak? (L. 13. ábra.)

Megoldás: $\iint\limits_R xydxdy = \int\limits_{x=2}^{4} \left(\int\limits_{y=\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xydy \right) dx = \int\limits_{x=2}^{4} \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} = \int\limits_{x=2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx =$ $\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_2^4 = \frac{11}{6}.$

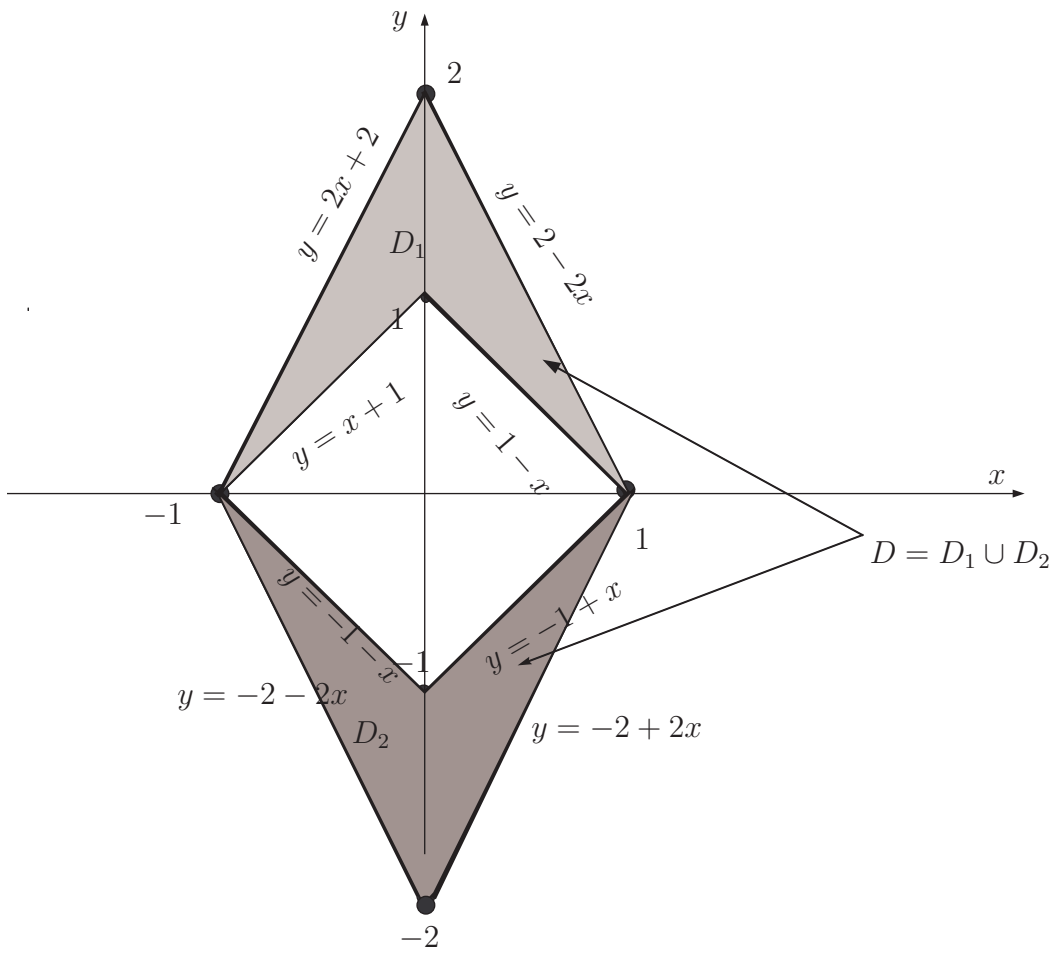
10. PÉLDA: Legyen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, amely integrálható az ábrán látható D tartományon. Irjuk fel az integrálási határokat:



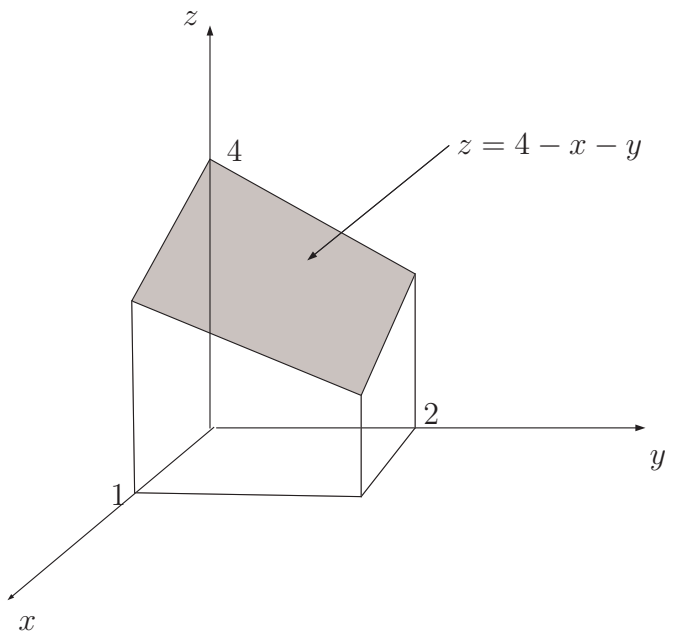
9. ábra. D az ábrán jelölt tartomány.



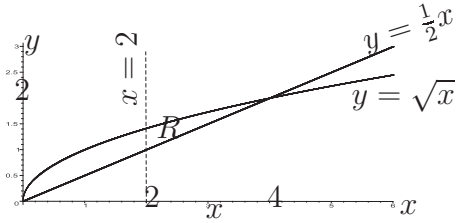
10. ábra. D_2 az ábrán jelölt tartomány.



11. ábra. $D = D_1 \cup D_2$ az integrálási tartomány.



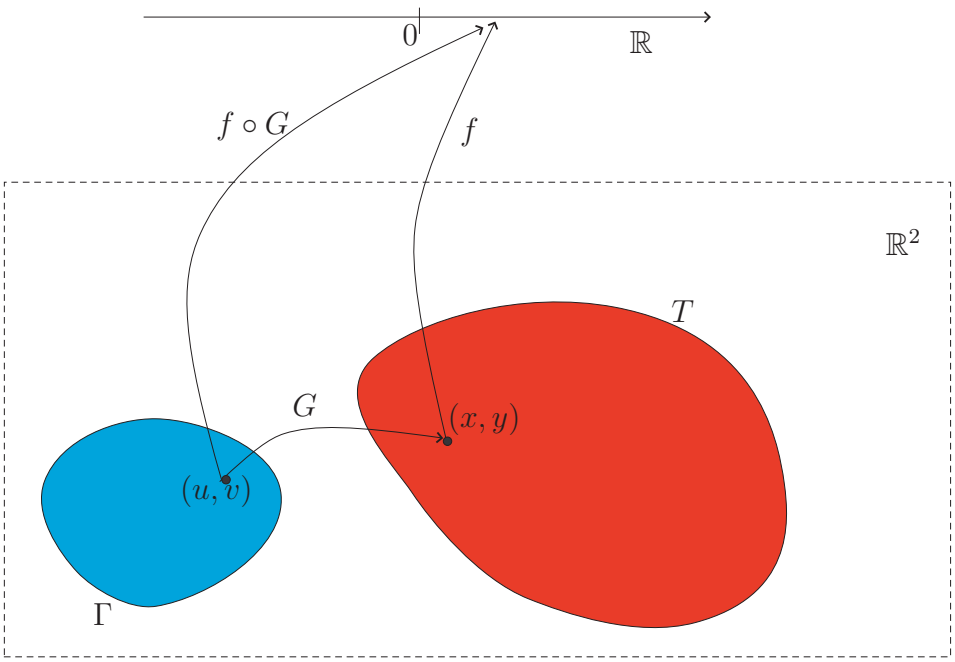
12. ábra. Test melyet alúról a $[0,1]\times[0,2]$ téglalap, felűről pedig az $x+y+z=4$ sík határol.



13. ábra. Az $y=\sqrt{x}$, $\frac{1}{2}x$ és az $x=2$ görbék által határolt R tartomány

0.1.3. Helyettesítéses integrál $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényekre

Gyakran előfordul, hogy az integrálás határai már önmagukban is olyan komplikált függvények, hogy emiatt az integrál kiszámítása a fenti módon túl sok munkát igényelne. Sokat egyszerűsödhet a dolog, ha megfelelő helyettesítést vezetünk be melynek hatására az ingrálási tartomány egy téglalap, vagy egy háromszög lesz. Az új változók helyettesítésének szabályait mutatja a következő tétel, melynek talán ilyesztően általános fogalmazását ellensúlyozza, a sok példa, amelyek a tétel alkalmazását mutatják be.



14. ábra. $\iint\limits_T f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Gamma f(G(u,v)) \cdot |\det(G'(u,v))|\, dudv$

2. TÉTEL: Legyen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ integrálható a $T \subset \mathbf{R}^2$ tartományon, továbbá legyen $G : \Gamma \to T$ *1-1 értelmű* és folytonosan differenciálható, ahol

$\Gamma \subset \mathbf{R}^2$. Ekkor

$$\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Gamma f(G(u,v)) \left| \underbrace{\det(G'(u,v))}_{\text{Jacobi determináns}} \right| dudv \qquad (1)$$

Leggyakrabban az ún. polárkoordinátás helyettesítést használjuk. Itt a tételbeli u, v szerepét az r (origótól vett távolság) és a φ (az x tengely pozitív felével, az óramutató járásával ellentétes irányban felmért szög). A polár koordinátás helyettsítés estén:

$$G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos(\varphi)}_{x}, \underbrace{r\sin(\varphi)}_{y} \right) \text{ és } det\,(G'(r,\varphi)) = r.$$

11. PÉLDA: Írjuk fel poolárkoordinátassan az $(5,2)$ középpontú és $R = 4$ egységsugarú zárt körlemezt!

Megoldás:

$$x = 5 + r\cos(\varphi) \quad y = 2 + r\sin(\varphi),$$

ahol $0 \le \varphi \le 2\pi$ és $0 \le r \le 4$. Tehát a paraméter tartomány az r, φ síkon egy téglalap: $[0,4] \times [0,2\pi]$.

12. PÉLDA: Írjuk fel poolárkoordinátassan az

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{4} = 1$$

egyenlettel meghatározott zárt ellipszis lemezt.

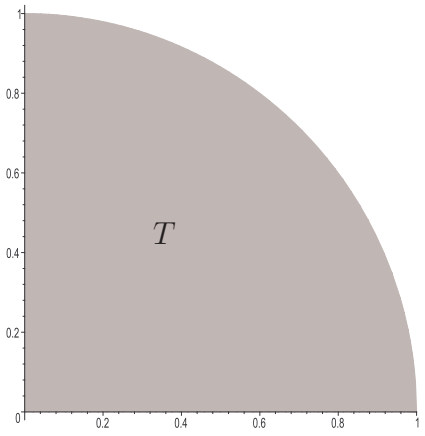
Megoldás: Az ellipszis középpontja: $P = (4,7)$, az x tengellyel párhuzamos tengelyének hossza: $a = 3$ az y tengellyel párhuzamos tengely hossza $b = 2$. Ezért:

$$x = 4 + ar\cos(\varphi) \quad y = 7 + br\sin(\varphi),$$

ahol $0 \le r \le 1$ és $0 \le \varphi \le 2\pi$.

13. PÉLDA: Legyen $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ és legyen T a 15. ábrán látható negyedkör lemez tartomány.

Mivel egyenlő $\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy$?



15. ábra. A T tartomány

Megoldás: $G(r,\varphi) = \underbrace{\left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)}_{\text{polárkoordinátás helyettesítés}}$, és $\Gamma = \left\{(r,\varphi)\,|0 \le r \le 1; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Ekkor a G a Γ-t 1-1 értelműen képezi a T-re, és G folytonosan differenciálható. Ezért a tétel feltételei teljesülnek.

$G'(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \det(G'(r,\varphi)) = r$

$|\det(G'(r,\varphi))| = r$. Tehát

$$\begin{aligned}
\iint\limits_T f(x,y)\,dxdy &= \iint\limits_\Gamma \underbrace{\sqrt{1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2}}_{f(G(r,\varphi))} \cdot \underbrace{r}_{|\det(G'(r,\varphi))|} drd\varphi \\
&= \int\limits_{r=0}^{1} \left(\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-r^2} \cdot r d\varphi \right) dr \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\left[\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \right]_{r=0}^{1} \right) = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

14. PÉLDA: Legyen $A = \{(x,y)\,|x^2+y^2 \le 4, y \ge 0\}$.
Mivel egyenlő $\iint\limits_A \underbrace{\left(x^2+y^2+1\right)}_{f(x,y)} dxdy$?

Megoldás: $G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$ és $\Gamma = \{(r,\varphi)\,|0 \le r \le 2; 0 \le \varphi \le \pi\}$.

$G : \Gamma \to A$ 1-1 értelmű folytonosan differenciálható.

$$\iint\limits_A \underbrace{\left(x^2+y^2+1\right)}_{f} dxdy = \iint\limits_\Gamma \left(\underbrace{\underbrace{(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}_{r^2}+1}_{f(G(r,\varphi))} \right) \cdot \underbrace{r}_{|\det(G'(r,\varphi))|} drd\varphi =$$

$\iint\limits_\Gamma (r^3+r)\,drd\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{2} (r^2+r)dr \right) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right]_0^2 d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \left(\frac{16}{4} + 2 \right) d\varphi =$
$\pi 6$.

15. PÉLDA: Legyen $A = \{(x,y)\,|x \geq 0; \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$ és $B = \left\{(x,y)\,|x \geq 0; \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2\right\}$. Kérdés: $\iint\limits_{A\cap B} \frac{x^2}{y} dxdy = ?$

Megoldás: Először megkeressük a megfelelő helyettesítést. $\left.\begin{array}{l} t = \frac{y}{\sqrt{x}} \\ u = \frac{y}{x^2} \end{array}\right\}$. Innen: $\sqrt{x} = \frac{y}{t}$ és $x^2 = \frac{y}{u}$. A második egyenletet elosztva az elsővel kapjuk, hogy: $x^{\frac{3}{2}} = \frac{t}{u}$, vagyis $x = t^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{2}{3}}$. Ebből és a fenti első egyenletből: $y = t\sqrt{x} = t^{\frac{4}{3}}u^{-\frac{1}{3}}$. Vagyis

$$G(t,u) = \left(\underbrace{\sqrt[3]{\frac{t^2}{u^2}}}_{x}, \underbrace{t\sqrt[3]{\frac{t}{u}}}_{y}\right);$$

$$\Gamma := \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{4} \leq u \leq 1 \\ 1 \leq t \leq 2 \end{array}\right\}$$

Könnyen látható, hogy

$$\det(G'(t,u)) = \frac{6}{9}tu^{-2},$$

továbbá: $\frac{x^2}{y} = u^{-1}$. Vagyis a keresett integrál:

$$\frac{2}{3}\int\limits_{u=\frac{1}{4}}^{1}\int\limits_{t=1}^{2} u^{-1}\cdot tu^{-2}dtdu = \frac{2}{3}\int\limits_{u=\frac{1}{4}}^{1} u^{-3}\int\limits_{t=1}^{2} tdt = \frac{15}{2}.$$

Az (1) egyenletben szereplő $f(G(u,v))\cdot|\det(G'(u,v))|$ kiejezés értékének kiszámításában segít a következő Maple parancs:

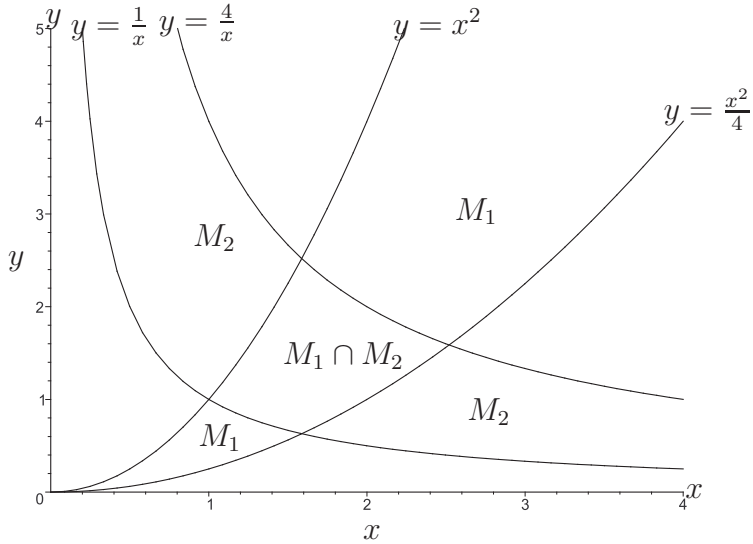
```
> with(student):

> changevar({x=t^(2/3)*u^(-2/3),y=t^(4/3)*u^(-1/3)}, Doubleint(x^2/y,x,y),[t,u] );
```

$$\iint 2/3\left|\frac{t}{u^2}\right| u^{-1}dt\,du$$

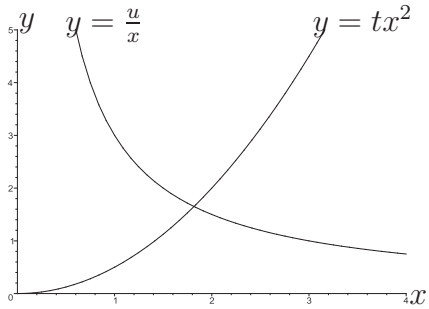
16. PÉLDA: Legyen $M_1 = \left\{(x,y) : x \geq 0, \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2\right\}$ és $M_2 = \left\{(x,y) : x > 0, \frac{1}{x} < y < \frac{4}{x}\right\}$. Mivel egyenlő $\iint\limits_{M_1 \cap M_2} \frac{x^2 \sin(2xy)}{y} dxdy$?

(L. 16. ábra.)



16. ábra. Az M_1 és M_2 tartományok metszete.

Megoldás: Először megfelelő helyettesítést keresünk. (L. 17. ábra)



17. ábra. A t u paraméterek jelentése.

$$\left.\begin{array}{r} t=\frac{y}{x^2} \\ u=xy \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} x=u^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}} \\ y=u^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}} \end{array} \quad ;$$

$$\Gamma := \begin{array}{c} \frac{1}{4} \leq t \leq 1 \\ 1 \leq u \leq 4 \end{array}$$

vagyis

$$G(t,u) = \left(\underbrace{u^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}}_{x}, \underbrace{u^{\frac{2}{3}}t^{\frac{1}{3}}}_{y} \right)$$

és

$$G'(t,u) = \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{4}{3}} & \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}t^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}} \end{array} \right] \Rightarrow \det\left(G'(t,u)\right) = -\frac{1}{3t}.$$

$$\iint\limits_A \overbrace{\frac{x^2 \sin 2xy}{y}}^{f(x,y)} dxdy = \iint\limits_\Gamma \overbrace{\sin(2u) \cdot \frac{1}{t}}^{f(G(t,u))} \cdot \overbrace{\frac{1}{3t} dudt}^{|\det(G'(t,u))|} = \frac{1}{3} \int\limits_{t=\frac{1}{4}}^{1} \left(\int\limits_{u=1}^{4} \sin(2u) \cdot \frac{1}{t^2} du \right) dt =$$

$\frac{1}{3} \int\limits_{t=\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{t^2} dt \int\limits_{u=1}^{4} \sin(2u)\, du$ Ez innen egyszerű számolással befejezhető.

Az (1) egyenletben szereplő $f(G(u,v)) \cdot |\det(G'(u,v))|$ kiejezés értékének kiszámításában segít a következő Maple parancs:

```
> with(student):

> changevar({x=t^(-1/3)*u^(1/3),y=t^(1/3)*u^(2/3)},
Doubleint((x^2/y)*sin(2*x*y),x,y),[t,u] );
```

$$\iint 2/3 \, \frac{\sin(u)\cos(u)}{t\,|t|} dt\, du$$

17. PÉLDA: Az $\int\limits_{y=0}^{\infty} \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{1-2x-3y} dxdy$ mivel egyenlő?

Megoldás: $\int\limits_{y=0}^{\infty} \left(\int\limits_{x=0}^{\infty} e^{1-2x-3y} dx \right) dy = \lim\limits_{\substack{L\to\infty \\ R\to\infty}} \int\limits_{y=0}^{L} \left(\int\limits_{x=0}^{R} e^{1-2x-3y} dx \right) dy =$

$\int\limits_{y=0}^{L} \left(\int\limits_{x=0}^{R} e^{1-2x-3y} dx \right) dy = \int\limits_{y=0}^{L} \left[-\frac{1}{2} e^{1-2x-3y} \right]_0^R dy$

$\int\limits_{y=0}^{L}\left(-\frac{1}{2}e^{1-2R-3y}+\frac{1}{2}e^{1-3y}\right)dy=\left[\frac{1}{6}e^{1-2R-3y}-\frac{1}{6}e^{1-3y}\right]_0^L=\frac{1}{6}\left(e^{1-2R-3L}-e^{1-3L}\right)-$ $\frac{1}{6}\left(e^{1-2R}-e\right)$. Tehát $\int\limits_{y=0}^{\infty}\int\limits_{x=0}^{\infty}e^{1-2x-3y}dxdy=\lim\limits_{\substack{L\to\infty\\R\to\infty}}\frac{1}{6}\left(\underbrace{e^{1-2R-2L}}_{0}-\underbrace{e^{1-3L}}_{0}\right)-$ $\frac{1}{6}\left(\underbrace{e^{1-2R}}_{0}-e\right)=\frac{e}{6}$.

18. PÉLDA: Mivel egyenlő az $I=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}$?

Megoldás: $G\left(r,\varphi\right)=\left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x},\underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$;

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2.$$

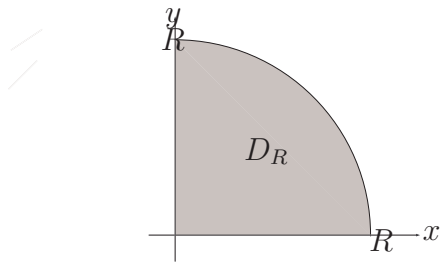
$$I=\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{D_R}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy;$$

$$D_R=\left\{(x,y)\,|x\geq 0,y\geq 0,x^2+y^2\leq R^2\right\}$$

és

$$\Gamma_R=\left\{(r,\varphi)\,|0\leq r\leq R,0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}\right\};$$

$$G:\Gamma_R\to D_R.$$



18. ábra. A D_R tartomány.

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{r=0}^{R} \left(\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\varphi \right) dr = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{R} e^{-r^2} r dr = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left[e^{-r^2}\right]_0^R =$$

$$\lim_{R\to\infty} -\frac{\pi}{4} \left(\underbrace{e^{-R^2}}_{0} - 1 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát

$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_{x=0}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{y=0}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\pi}{4}$. Tehát

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

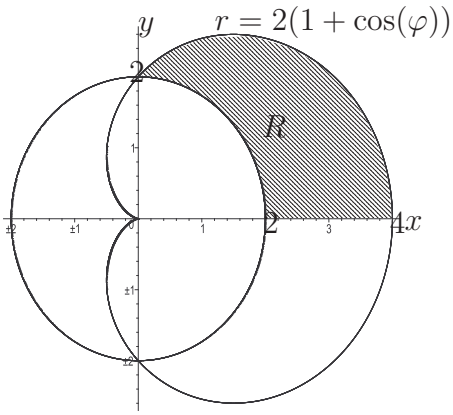
Vagyis

$$\boxed{\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

(ez használható a normális eloszlás sűrűség függvényével kapcsolatban).

$\int e^{-x^2} dx$ **nem** adható meg zárt alakban, ezért fontos a fenti eredmény.

19. PÉLDA: Mivel egyenlő az $I = \iint_R \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$?



19. ábra. A kardioid és kör által közrezárt tartomány fele.

Megoldás: $G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$ és $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{r^2}} = \sin\varphi\,(= f(G(r,\varphi)))$, $\Gamma = \left\{(r,\varphi)\,|2 \le r \le 2(1+\cos\varphi)\,; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$, $G : \Gamma \to R$. Tehát $I = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{r=2}^{2(1+\cos\varphi)} \sin\varphi r dr\right) d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi = 2\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left((1+\cos\varphi)^2 \sin\varphi - \sin\varphi\right)\right] d\varphi$ $2\left[-\frac{1}{3}(1+\cos\varphi)^3 + \cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right] = \frac{8}{3}$.

20. PÉLDA: Határozzuk meg a háromlevelű lóhere területét, melynek egyenlete: $r = \sin 3\varphi$.

(L. 20. ábra.)

Megoldás: $terület\,(R) = \iint\limits_R 1 dxdy$.

$G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$, $\Gamma = \left\{(r,\varphi)\,|\, \begin{array}{ccccc} 0 & \le & \varphi & \le & \frac{\pi}{3} \\ 0 & \le & r & \le & \sin 3\varphi \end{array}\right\}$ és $G : \Gamma \to R$. Így a keresett egy lóhere területe:

$terület\,(R) = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_{r=0}^{\sin 3\varphi} r dr\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 6\varphi)\, d\varphi =$ $\left[\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{24}\sin 6\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3\cdot 4} = \frac{\pi}{12}$.

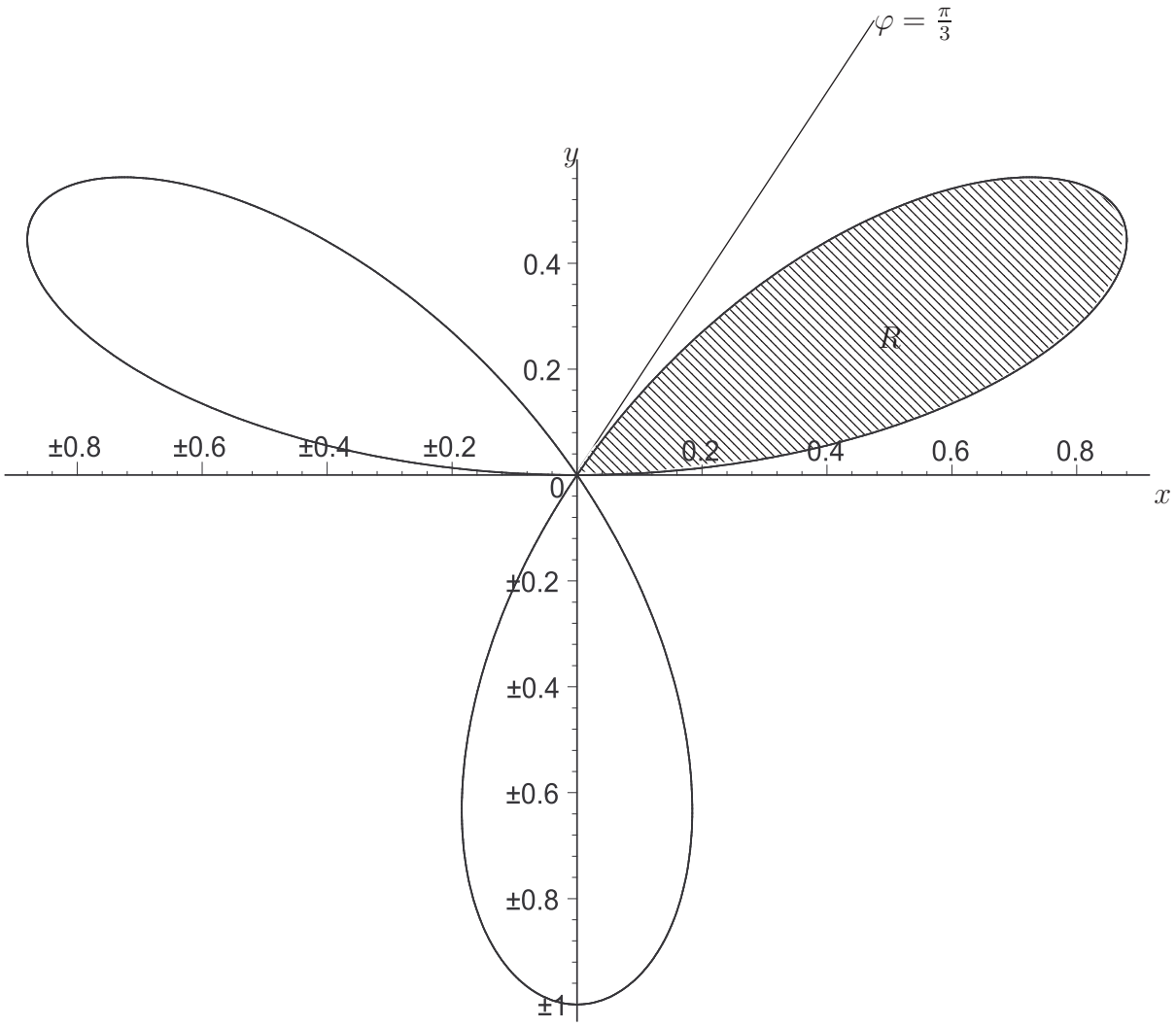
21. PÉLDA: Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát!

Megoldás: Elég meghatározni a felső félgömb $\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2 = R, z \ge 0\}$ V térfogatát.

$V = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$, ahol $D = \{(x,y)\,|x^2 + y^2 \leq R^2\}$. $G(r,\varphi) = \left(\underbrace{r\cos\varphi}_{x}, \underbrace{r\sin\varphi}_{y}\right)$, $\Gamma = \left\{(r,\varphi)\,|\, \begin{array}{ccccc} 0 & \leq & r & \leq & R, \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & 2\pi \end{array}\right\}$, $G : \Gamma \to D$. Tehát

$$\begin{aligned} V &= \int\limits_{r=0}^{R}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{r}_{|\det(G'(r,\varphi))|} \sqrt{R^2 - r^2}d\varphi dr \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_{r=0}^{R}(-2r)\sqrt{R^2 - r^2}dr \\ &= (2\pi)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\left[\left(R^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

ez a félgömb térfogata, így az R sugarú gömb térfogata: $\frac{4\pi R^3}{3}$.



20. ábra. Háromlevelű lóhere.

0.1.4. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ függvény Riemann integrálja normáltartományon

Az ilyen függvények integrálját az 1. Definícióban (7. oldalon) az $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ estére leírtak mintájára definiáljuk. Az eltérés csak annyi, hogy itt minden négyzet helyett kockát kell mondani. A hármas integrál tulajdonságai ugyanazok mint a 9. oldalon leírt kettes integrál tulajdonságai. Legfőképpen az 1. tétel analógiájára teljesül, hogy:

3. TÉTEL: Legyen D egy normál tartomány, a következő határokkal:

$$D := \left\{ \begin{array}{lclcl} a & \leq & x & \leq & b \\ y_1(x) & \leq & y & \leq & y_2(x) \\ z_1(x,y) & \leq & z & \leq & z_2(x,y) \end{array} \right. . \text{ (L. 4. ábra.)}$$

Ekkor

$$\boxed{\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int\limits_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.}$$

22. PÉLDA: Legyen D az a tetraéder, melynek csúcsa az origó és az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ pontok. Kérdés:

$$\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = ?$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy D egy normál tartomány a következő határokkal:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 \leq z \leq 1-x-y \end{array} \right\}.$$

Tehát

$$I := \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\underbrace{\int\limits_{y=0}^{1-x} \left(\underbrace{\int\limits_{z=0}^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz}_{I_1} \right) dy}_{I_2} \right) dx.$$

Most kiszámoljuk az I_1-et. Ezt úgy kapjuk meg, hogy csak a z-t tekintjük változónak, az x-et és az y-t viszont konstansnak tekintjük az I_2 kiszámolásakor:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{z=0}^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz = -\frac{1}{2} \cdot \left[(1+x+y+z)^{-2}\right]_{z=0}^{1-x-y} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (1+x+y)^{-2}. \end{aligned}$$

A z változót tehát kiküszöböltük. Most az I_2 kiszámolásához csak az y-t tekintjük változónak az x-et konstansnak tekintjük:

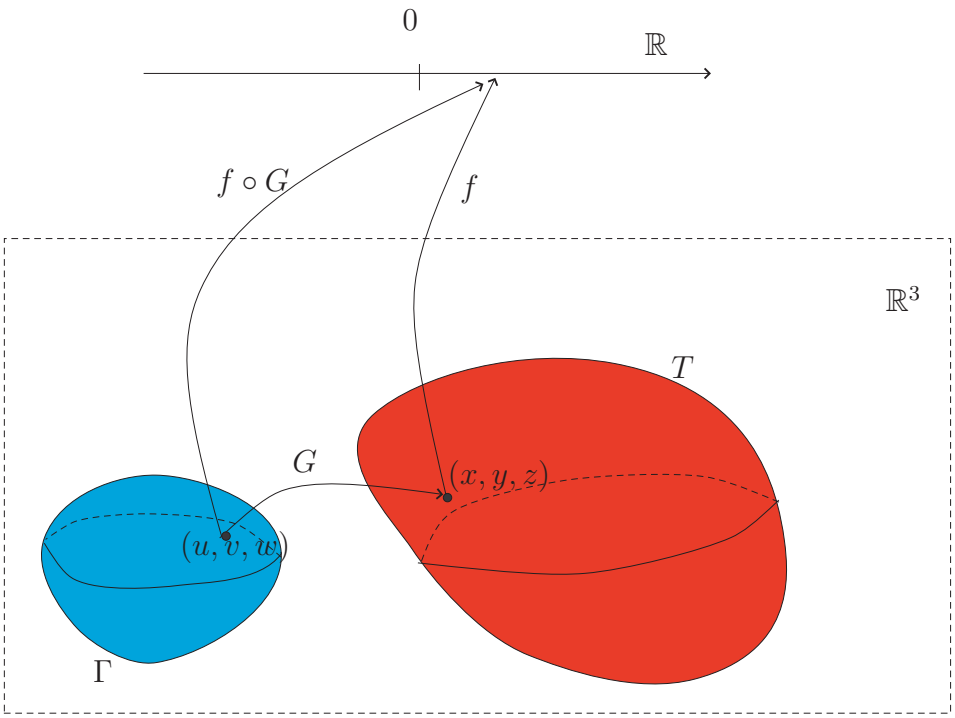
$$I_2 = \int\limits_{y=0}^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot (1+x+y)^{-2} \right) = -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}.$$

Tehát a keresett hármas integrál:

$$I = \int\limits_{x=0}^{1} -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} dx = -\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \approx 0.034.$$

Vagyis a normál tartományon vett hármas integrál kiszámítását a tartomány határai által meghatározott három darab egyváltozós függvény integrálására vezettük vissza.

0.1.5. Helyettesítéses integrál $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvényekre



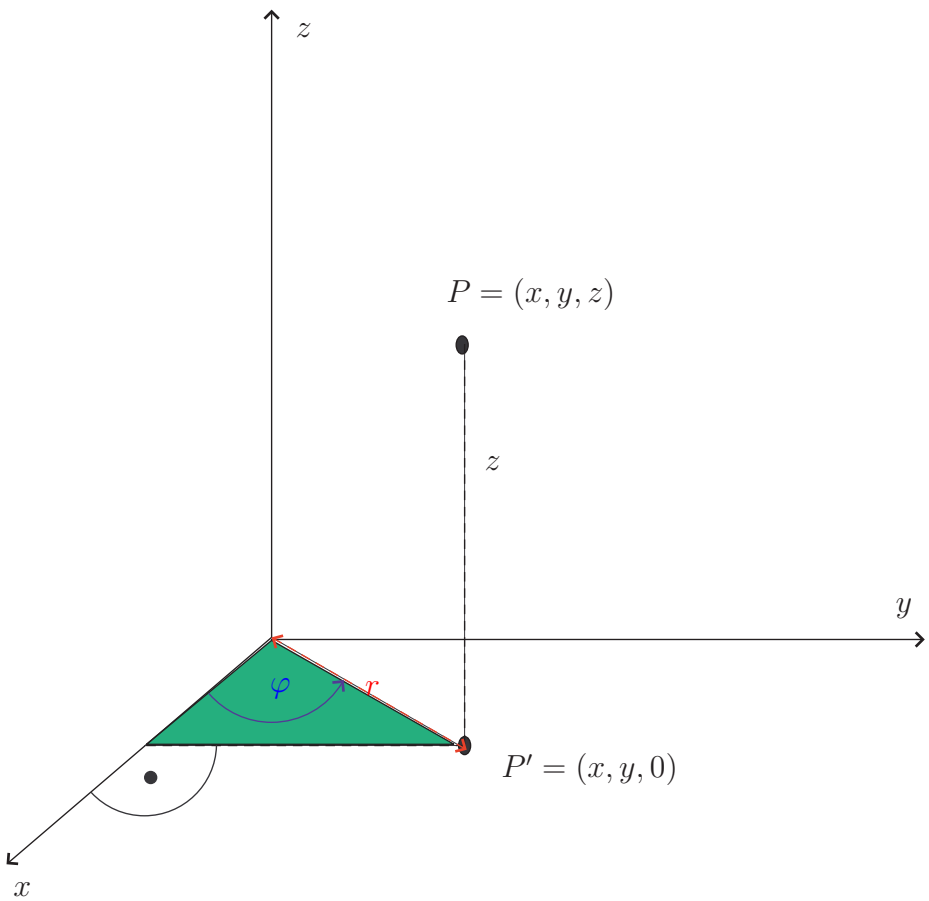
21. ábra. $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_\Gamma f(G(u,v,w)) \cdot |\det(G'(u,v,w))|\, dudvdw$

4. TÉTEL: Legyen $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ integrálható a $T \subset \mathbf{R}^3$ tartományon, továbbá legyen $G : \Gamma \to T$ *1-1 értelmű* és folytonosan differenciálható, ahol $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$. Ekkor

$$\boxed{\iiint\limits_T f(x,y,z)\, dxdydz = \iint\limits_\Gamma f(G(u,v,w)) \left| \underbrace{\det(G'(u,v,w))}_{\text{Jacobi determináns}} \right| dudvdw.}$$

Leggyakrabban használt változó transzformációk

Hengerkoordinátás helyettesítés (L. 22. ábra)



22. ábra. Hengerkoordinátás helyettesítés

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r sin(\varphi) \\ z = z \end{array} \right\}$$

Vagyis a fenti jelölésekkel:

$$G(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z).$$

A hengerkoordinátás helyettesítés Jacobi determinánsának abszolút értéke (meg kell tanulni fejből):

$$|\det(G(r, \varphi, z))| = \left|\det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = r.$$

23. PÉLDA: Legyen S az a test, melyet alulról a $z = 1 - x^2 - y^2$ elliptikus paraboloid határol és amelyet felülről a $z = x^2 + y^2$ elliptikus paraboloid határol. Kérdés:

$$\iiint\limits_S \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dxdydz = ?$$

Megoldás:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1(x, y) = x^2 + y^2 \\ z_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \end{array} \right\}$$

Most megkeressük azt a kört amiben a két parabola metszi egymást, vagyis ahol $z_1(x, y) = z_2(x, y)$:

$$x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}.$$

Ezt vissza helyettesítve akár a z_1 akár a z_2 képletébe kapjuk, hogy a $z_1(x, y)$ és a $z_2(x, y)$ felületek egy olyan $1/\sqrt{2}$ sugarú körben metszik egymást, melynek síkja az xy síkkal párhuzamosan annál 1/2-el magasabban halad. A hengerkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk és felhasználjuk, hogy ekkor

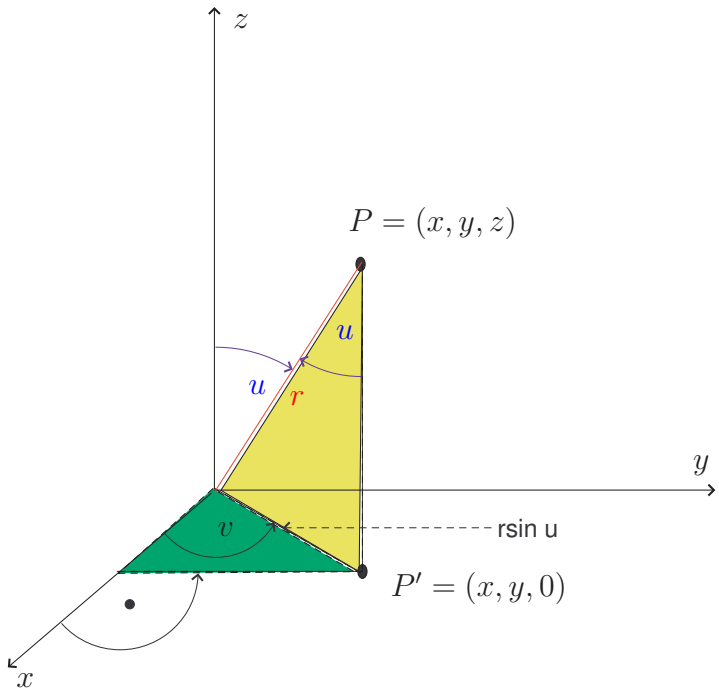
$$x = r\cos\varphi \text{ és } \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Ezzel

$$\iiint\limits_S \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdydz = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{1/\sqrt{2}} \left(\underbrace{\int\limits_{z=r^2}^{1-r^2} \left(1+\frac{r\cos\varphi}{r}\right)\cdot r dz}_{(1-2r^2)(1+\cos(2\varphi))r} \right) dr \right) d\varphi$$

$$= \left(\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (1+\cos\varphi) d\varphi \right) \cdot \left(\int\limits_{r=0}^{1/\sqrt{2}} (1-2r^2) r dr \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Gömbkoordinátás helyettesítés (L. 23. ábra)



23. ábra. Gömbkoordinátás helyettesítés

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos u \end{array} \right\} \tag{2}$$

Vagyis a fenti jelölésekkel:

$$G(r, u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u). \tag{3}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy a Jacobi mátrix abszolút értéke:

$$|\det (G'(r, u, v))| = r^2 \sin u.$$

24. PÉLDA: Legyen S az $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ gömbnek az I. térnyolcadba eső darabja. Vagyis:$x, y, z \geq 0$. Kérdés

$$\iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = ?$$

Megoldás: A gömbkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r.$$

Továbbá vegyük észre, hogy a (2) jelöléseivel:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq \pi/2 \\ 0 \leq v \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 3 \end{array} \right\}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz &= \int\limits_{v=0}^{\pi/2}\int\limits_{u=0}^{\pi/2}\int\limits_{r=0}^{3} \underbrace{r}_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \underbrace{(r^2\sin u)}_{\text{Jacobi det.}} \; drdudv \\
&= \int\limits_{v=0}^{\pi/2} 1dv \cdot \int\limits_{r=0}^{3} r^3dr \cdot \int\limits_{u=0}^{\pi/2} \sin u du \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_{r=0}^{3} r^3dr \cdot \int\limits_{u=0}^{\pi/2} \sin u du \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{81}{4} \cdot 1 \\
&= \frac{81\pi}{8}.
\end{aligned}$$

25. PÉLDA: Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát gömbkoordinátás helyettesítéssel!

Megoldás: Legyen G az origó középpontú R sugarú gömb. Ekkor

$$\begin{aligned}
\text{térfogat}(G) &= \iiint\limits_G 1dxdydz = \int\limits_{v=0}^{2\pi}\left(\int\limits_{u=0}^{\pi}\left(\int\limits_{r=0}^{R} r^2\sin(u)dr\right)du\right)dv \\
&= 2\pi\cdot\underbrace{\int\limits_{u=0}^{\pi}\sin(u)du}_{2}\cdot\underbrace{\int\limits_{r=0}^{R} r^2dr}_{\frac{R^3}{3}} \\
&= 2\pi\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}R^3\pi
\end{aligned}$$

A fentiektől különböző változó transzformációk:

26. PÉLDA: Határozzuk meg az

$$x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2\leq 1$$

ellipszoid térfogatát.

Általánosságban egy $H\subset\mathbb{R}^3$ halmaz térfogata:

$$\text{térfogat}(H) = \iiint\limits_H 1dxdydz. \tag{4}$$

Megoldás: Általánosságban az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ellipszoid esetén a következő változó transzformációt alkalmazzuk:

$$\left\{\begin{array}{l} x = ar\sin u\cos v \\ y = br\sin u\sin v \\ z = cr\cos u \end{array}\right\} \tag{5}$$

Vagyis

$$G(r,u,v) = (ar\sin u\cos v, br\sin u\sin v, cr\cos u),$$

ahol

$$0\leq u\leq\pi,\quad 0\leq v\leq 2\pi,\quad 0\leq r\leq 1.$$

Ebben az esetben könnyű számolással kapjuk, hogy:

$$|\det(G'(r,u,v))| = abcr^2 \sin u.$$

A fenti példa esetén: $a = 1, b = 1, c = 2$. Tehát a Jacobi determináns abszolút értéke a példában: $2r^2 \sin u$.

$$\begin{aligned}
\text{térfogat(ellipszoid)} &= \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^{\pi} \int_{r=0}^{1} 1 \cdot \underbrace{2r^2 \sin u}_{\text{Jacobi det.}} \; dudv \\
&= \int_{v=0}^{2\pi} 1dv \cdot \int_{u=0}^{\pi} \sin u du \cdot \int_{r=0}^{1} 2r^2 dr \\
&= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Alkalmazások

Legyen T egy test, melynek az $(x,y,z) \in T$ pontban a sűrűsége a $\rho(x,y,z)$ függvénnyel adott.

1. Ekkor a T test M tömegét kiszámolhatjuk:

$$M = \iiint_T \rho(x,y,z) dxdydz.$$

2. A T test $S = (s_1, s_2, s_3)$ súlypontjának koordinátái:

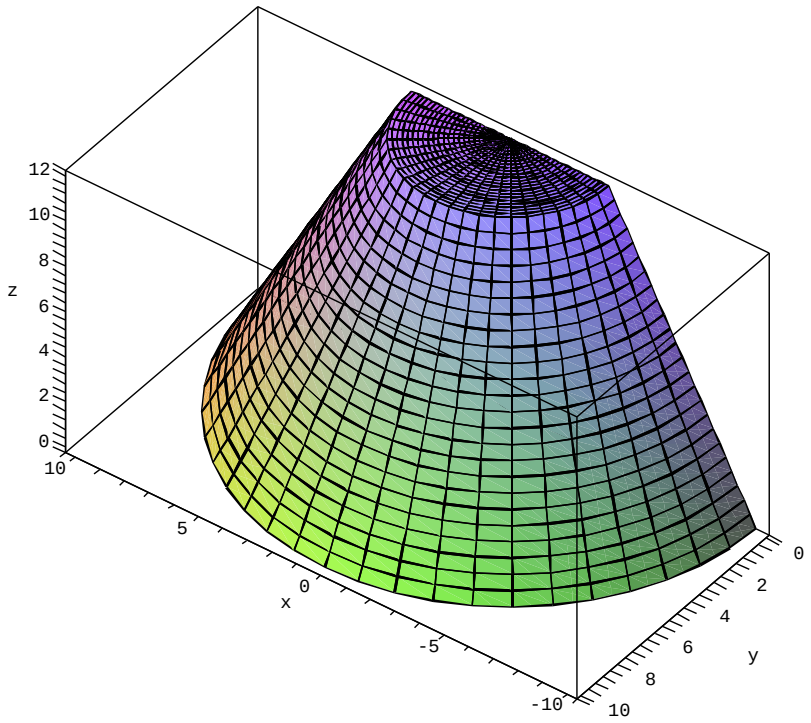
$$s_i = \frac{\iiint_T x_i \cdot \rho(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{M}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

3. A z koordináta tengelyre vonatkozó impulzus momentum:

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \rho(x,y,z) dxdydz.$$

27. PÉLDA: Legyen G egy csonkakúp, melynek alsó és felső fedőlapjának sugara: 10 és 4, magassága pedig 12. A csonkakúp helyezzük el úgy, hogy

alapköre az xy síkon legyen és alapkörének középpontja az origó. Felezzük meg a csonkakúpoz. Vagyis vágjuk szét két egybevágó darabra az xz koordináta síkkal. Az így kapott testet nevezzük T-nek. (L. 24. ábra.) Tegyük fel, hogy T sűrűsége egyenlő 1-el a T minden pontjában. Határozzuk meg a T súlypontjának koordinátáit.



24. ábra. Félbevágott csonka kúp

Megoldás: T-t hengerkoordináta rendszerben megadhatjuk:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 10 - z/2 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 12 \end{array} \right\}.$$

Használva, hogy a hengerkoordinátás helyettesítésnél a Jacobi determináns abszolút értéke r-el egyenlő kapjuk, hogy a T térfogata (és így tömege hiszen a sűrűség egyenlő eggyel:)

$$M = \iiint\limits_T 1 dxdydz = \int\limits_{z=0}^{12} \int\limits_{r=0}^{10-z/2} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} 1 \cdot r d\varphi dr dz = 312\pi.$$

Legyen a súlypont $S = (s_1, s_2, s_3)$. Szimmetriai okokból azonnal látható, hogy $s_1 = 0$. Az s_2 meghatározásához használjuk, hogy a tömeg $M = 312\pi$ és hogy $y = r \cdot \sin\varphi$ továbbá a Jacobi determináns abszolút értéke r-el egyenlő a hengerkoordinátás helyettesítésnél:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{\iiint\limits_T y dxdydz}{312\pi} = \frac{\int\limits_{z=0}^{12} \int\limits_{r=0}^{10-z/2} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{(r \cdot \sin\varphi)}_{y} \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobi det.}} d\varphi dr dz}{312\pi} \\ &= \frac{\underbrace{\int\limits_{z=0}^{12} \int\limits_{r=0}^{10-z/2} r^2 dr dz}_{1624} \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi d\varphi}_{2}}{312\pi} \\ &= \frac{1624 \cdot 2}{312\pi} = \frac{406}{39\pi} = 3.313687532. \end{aligned}$$

Az utolsó előtti lépésben a $\int\limits_{z=0}^{12} \int\limits_{r=0}^{10-z/2} r^2 dr dz = 1624$ számolását megkaphatjuk a következő Maple sorral is:

```
int((int(r^2,r=0..10-z/2)),z=0..12);
```

```
1624
```

Most kiszámoljuk az s_3-at.

$$
\begin{aligned}
s_3 &= \frac{\iiint\limits_T z dxdydz}{312\pi} = \frac{\int\limits_{z=0}^{12}\int\limits_{r=0}^{10-z/2}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} z\cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobi det.}} d\varphi dr dz}{312\pi} \\
&= \frac{\underbrace{\int\limits_{z=0}^{12}\int\limits_{r=0}^{10-z/2} z\cdot r dr dz}_{1368}\cdot\underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} 1 d\varphi}_{\pi}}{312\pi} \\
&= \frac{57}{13} = 4.384615385.
\end{aligned}
$$

Az utolsó előtti lépést a következő Maple sorral számoltuk ki:

```
> int((int(r*z,r=0..10-z/2)),z=0..12);
```

```
1368
```

Tehát a súlypont koordinátái:

$$S = (0, 3.31, 4.38)$$

28. PÉLDA: Határozzuk meg a konstans ρ sűrűségű (tehát homogén) $T := \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \times \left[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right]$ téglatestnek az x-tengelyre vonatkozó impulzus momentumát!

Megoldás: $I_x = \iiint\limits_T (y^2 + z^2)\cdot\rho dxdydz$. Szimmetriai okokból ha

$$T^+ = \left[0, \frac{a}{2}\right] \times \left[0, \frac{b}{2}\right] \times \left[0, \frac{c}{2}\right],$$

akkor

$$I_x = 8\iiint\limits_{T^+} (y^2 + z^2)\cdot\rho dxdydz.$$

$$
\begin{aligned}
I_x &= 8\rho \int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2} (y^2+z^2)dxdydz = 8\frac{a}{2}\rho \int_0^{c/2}\int_0^{b/2} (y^2+z^2)dydz \\
&= 4a\rho \int_0^{c/2} \left[\frac{y^3}{3} + z^2 y\right]_{y=0}^{y=b/2} dz \\
&= 4a\rho \int_0^{c/2} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2}\right) dz \\
&= 4a\rho \left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{c^3 b}{48}\right) = \frac{abc}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2).
\end{aligned}
$$

29. PÉLDA: Egy 2-sugarú gömböt átfúrunk úgy, hogy a fúró középpontja a gömb középpontjától egy egység távolságra halad el. Mekkora a keletkezett test térfogata, ha a fúró keresztmetszetének átmérője 2?

Megoldás: Helyezzük a koordináta rendszer origóját a gömb középpontjába és válasszuk meg a koordináta tengelyeket úgy, hogy a fúró tengelye párhuzamos legyen a z tengellyel és a fúró az xy sík $P = (1, 0)$ középpontú egység sugarú kör lemezére (jelelöljök ezt a körlemezt D-vel) merőlegesen halad. A feladatot úgy oldjuk meg, hogy a gömb térfogatából kivonjuk a fúróval eltávolított rész térfogatát.

$$\text{térfogat gömb} = \frac{4}{3}\cdot 2^3 \cdot \pi = \frac{32\pi}{3}. \tag{6}$$

Most tehát ki kell számolni a fúróval eltávolított térfogatot. Ehhez integrálni kell a $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ függvényt a D körlemez felett. Jelöljük ezt az integrált I-vel. A kifúrt térfogat nyilván $2I$-vel egyenlő.

$$I = \iint_D (\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy.$$

Áttérve polár koordinátákra:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} (\sqrt{4-r^2}) \cdot r dr d\varphi$$

A kettes integrál kiszámítása normáltartományon fejezetben tanult módszerrel a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos\varphi} (\sqrt{4-r^2}) \cdot r dr d\varphi = \frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}. \tag{7}$$

Ezt leellenőrizhetjük, ha a Maple-be a következő kódot beírjuk:

```
> int((int(r*sqrt(4-r^2),r=0..2*cos(phi))),phi=-Pi/2..Pi/2);
```

$$\frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}$$

A gömb térfogata ezen érték duplájával csökken:

$$\text{térfogat(kifúrt gömb)} = \frac{32\pi}{3} - 2\left(\frac{8}{3}\pi - \frac{32}{9}\right) = \frac{16}{3}\pi + \frac{64}{9}.$$

30. PÉLDA: Számítsuk ki a következő felület által bezárt térrész térfogatát (l. 25. ábra)!

$$z = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \tag{8}$$

Megoldás: Nevezzük a fenti térrészt T-nek. Mivel a gömbkoordinátás helyettesítésnél

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

és mivel a feladatban adott felület egyenletének jobb oldalán éppen ez a képlet szerepel kézenfekvő, hogy gömbkoordinátás helyettesítéssel (l. 35. oldal) próbálkozunk. A gömbkoordinátás helyettesítésnél (3) egyenletben vagyis

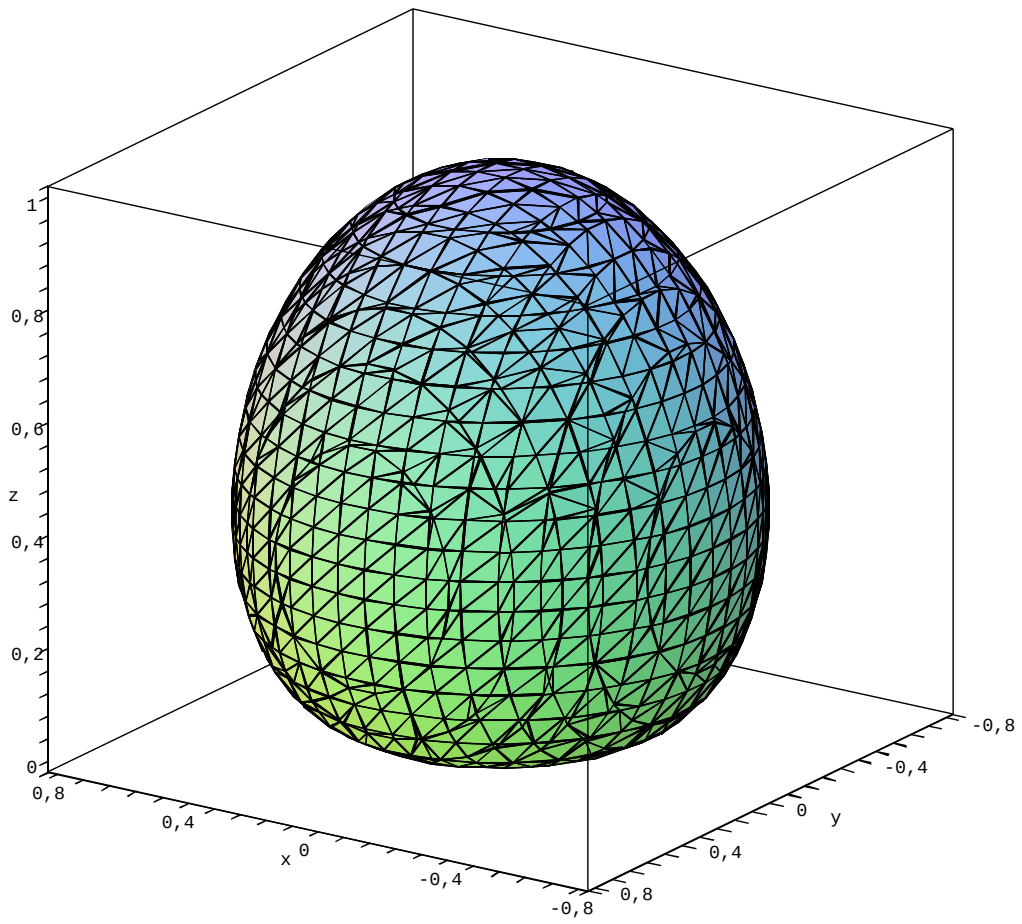
$$G(r,u,v) = (\underbrace{r\sin u\cos v}_{x}, \underbrace{r\sin u\sin v}_{y}, \underbrace{r\cos u}_{z}).$$

A (8) egyenlet gömb koordinátásan:

$$\underbrace{r\cos(u)}_{z} = (\underbrace{r^2}_{x^2+y^2+z^2})^2 = r^4.$$

Vagyis ha $r \neq 0$:

$$r = \sqrt[3]{\cos(u)}. \tag{9}$$



25. ábra. $z = (x^2 + y^2 + z^2)^2$

Itt felhasználtuk, hogy (8)-ből következően $z \geq 0$ tehát $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Vegyük észre, hogy (9) azt is eredményezi, hogy minden origóból induló félegyenesen egyetlen pontban metszi a T testet határoló (8) egyenlettel adott felületet.

A gömbkoordinátás helyettesítésnél az xyz koordináta rendszerbeli T tartománynak megfelelő Γ térrész (l. 21. ábra):

$$\Gamma = \begin{cases} 0 \leq v \leq 2\pi \\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\cos(u)} \end{cases}$$

A T térfogatának meghatározásához tehát gömbkoordinátás helyettesítést kell alkalmazni az

$$I = \text{térfogat}(T) = \iiint\limits_T 1 dxdydz$$

hármas integrálban. Vagyis $f(x, y, z) = 1$ függvényre alkalmazni kell a

$$\boxed{\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_\Gamma f(G(u, v, w)) \left| \underbrace{\det(G'(u, v, w))}_{\text{Jacobi determináns}} \right| dudvdw.}$$

szabályt. Emlékezzünk, hogy gömbkoordinátás helyettesítés esetén a Jacobi determináns: $r^2 \sin(u)$. Ezzel

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_T 1 dxdydz = \iiint\limits_\Gamma 1 \cdot \underbrace{r^2 \sin(u)}_{\text{Jacobi determináns}} drdudv \\ &= \int\limits_{v=0}^{2\pi} \left(\int\limits_{u=0}^{\pi/2} \left(\int\limits_{r=0}^{\sqrt[3]{\cos(u)}} 1 \cdot r^2 \sin(u) dr \right) du \right) dv = \cdots = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

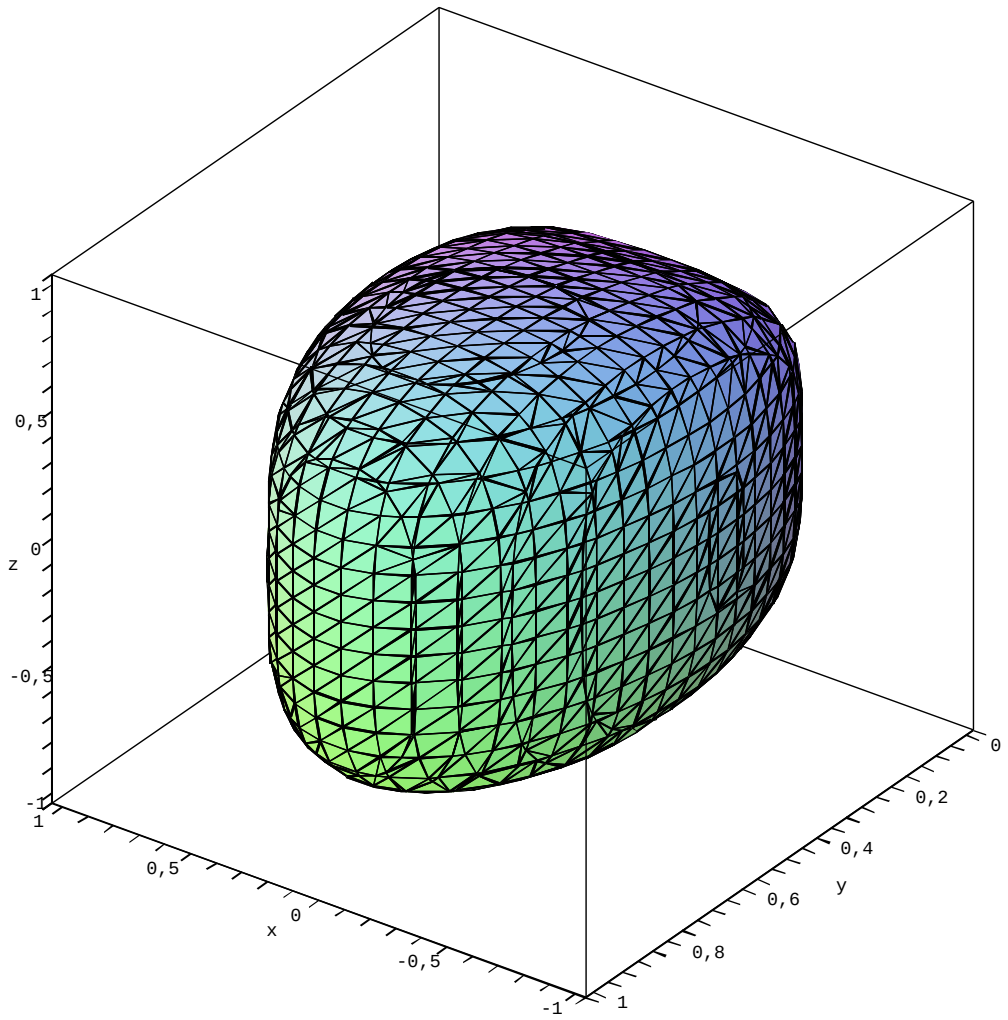
A fenti integrálást a következő Maple kód azonnal elvégzi:

```
> int((int((int(r^2*sin(u),r=0..(cos(u))^(1/3))),u=0..Pi/2)),v=0..2*Pi);
```

$$\frac{\pi}{3}$$

31. PÉLDA: Számítsuk ki a következő felület által határolt test térfogatát! (L. 26. ábra.)

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + z^4 = y. \tag{10}$$



26. ábra. $\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=y$

Megoldás: Megintcsak nevezzük a felület által határolt testet T-nek és megintcsak gömbkoordinátákra célszerű áttérni. Ekkor ugyanis

$$\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=r^4(\sin^4(u)+\cos^4(u)), \qquad y=r\sin(u)\sin(v).$$

Vagyis

$$r^4(\sin^4(u)+\cos^4(u)) = r\sin(u)\sin(v). \tag{11}$$

Innen

$$r = \sqrt[3]{\frac{\sin(u)\sin(v)}{\sin^4(u)+\cos^4(u)}}. \tag{12}$$

Vegyük észre (10) egyenletből, hogy $y \geq 0$ mindig teljesül, ami gömbkoordináták esetén azt jelenti, hogy $0 \leq v \leq \pi$. Tehát a gömbkoordinátás helyettesítésnél a T tartomány átmegy a

$$\Gamma = \begin{cases} 0 \leq v \leq \pi \\ 0 \leq u \leq \pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{\sin(u)\sin(v)}{\sin^4(u)+\cos^4(u)}}. \end{cases}$$

A T térfogatának meghatározásához tehát gömbkoordinátás helyettesítést kell alkalmazni az

$$I = \text{térfogat}(T) = \iiint\limits_T 1 dxdydz$$

hármas integrálban. Vagyis $f(x,y,z) = 1$ függvényre alkalmazni kell a

$$\boxed{\iiint\limits_T f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_\Gamma f(G(u,v,w)) \left| \underbrace{\det(G'(u,v,w))}_{\text{Jacobi determináns}} \right| dudvdw.}$$

szabályt. Emlékezzünk, hogy gömbkoordinátás helyettesítés esetén a Jacobi determináns: $r^2\sin(u)$. Az egyszerűbb jelölések érdekében írjunk:

$$\varphi(u,v) := \sqrt[3]{\frac{\sin(u)\sin(v)}{\sin^4(u)+\cos^4(u)}}.$$

Ezzel

$$I = \int\limits_{v=0}^{\pi} \left(\int\limits_{u=0}^{\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{\varphi(u,v)} 1 \cdot r^2 \sin(u) dr \right) du \right) dv.$$

Ezt kibontva kapjuk, hogy

$$I = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\int_{v=0}^{\pi} \sin(v)dv}_{2} \cdot \underbrace{\int_{u=0}^{\pi} \frac{\sin^2(u)}{\sin^4(u) + \cos^4(u)} du}_{\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{2}}.$$

Ugyanis Maple használatával:

```
> int((sin(u))^2/((sin(u))^4+(cos(u))^4),u=0..Pi);
```

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{2}.$$

Tehát a keresett térfogat:

$$I = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{3}.$$

32. PÉLDA: Határozzuk meg annak a térrésznek a térfogatát, melyet a következő három felület határol (l. 27. ábra):

$$x^2 + y^2 = z, \qquad x^4 + y^4 = x^2 + y^2, \qquad z = 0.$$

Megoldás: Nevezzük a fent leírt testet megint T-nek. T térfogatát nyílván a

$$\text{térfogat}(T) = \iiint_T 1 dxdydz$$

formulával igyekszünk meghatározni. Ehhez használjunk hengerkoordinátás helyettesítést! Vagyis most

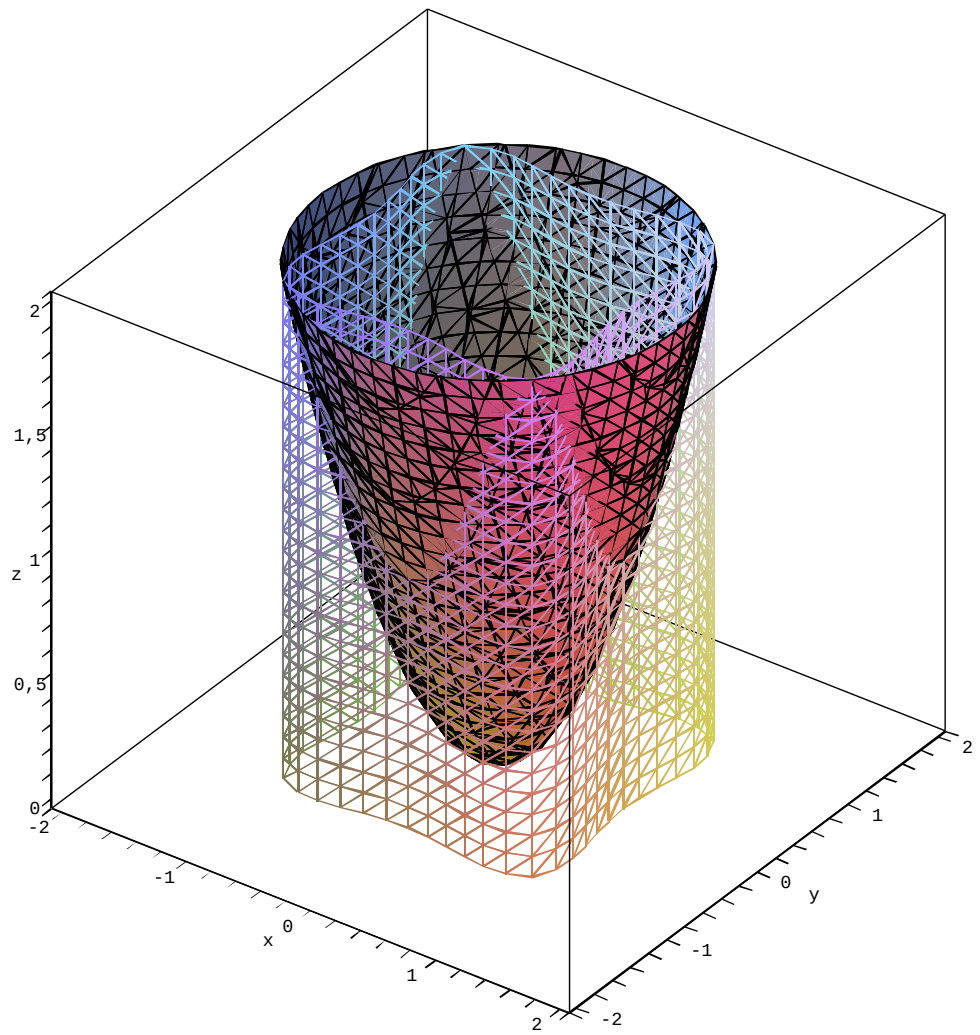
$$G(r, \varphi, z) = (\underbrace{r \cos \varphi}_{x}, \underbrace{r \sin \varphi}_{y}, z).$$

és a Jacobi determináns abszolút értéke r, továbbá $r^2 = x^2 + y^2$. Először felírjuk az xy síkon az $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ görbét polárkoordinátásan:

$$r^4(\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)) = r^2,$$

vagyis:

$$r = \sqrt{\frac{1}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)}}. \tag{13}$$



27. ábra. $x^2 + y^2 = z, \qquad x^4 + y^4 = x^2 + y^2, \qquad z = 0.$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be a

$$g(\varphi) := \sqrt{\frac{1}{\cos^4(\varphi) + \sin^4(\varphi)}}$$

jelölést. Ekkor tehát a T test a hengerkoordinátás helyettesítésnél átmegy a

$$\Gamma = \begin{cases} 0 \leq v \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq g(\varphi) \\ 0 \leq z \leq r^2. \end{cases}$$

A legutolsó határ abból származik, hogy minden x, y-ra a z a 0 és az $x^2+y^2 = r^2$ között fut. Vagyis a T test térfogata:

$$\begin{aligned} \iiint\limits_T 1 dxdydz &= \iiint\limits_\Gamma 1 \cdot rdrd\varphi dz \\ &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int\limits_{r=0}^{g(\varphi)} \left(\int\limits_{z=0}^{r^2} 1 \cdot rdz \right) dr \right) d\varphi \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{4}. \end{aligned}$$

Ezt Maple-el a következő kóddal kapjuk:

```
> g:=t->1/(sqrt((cos(t))^4+(sin(t))^4)):
> int((int((int(r,z=0..r^2)),r=0..g(t))),t=0..2*Pi);
```

$$\frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi}{4}$$

33. PÉLDA: Határozzuk meg a

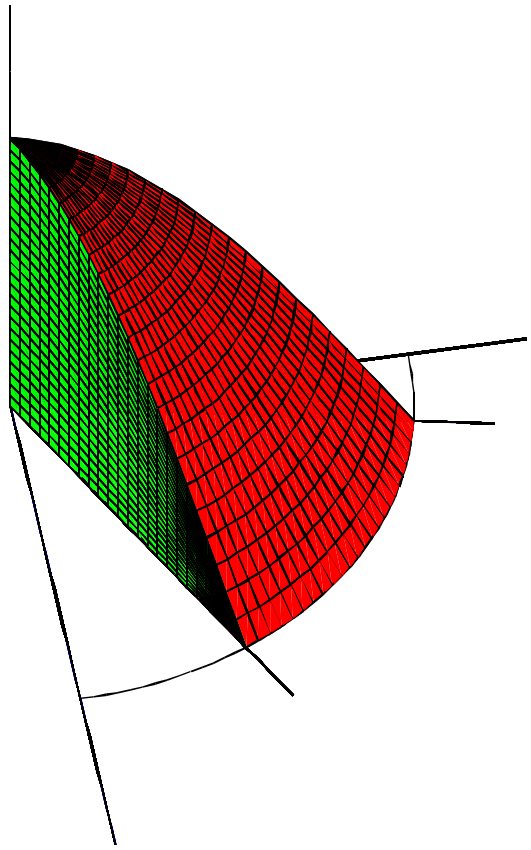
$$z = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right), \ z = 0, \ y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right), \ y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

felületek által közrezárt tartomány (l. 29. ábra) térfogatát!

Megoldás: Vegyük észre először is, hogy $\mathbb{R}^3$-ban az

$$y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right), \ y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

egyenletek olyan síkokat határoznak meg, melyek merőlegesek az xy síkra. Ugyanis az mindenkinek világos, hogy az xy síkban ezen egyenletek origón



28. ábra. $z = \cos(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}),\ z = 0,\ y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right),\ y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

átmenő egyeneseket adnak. Az $\mathbb{R}^3$-ban viszont ez azt jelenti, hogy mivel ezen egyenletekben nincs feltétel (vagyis megszorítás) a z változóra ezért a fenti egyenletek által az xy síkban adott egyenesek "felett" minden pont megfelel így ezen egyenletek a $\mathbb{R}^3$-ban síkokat határoznak meg. A 29. ábrán zöld

színnel van rajzolva az $y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right)$ síknak a $z = 0$ és $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right)$ felületek közötti részének pozitív térnyolcadba eső része. Az ábráról látszik, hogy a T testnek **az xy síkba eső rész**e az origó középpontú egység sugarú körnek az $y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right)$, $y = x \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ egyenesek közé eső körcikke. Az egység kör úgy jelenik meg, hogy a $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$ az egységkörön. Tehát hengerkoordinátás helyettesítést alkalmazva a T tartománynak megfelel:

$$\Gamma = \begin{cases} \frac{\pi}{7} \le \varphi \le \frac{3\pi}{7} \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right). \end{cases}$$

Mivel a Jacobi determináns abszolút értéke hengerkoordinátás helyettesítésnél r ezért

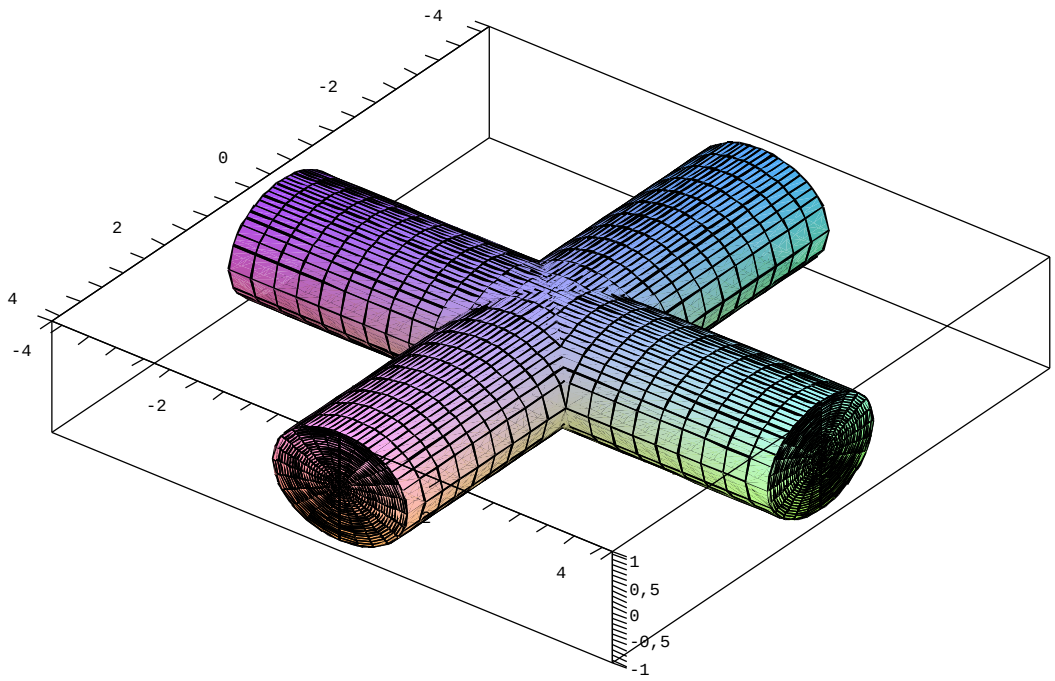
$$\begin{aligned} \text{térfogat}(T) &= \iiint\limits_T 1 dxdydz \\ &= \iiint\limits_\Gamma r dzdrd\varphi = \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{7}}^{\frac{3\pi}{7}} \left(\int\limits_{r=0}^{1} \left(\int\limits_{z=0}^{\cos(r\cdot\pi/2)} 1 \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobi det.}} dz \right) dr \right) d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{7} \underbrace{\int\limits_{r=0}^{1} r \cdot \cos(r \cdot \pi/2) dr}_{\frac{2(\pi-2)}{\pi^2}} = \frac{4(\pi-2)}{7\pi}. \end{aligned}$$

Ez utóbbi integrál kiszámítása A1-be tartozó tananyag (parciális integrálás). Az eredményt a következő Maple kód is megadja:

```
> int(x*cos(x*Pi/2),x=0..1);
```

$$\frac{2(\pi-2)}{\pi^2}$$

34. PÉLDA: Határozzuk meg a 29. ábrán látható kereszt térfogatát. A keresztet alkotó, egymást merőlegesen metsző rudak olyan tömör hengerek, amelyek alapkörének sugara 1 és magasságuk 8 egység.



29. ábra. A kereszt mindkét rúdjának sugara 1 és hossza 8.

Megoldás: Mindegyik rúd térfogata külön-külön 8π Tehát

$$\text{térfogat(kereszt)} = 2 \cdot 8\pi - \text{ térfogat(rudak metszete)} \ , \tag{14}$$

hiszen a 16π-ben a rudak metszetét mindegyik rúdban figyelembe vettük ezért ezt le kell vonni. A továbbiakban tehát azt a kérdést válaszoljuk meg,

hogy

$$\text{térfogat(rudak metszete)} = ?$$

Vegyük fel a koordináta rendszerünket úgy, hogy annak origója a kereszt centruma legyen, az x és az y koordináta tengelyek pedig a kereszt rúdjainak közép vonalai. Vegyük észre, hogy minden $-1 < z_0 < 1$-re a rudak metszetének a $z = z_0$ síkkal vett metszete egy négyzet, melynek oldala (Pitagorasz tétel miatt)

$$2 \cdot \sqrt{1 - z_0^2}.$$

Tehát ezen szám négyzete: $4(1 - z_0^2)$ lesz a rudak metszetének $z = z_0$ síkba eső részének területe. Így ezt a $4(1 - z_0^2)$ értéket kell integrálni amint z_0 fut -1-től 1-ig, hogy megkapjuk a rudak metszetének térfogatát:

$$\begin{aligned} \text{térfogat(rudak metszete)} &= \int_{z=-1}^{1} 4(1 - z^2)dz \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Ezt a nagyon könnyű integrált a következő Maple kód is megadja:

```
> int(4*(1-z^2),z=-1..1);
```

$$\frac{16}{3}$$

Tehát

$$\text{térfogat(kereszt)} = 2 \cdot 8\pi - \frac{16}{3} = 19.79940790.$$