Feladatok

1. Lineáris algebra

1. Oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő egyenletrendszereket:

$$
\begin{aligned}
5x + 4z + 2t &= 3 \\
x - y + 2z + t &= 1 \\
4x + y + 2z &= 1 \\
x + y + z + t &= 0
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
x_1 + ix_2 - x_3 &= -i \\
x_1 + (1+i)x_2 + 2ix_3 &= -2 + 2i \\
x_1 + (1-i)x_2 - 2ix_3 &= -2 - 2i
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\
-x_1 + x_2 - 6x_4 + x_5 &= 0 \\
3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\
2x_3 - 7x_4 + 7x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

4. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy a következő egyenletrendszernek legyen a triviálistól különböző megoldása:

$$
\begin{aligned}
x_1 + ix_2 - x_3 &= 0 \\
x_1 + (1+i)x_2 + 2ix_3 &= 0 \\
x_1 + (1-i)x_2 + ax_3 &= 0
\end{aligned}
$$

5. Számítsuk ki a következő determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} i & i & i \\ i & 2+2i & i \\ i & i & 1+3i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

6. Oljuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z &= 9 \\ 8x - 7y + 3z &= 6 \\ 2x + 5y + z &= 5 \end{aligned}$$

7. Keressünk maximális lineárisan független rendszert a következő vektorok között. Írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációiként:

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_4} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

8. Lineárisan függetlenek-e a következő vektor-hármasok?

(a)

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2-i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}.$$

9. Felírható-e a $\mathbf{b}$ vektor az $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ vektorok lineáris kombinációjaként? Írjuk fel, ha igen.

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2i \\ -2+2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 1-i \\ -2i \\ -2-2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix}.$$

10. Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ következő bázisát: $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, ahol

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Írjuk fel a $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$ vektor koordinátáit B bázisban.

(b) Az $\mathbf{u}$ vektor koordinátái a B bázisban: $[\mathbf{u}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$. Írjuk fel $\mathbf{u}$-t a természetes bázisban.

11. Tekintsük $\mathbb{R}^2$ következő bázisait: $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, $B' = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, ahol

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 15 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$[\mathbf{a}]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$. Írjuk fel $[\mathbf{a}]_{B'}$-t.

12. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-nek azt az A lineáris transzformációját, amely minden vektort levetít az xy síkra. Határozzuk meg A mátrixát a természetes bázisban.

13. Írjuk fel annak a valós háromdimenziós vektortéren értelmezett lineáris transzformációnak a mátrixát, amely a természetes bázis **i**, **j**, **k** bázisvektorait rendre az

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vektorokba viszi át.

14. Írjuk fel a következő lineáris transzformáció mátrixát (a természetes bázisban): $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3)$.

15. Legyen A az a lineáris transzformáció, amely $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokat rendre az $\mathbf{y_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorokba viszi. Adjuk meg A mátrixát az $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$ bázisban.

16. Legyen a $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixa a $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$. Írjuk fel T mátrixát
    (a) a természetes bázisban,
    (b) a $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban.

17. Határozzuk meg a háromdimenziós térben az
    (a) $5x - 6y + z = 0$ egyenletű S síkra
    (b) $x + 5y - 2z = 0$ egyenletű T síkra

    való merőleges vetítés mátrixát. Ennek alapján számítsuk ki a $P = (8, 1, 3)$ pont S-re, illetve T-re való merőleges vetületét.

18. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:
    (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$
    (b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
    (c) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. Diagonalizáljuk az $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot.

20. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} -3 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$ mátrix spektrál-felbontását.

21. Adjuk meg $\mathbb{R}^4$ $\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorai által kifeszített alterének egy ortonormált bázisát.

22. Határozzuk meg azt a legfeljebb harmadfokú polinomot, amely illeszkedik a $(-3,2),(-1,4),(1,3),(2,0)$ pontokra.

23. A legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg azt az egyenest, amely a legjobban illeszkedik a

    (a) $(-2,6),(-1,5),(0,1),(3,-4)$ pontokra,

    (b) $(-2,0),(1,7),(2,10),(3,10),(4,17)$ pontokra.

24. Határozzuk meg az $Ax=b$ egyenlet legkisebb négyzetes megoldását, és adjuk meg a legkisebb négyzetes hibát, ha

    (a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$,

    (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

25. Határozzuk meg az

    (a) $A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

    (b) $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

    (c) $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

    mátrixok szinguláris érték felbontását.

26. Határozzuk meg az előző feladatbeli A és B mátrixok poláris felbontását.

27. Legyen $A=\begin{bmatrix} -\frac{13}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{14}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -13 & 20 \\ -\frac{15}{2} & 12 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az e^{2A}, e^{-3B} mátrixokat.

2. Parciális differenciálegyenletek

28. Határozzuk meg az alábbi 2π-periodikus függvények Fourier-sorát:

    (a) $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{, ha } 0<x<\pi \\ 0 & \text{, ha } x\in\{-\pi,0,\pi\} \\ -1 & \text{, ha } \pi<x<0 \end{cases}$

    (b) $g(x)=|\sin x|,\ -\pi\le x\le\pi$

    (c) $h(x)=\pi-\frac{x^2}{\pi}$

29. Határozzuk meg a 8 periódusú $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{, ha } -4\le x<-2 \\ 0 & \text{, ha } -2\le x<2 \\ 2 & \text{, ha } 2\le x<4 \end{cases}$ függvény Fourier-sorát.

30. Határozzuk meg az $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sorát a $[0,\pi]$ intervallumon.

31. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sorát a $[0,2]$ intervallumon.

32. Az előző feladatok eredményeit és a jegyzet 70-71. oldalán kiszámolt Fourier-sorokat felhasználva oldjuk meg a következő problémákat Bernoulli módszerével.

(a) $$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t \\ u(x,0) = \frac{\pi - x}{2}, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, & 0 < x < 5,\ 0 < t \\ u(x,0) = 3x, & 0 \le x \le 5 \\ u_t(x,0) = \cos(\frac{3\pi}{5}x)\sin(\pi x), & 0 < x < 5 \\ u(0,t) = u(5,t) = 0, & 0 \le t \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, & 0 < x < 2,\ 0 < t \\ u(x,0) = \sin(\frac{3\pi}{2}x), & 0 \le x \le 2 \\ u_t(x,0) = x^2, & 0 < x < 2 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, & 0 \le t \end{cases}$$

A 33-36. feladatokhoz használjuk D'Alembert módszerét.

33. Egy, a $[0,6]$ intervallum két végén rögzített húr mozgását az $u_{tt} = 4u_{xx}$ differenciálegyenlet írja le. A húrt lefogjuk a $(2,3)$ és a $(3,3)$ pontokban, majd a $t = 0$ időpontban elengedjük. Adjuk meg a húr alakját a $t = 1,5$ pillanatban.

34. Egy, a $[0,2]$ intervallum két végén rögzített húr mozgását az $u_{tt} = 16u_{xx}$ differenciálegyenlet írja le. A húr kezdetben egyenes. A $t = 0$ időpontban $g(x) = 3x - 2$ $(0 \le x \le 2)$ szerinti kezdősebességet adunk neki. Adjuk meg az alakját a $t = \frac{1}{4}$ időpontban.

35. Egy végtelen hosszú (az x tengelyen fekvő) feszes húrt lefogunk a $(-5,0)$, $(-3,2)$, $(1,2)$, $(2,0)$ pontokban, majd a $t = 0$ időpontban elengedjük. A húr kitérését az $u_{tt} = u_{xx}$ differenciálegyenlet írja le. Adjuk meg a húr alakját a $t = 5$ időpontban.

36. Egy végtelen húr rezgését a következő rendszer írja le:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} \\ u(x,0) = \cos(3x) \\ u_t(x,0) = \frac{6x}{x^2+1} \end{cases}$$

Adjuk meg a húr alakját a t időpontban.

37. Oldjuk meg a következő hővezetési egyenleteket:

(a)

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx}, \quad 0 \le x \le 2 \\ u(x,0) = \sin(4\pi x)\cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \quad 0 \le x \le 3 \\ u(x,0) = x(3-x) \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 \end{cases}$$

3. Vektoranalízis

38. Határozzuk meg az alábbi vektorterek megadott görbe menti integrálját. (Ahol szerepel paraméterezés, ott a görbéket növekvő paraméterértékek irányába futjuk be.)

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - x^2, 2yz, -x^2)$; $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$.

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y, x - z, y - x)$; az integrálás útja: $A(0, 0, 0) \to B(1, 1, 1)$.

    (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2, 0)$; az $y = 2 - 3x, z = 0$ egyenes mentén, $0 \le x \le 1$.

    (e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$; az integrálás útja: $A(1, 0, 0) \to B(0, 0, 1) \to C(0, 1, 0)$.

    (f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz + y, yz - x, -x^2 - y^2)$; az integrálás útja: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$ kör pozitív körüljárással.

39. Határozzuk meg az alábbi vektorterek felületmenti integrálját a megadott felületdarabok mentén. (A normálist zárt felület esetén kifelé irányítsuk, egyébként pedig felfelé.)

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$; $\mathbf{r}(u, v) = (4\cos u \cos v, 4\cos u \sin v, 4\sin u)$, $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$.

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 2x + y, z)$; $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v, -v, u^2 + 3v)$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 1$.

    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$; a felület az xz síkbeli $(3, 0)$ középpontú egységsugarú kör z tengely körüli megforgatásával keletkező tórusz $z = 0$ sík feletti darabja.

40. Számítsuk ki az alábbi vektorterek divergenciáját és rotációját.

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, xz, yz)$

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, xz)$

    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(x^2yz), \sin(xy^2z), \sin(xyz^2))$

    (d) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ állandó)

41. Döntsük el a curl-teszt alapján (ha ez lehetséges), hogy az alábbi vektorterek konzervatívak-e, és ha igen, adjunk meg potenciálfüggvényt.

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{1}{x+y+z}, \frac{1}{x+y+z}, \frac{1}{x+y+z})$

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos(x + y) - \sin(x - y), \cos(x + y) + \sin(x - y), 0)$

    (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - z^2 - yz, x^2 + z^2 - xz, 2yz - 2xz - xy)$

42. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ vektortér $\mathbf{r}(t) = (a\sin^2 t, 2a\sin t\cos t, a\cos^2 t)$, $0 \le e \le \frac{\pi}{4}$ görbe menti integrálját. (Használjunk potenciálfüggvényt.)

43. Számítsuk ki az alábbi vektorterek megadott felületmenti integrálját a Gauss-tétel segítségével.

    (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$, a felület: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

    (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$, a felület a $-2 \le x \le 7$, $3 \le y \le 4$, $-8 \le z \le -1$ téglatest felülete leszámítva az $x = -2$ síkba eső lapját.

44. A Stokes-tétel segítségével számítsuk ki az $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y + e^x \sin z, \frac{x^3}{3} - e^{yz}, \sin(xyz))$ vektortér integrálját az xy síkban fekvő $(3, 2)$ középpontú, 6 sugarú kör mentén.

45. Számítsuk ki az $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, 3xy)$ vektortér integrálját az origó közepű, 1 sugarú, felső félsíkban lévő félkör határa mentén (pozitív irányítással) a Green-tétel segítségével.

46. Használjuk a Green-tételt a következő görbe és az x tengely által határolt terület kiszámítására: $\mathbf{r}(t) = (R(t - \sin t), R(1 - \cos t))$; $0 \le t \le 2\pi$ (ciklois).