7, Ha tudjuk, hogy $\nabla \cdot \overline{F} = 0$ és $\nabla \cdot \overline{G} = 0$ akkor a következő vektorterek közül melyek azok amiknek a divergenciája biztosan zérus:

a, $\overline{F} + \overline{G}$; b, $\overline{F} \times \overline{G}$; c, $(\overline{F} \cdot \overline{G})\overline{F}$

8, Legyen $g(x,y,z) = x^3 + y + z^2$ és $\overline{F}(x,y,z) = (2xz, \sin y, e^y)$.

Határozzuk meg: (Ha értelmes, ha nem írjuk azt, hogy értelmetlen)

a, $\operatorname{grad} g$; b, $\operatorname{div} g$

c, $\operatorname{div} \vec{F}$; d, $\nabla \times \vec{F}$ e, $\nabla \cdot (\nabla g)$

f, $\nabla \times (\nabla g)$ g, $\operatorname{div}(\nabla \times \vec{F})$

1, Irja fel a $\iint_T f(x,y)\,dx\,dy$ kettős integrálban az integrálás határait, ha először x szerint, ~~autó-n~~ pedig y szerint integrálunk (majd fordítva) és a T tartomány:

a, $x^2 + y^2 \le 9$,

b, $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 12$ egyenesek által határolt háromszög,

c, $y = x^2 - 3x$, $y = 9 - x^2$ görbék által határolt síkrész.

d, $y = \sin x$ és $y = 2\sin\frac{x}{2}$ görbék által határolt végessíkrész, ha $0 \le x \le 2\pi$.
(~~itt~~ csak az egyszerűbb integrált írjuk fel)

lehet a dolgozatban. e, $y^2 \le 8x$, $y \le 2x$, $y + 4x - 24 \le 0$ görbék által határolt végessíkrész.

(1)

2.) Vázolja az alábbi kettős integrálok integrálási tartományát:

a.) $\int_{y=0}^{2}\int_{x=y-1}^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy$ b.) $\int_{x=0}^{4}\int_{y=0}^{4x-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

c.) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=-x}^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$ d.) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

e.) $\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\varphi} f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$ f.) $\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=0}^{2\cos\varphi} f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi$

3.) Számítsuk ki a következő kettős integrálokat.

a.) $\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1} e^{x+y}\,dx\,dy$ b.) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+y^2}\,dy\,dx$

c.) $\int_{y=0}^{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin(x+y)\,dx\,dy$ d.) $\int_{y=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_{x=0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} xy\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$

4.) Számítsuk ki az $\iint_A \cos(x+y)\,dx\,dy = ?$, ha az A az $y=x$, $y=-x$ és $x=2$ egyenletű egyenesek által közrezárt tartomány.

5.) Legyen $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1$ és $x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

~~Kérdés~~: $\iint_A (x^2+y^2+1)\,dx\,dy = ?$

Írje le az integrálás határait

6.) Legyen A az a háromszög melynek csúcsai: $P_1(1,0)$; $P_2(3,2)$; $P_3(4,-1)$. Kérdés:

$$\iint_A \frac{dx\,dy}{x^2+2x+2} = ?$$

7.) Számoljuk ki az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$, $a>0$, $b>0$ ellipszislemez területét kettős integrál segítségével.

8.) Határozzuk meg a következő hármasintegrálokat és írjuk le az integrálási tartomány alakját is.

a.) $\int_{x=0}^{1}\int_{y=1}^{2}\int_{z=2}^{3} \frac{ze^x}{y}\,dz\,dy\,dx$

1, A következő feladatokban számítsuk ki az adott kettős integrálokat polárkoordinátás transzformációval:

a., $\displaystyle\int_{x=0}^{R}\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy\,dx\,, \quad R>0$

b., $\displaystyle\int_{x=0}^{R}\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (1-2x-3y)\,dy\,dx\,, \quad R>0$

c., $\displaystyle\iint_A (x^2+2y^2)\,dx\,dy$, ahol $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 4\}$.

d., $\displaystyle\iint_A \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, ahol A az origó középpontú egységsugarú kör negyedik síknegyedbe eső része.

e., $\displaystyle\iint_A \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$; ahol $A=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le x\sqrt{3}\}$

2, Transzformációval számoljuk ki a következő kettős integrálokat:

a., $\displaystyle\iint_A x\,dx\,dy$, ahol A a következő egyenesek által határolt síkidom:

$y=x-1,\quad y=x,\quad y=-x+1$ és $y=-x+2$

b., $\displaystyle\iint_A xy\,dx\,dy$, ahol A az alábbi egyenlőtlenségek megadott tartomány:

$x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 2,\ x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 9$

c., $\displaystyle\iint_A xy\,dx\,dy$, ahol $A=\{(x,y)\mid 1\le x\le 3,\ 0\le y\le \frac{4}{x}\}$

(használjuk a $\left.\begin{matrix}x=t\\ xy=u\end{matrix}\right\}$ transzformációt).

d., $\displaystyle\iint_{A\cap B} \frac{x^2}{y}\,dx\,dy$ ahol: $A=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ \sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}\}$,

$B=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ \frac{x^2}{4}\le y\le x^2\}$.

e., $\displaystyle\iint_{M_1\cap M_2} \frac{x^2\sin 2xy}{y}\,dx\,dy$, ahol $M_1=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ \frac{x^2}{4}\le y\le x^2\}$

$M_2=\{(x,y)\mid x>0,\ \frac{1}{x}\le y\le \frac{4}{x}\}$

b.) $\int_{x=1}^{3} \int_{y=0}^{5} \int_{z=-1}^{0} \left(\frac{1}{x}+y+z^2\right) dz\,dy\,dx$

c.) $\int_{y=0}^{3} \int_{x=0}^{6-2y} \int_{z=0}^{\frac{6-2y-x}{3}} y \; dz\,dx\,dy$

d.) $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1+x+y} dz\,dy\,dx$

9.) Számítsuk ki az $\iiint_S f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = ?$ ha:

a.) $f(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$; Az S az a test amit az 'xy', 'xz' koordináta síkok és a következő síkok határolnak: $y=2$, $x=1$, $x=4$ és $z=5$.

b.) $f(x,y,z) = xy$; Az S az a test amit a koordináta síkok és az $x+2y+4z=8$ sík határolt.

10.) Hármas integrál segítségével határozzuk meg a következő térfogatokat:

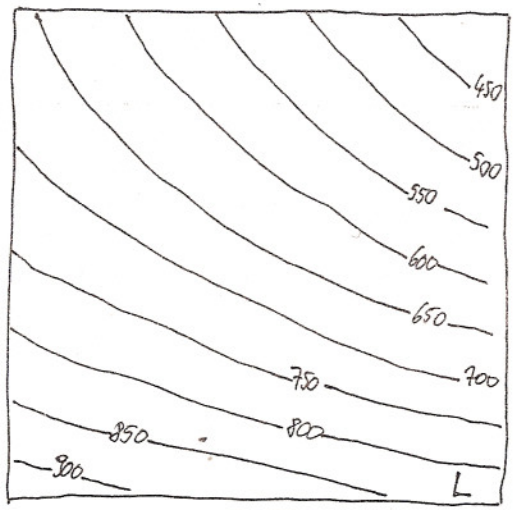
(a) tetraéder melyet a koordináta síkok és a $x+y+z=1$ sík határol.

! (b) Az $x^2+y^2=a^2$ és az $x^2+z^2=a^2$ hengerek metszete, ahol $a>0$ tetszőleges szám.

11.) A következő feladatban határozzuk meg az adott sűrűségfüggvényű adott test tömegét:

a.) A test a 10. a.) feladatban adott tetraéder a sűrűség: $\rho(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$.

12.)



Ez itt egy négyzet alakú térképrészlet. 1cm az ábrán megfelel 100m-nek a valóságban.

a.) Becsüljük meg az átlagos tengerszint feletti magasságot.

3. Számítsuk ki a következő improprius kettős integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} e^{1-2x-3y}\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} xy\,e^{-x^2-y^2+2x-1}\,dx\,dy$

c) $\displaystyle\int_{x=-\infty}^{0}\int_{y=0}^{\infty} x^2 e^{2x-y}\,dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2xy-2y^2}\,dx\,dy$

e) $\displaystyle\int_{y=1}^{2}\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x^2y^2-2x^2y+x^2}\,dx\,dy.$

4. Oldjuk meg a következő feladatokat henger koordinátás helyettesítéssel:

a) $\displaystyle\iiint_S \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx\,dy\,dz=?$ ha S az a test melyet a $z=x^2+y^2$; $z=1-x^2-y^2$ paraboloidok határolnak.

b) hármas

$\displaystyle\int_{x=-1}^{0}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=-1}^{3-x^2-y^2} z\,dz\,dy\,dx=?$

c) $\displaystyle\int_{x=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{y=x}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=x^2+y^2-1}^{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx=?$

5. Oldjuk meg a következő feladatokat gömb koordinátás helyettesítéssel:

a) $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=?$ ahol S az a test ami az első térnyolcadban van és a koordináta síkok és a $x^2+y^2+z^2=9$ gömb határolják

b) $\displaystyle\iiint_S (x+y)\,dx\,dy\,dz=?$ ahol S az a test amit felülről az $x^2+y^2+z^2=16$ gömb alulról a $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ kúp határol.

c) $\displaystyle\int_{y=-2}^{2}\int_{z=-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x=\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy\,dz=?$

d., $\displaystyle\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx = ?$

6., Oldjuk meg a következő feladatokat megfelelő helyettesítéssel:

a., $\displaystyle\iiint_S (x+z)^2\,dx\,dy\,dz = ?$ ahol az S testet a következő síkok határolják:

$x+y+3z=0$; $x+y+3z=1$; $y+z=0$; $y+z=1$;

$x+z=-1$; $x+z=1$.

b., $\displaystyle\iiint_S \cos y\,dx\,dy\,dz = ?$ ahol S az a test amit a következő felületek határolnak:

$z=\sin y+1$; $z=\sin y-1$; $y=0$; $y=\frac{\pi}{2}$; $x+z=0$;

$x+z=1$.

c., Legyen $S=\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le a(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \le \frac{h}{a}\}$.

Legyen V az a test amit úgy kapunk, hogy az S-ből kidobjuk azt a hengert melynek tengelye a 'z' tengely és sugara R?

d., Dobjunk ki egy R sugarú gömbből egy olyan hengert melynek tengelye áthalad a gömb középpontján és melynek sugara r. Mi lesz az így keletkező test térfogata?

c., $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz = ?$