Kvadratikus alakok gyakorlás.

Kúpszeletek:

Adott egy kvadratikus alak a következő formában:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + k_1x + k_2y + d = 0, \qquad a, b, c, k_1, k_2, d \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ezt felírhatjuk a $\boxed{\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + d = 0}$ alakban, ahol

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + d = 0 \tag{2}$$

I. lépés: Meghatározzuk az A mátrixnak a λ_1, λ_2 sajátértékeit és a hozzájuk tartozó **egység hosszú** $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ sajátvektorokat úgy választjuk, hogy hogy a $Q := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ mátrixra: $\det(Q) = 1$.

II. lépés: Jelöljük az $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektornak a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisbeli $[\mathbf{x}]_B$ koordinátái vektorát $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$-el. Ekkor mint tanultuk

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\mathbf{x}]_B = Q^{-1} \cdot \mathbf{x}. \tag{3}$$

Vagyis

$$Q \cdot \mathbf{x}' = Q \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x}. \tag{4}$$

III. lépés: Legyen

$$D := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{K}' := \mathbf{K} \cdot Q.$$

Ekkor az első fokú rész:

$$\boxed{\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{K} \cdot (Q \cdot \mathbf{x}') = (\mathbf{K} \cdot Q) \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{K}' \cdot \mathbf{x}'.}$$

Használva, hogy $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x}')^T \cdot D \cdot \mathbf{x}'$ és $\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{K}' \cdot \mathbf{x}'$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + d \\ &= (\mathbf{x}')^T \cdot D \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{K}' \cdot \mathbf{x}' + d \end{aligned}$$

Tehát

$$\boxed{\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + k_1' \cdot x' + k_2' \cdot y' + d = 0,} \tag{5}$$

ahol $\mathbf{K}' = \left[\begin{array}{cc} k_1' & k_2' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \right] \cdot Q$

IV. lépés: Ekkor Q egy forgatás mátrixa a természetes bázisban. Az $\mathbf{x} \mapsto Q \cdot \mathbf{x}$ lineáris transzformáció az x tengely pozitív felét az $\mathbf{u}_1$ vektor (origóból felmérve), félegyenesébe, míg az y tengely pozitív felét az $\mathbf{u}_2$ vektor (origóból felmérve), félegyenesébe forgatja . Az $\mathbf{u}_1$ egyenese az új x', y' koordinátarendszer x' tengelye és az $\mathbf{u}_2$ egyenese az új x', y' koordinátarendszer y' tengelye.

V. lépés: Az új változók tehát:

$$\begin{aligned} x' &= q_{11} \cdot x + q_{21} \cdot y \\ y' &= q_{12} \cdot x + q_{22} \cdot y, \end{aligned}$$

ahol

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$$

VI. lépés: Az új $x'y'$ koordináta rendszerben teljes négyzetté alakítunk. Ez az $x'y'$ koordináta rendszer eltolásaként előálló $x''y''$ rendszert eredményezi amiben felírhatjuk a kúpszeletünket.

Példa

1.

$$\boxed{2x^2 + 2y^2 - 2xy = 1.} \tag{6}$$

Ekkor $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. A sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok mátrixba rendezve:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \text{ és} \qquad Q := [\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Tehát az új

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{aligned}$$

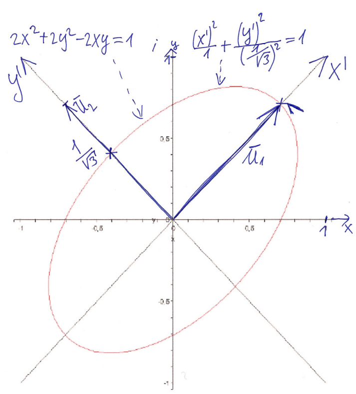
változókkal:

$$(x')^2 + 3(y')^2 = 1.$$

Innen

$$\boxed{(x')^2 + \frac{(y')^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1.}$$

Vagyis a kvadratikus alak ellipszist határoz meg, melynek hosszabb féltengelye az $\mathbf{u}_1$ egyenesén 1 hosszú, míg a rövidebb féltengelye az $\mathbf{u}_2$ egyenesén $\frac{1}{\sqrt{3}}$ hosszú.



1. ábra. Az 1. feladat megoldása.

2.

$$\underbrace{4x^2 - 20xy + 25y^2}_{\text{kvadratikus rész}} \quad \underbrace{-15x - 6y}_{\text{első fokú rész}} \quad = 0. \tag{7}$$

Először a kvadratikus részben eltüntetjük az xy alakú tagot új változókra való áttéréssel. Ehhez a kvadratikus részt

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

alakban írjuk fel, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok mátrixba rendezve:

$$\lambda_1 = 29, \lambda_2 = 0 \text{ és} \qquad Q := [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ -\frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}.$$

Tehát az új

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{5}{\sqrt{29}}y \\ y' &= \frac{5}{\sqrt{29}}x + \frac{2}{\sqrt{29}}y. \end{aligned}$$

változókkal

$$\boxed{4x^2 - 20xy + 25y^2 = 29(x')^2.} \tag{8}$$

(7)-ben az első fokú rész:

$$-15x - 6y = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{K} = [-15 \ \ -6].$$

Amint tanultuk ekkor kiszámoljuk:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cdot Q = [-15 \ \ -6] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} & \frac{5}{\sqrt{29}} \\ -\frac{5}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3\sqrt{29} \end{bmatrix}.$$

Ahonnan

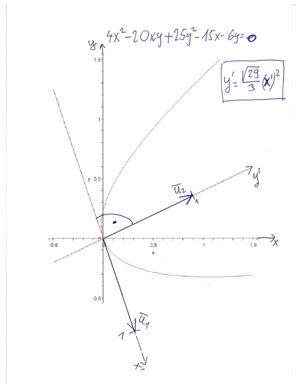
$$-15x - 6y = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{K}' \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 0 \cdot x' - 3 \cdot \sqrt{29}y'. \tag{9}$$

Ezt (8)-al összetéve kapjuk, hogy a (7) egyenlet az x' y' rendszerben:

$$29(x')^2 - 3 \cdot \sqrt{29}y' = 0.$$

vagyis

$$\boxed{y' = \frac{\sqrt{29}}{3}(x')^2.}$$



2. ábra. A 2. feladat megoldása.

3.

$$\underbrace{3x^2 - 8xy - 12y^2}_{\text{kvadratikus rész}} \quad \underbrace{-30x - 64y}_{\text{első fokú rész}} \quad = 0. \tag{10}$$

Először a kvadratikus részben eltüntetjük az xy alakú tagot új változókra való áttéréssel. Ehhez a kvadratikus részt

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

alakban írjuk fel, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok mátrixba rendezve:

$$\lambda_1 = -13, \lambda_2 = 4 \text{ és} \qquad Q := [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}.$$

Használva, hogy $\mathbf{x}' = Q^T \cdot \mathbf{x}$, az új

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{17}}x + \frac{4}{\sqrt{17}}y \\ y' &= -\frac{4}{\sqrt{17}}x + \frac{1}{\sqrt{17}}y. \end{aligned}$$

változókkal (10) egyenlet kvadratikus része:

$$3x^2 - 8xy - 12y^2 = -13(x')^2 + 4(y')^2. \tag{11}$$

(7)-ben az első fokú rész:

$$-30x - 64y = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{K} = [-30 \ \ -64] \,.$$

Amint tanultuk ekkor kiszámoljuk:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cdot Q = [-30 \ \ -64] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} & -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{286}{\sqrt{17}} & \frac{56}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}.$$

Ahonnan

$$-30x - 64y = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{K}' \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -\frac{286}{\sqrt{17}} \cdot x' + \frac{56}{\sqrt{17}} y'. \tag{12}$$

Innen és (11)-ből adódik, hogy a (10) egyenlet az új koordinátákkal:

$$-13(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{286}{\sqrt{17}} x' + \frac{56}{\sqrt{17}} y' = 0. \tag{13}$$

Az x'-ös és y'-ös tagokat csoportosítjuk:

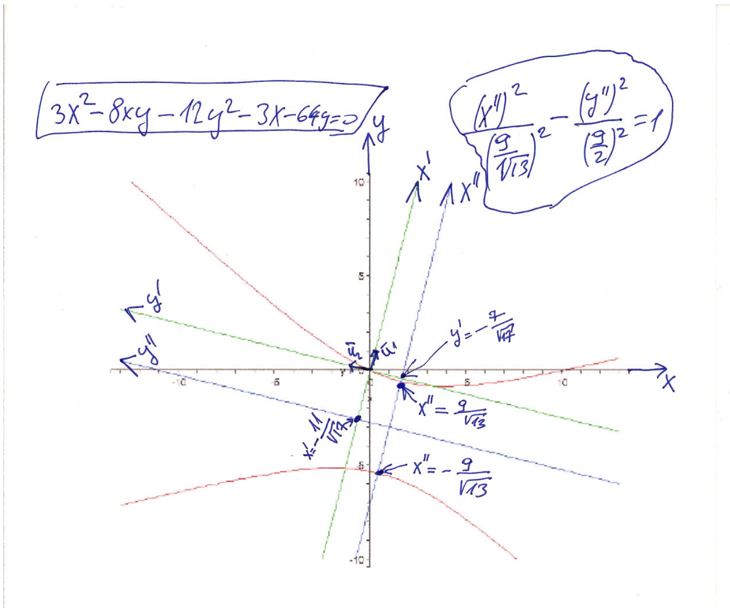
$$\underbrace{-13(x')^2 - \frac{\overbrace{286}^{13 \cdot 22}}{\sqrt{17}} x'}_{-13\left(\left(x' + \frac{11}{\sqrt{17}}\right)^2 - \frac{11^2}{17}\right)} + \underbrace{4(y')^2 + \frac{\overbrace{56}^{4 \cdot 14}}{\sqrt{17}} y'}_{4\left(\left(y' + \frac{7}{\sqrt{17}}\right)^2 - \frac{49}{17}\right)} = 0. \tag{14}$$

Mind az teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy

$$-13(x'')^2 + 4(y'')^2 = 81,$$

ahol

$$x'' = x' + \frac{11}{\sqrt{17}} \text{ és } y'' = y' + \frac{7}{\sqrt{17}}.$$



3. ábra. A 3. feladat megoldása.

Tehát ebben a legújabb $x''y''$ koordináta rendszerben a (10) egyenlet:

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{\left(\frac{9}{\sqrt{13}}\right)^2} - \frac{(y'')^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = 1.}$$

4.

$$21x^2 + 6xy - 13y^2 - 114x - 34y + 73 = 0. \tag{15}$$

Először a kvadratikus részben eltüntetjük az xy alakú tagot új változókra való áttéréssel. Ehhez a kvadratikus részt

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

alakban írjuk fel, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok mátrixba rendezve:

$$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 22 \text{ és } \qquad Q := [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

Használva, hogy $\mathbf{x}' = Q^T \cdot \mathbf{x}$, az új

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{10}}x - \frac{3}{\sqrt{10}}y \\ y' &= \frac{3}{\sqrt{10}}x + \frac{1}{\sqrt{10}}y. \end{aligned}$$

változókkal (15) egyenlet kvadratikus része:

$$21x^2 + 6xy - 13y^2 = 12(x')^2 + 22(y')^2. \tag{16}$$

(15)-ben az első fokú rész:

$$-114x + 34y = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{K} = [-114\ 34].$$

Amint tanultuk ekkor kiszámoljuk:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cdot Q = [-114\ 34] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{216}{\sqrt{10}} & -\frac{308}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

Ahonnan

$$-114x + 34y = \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{K}' \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -\frac{216}{\sqrt{10}} \cdot x' - \frac{308}{\sqrt{10}}y'. \tag{17}$$

Innen és (16)-ből adódik, hogy a (15) egyenlet az új koordinátákkal:

$$12(x')^2 + 22(y')^2 - \frac{216}{\sqrt{10}} \cdot x' - \frac{308}{\sqrt{10}}y' + 73 = 0. \tag{18}$$

Az x'-ös és y'-ös tagokat csoportosítjuk:

$$\underbrace{12(x')^2 - \frac{\overbrace{216}^{12\cdot2\cdot9}}{\sqrt{10}} \cdot x'}_{12(x' - \frac{9}{\sqrt{10}})^2 - \frac{12\cdot81}{10}} + \underbrace{22(y')^2 - \frac{\overbrace{308}^{22\cdot2\cdot7}}{\sqrt{10}}y'}_{22(y' - \frac{7}{\sqrt{10}})^2 - \frac{22\cdot49}{10}} + 73 = 0.$$

Teljes négyzetté alakítás után:

$$12 \cdot (x'')^2 + 22 \cdot (y'')^2 = 132,$$

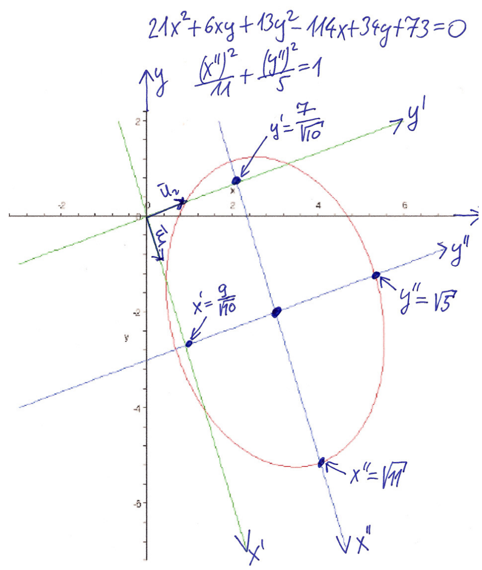
ahol

$$x'' = x' - \frac{9}{\sqrt{10}} \qquad y'' = y' - \frac{7}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a (15) egyenlet az $x''y''$ koordinátákkal:

$$\boxed{\frac{(x'')^2}{11} + \frac{(y'')^2}{5} = 1.}$$

Ez tehát egy ellipszis aminek az x'' koordináta tengelyen a féltengely hossza$\sqrt{11}$ és az y'' koordináta tengelyen a féltengely hossza$\sqrt{5}$.



4. ábra. A 4. feladat megoldása.