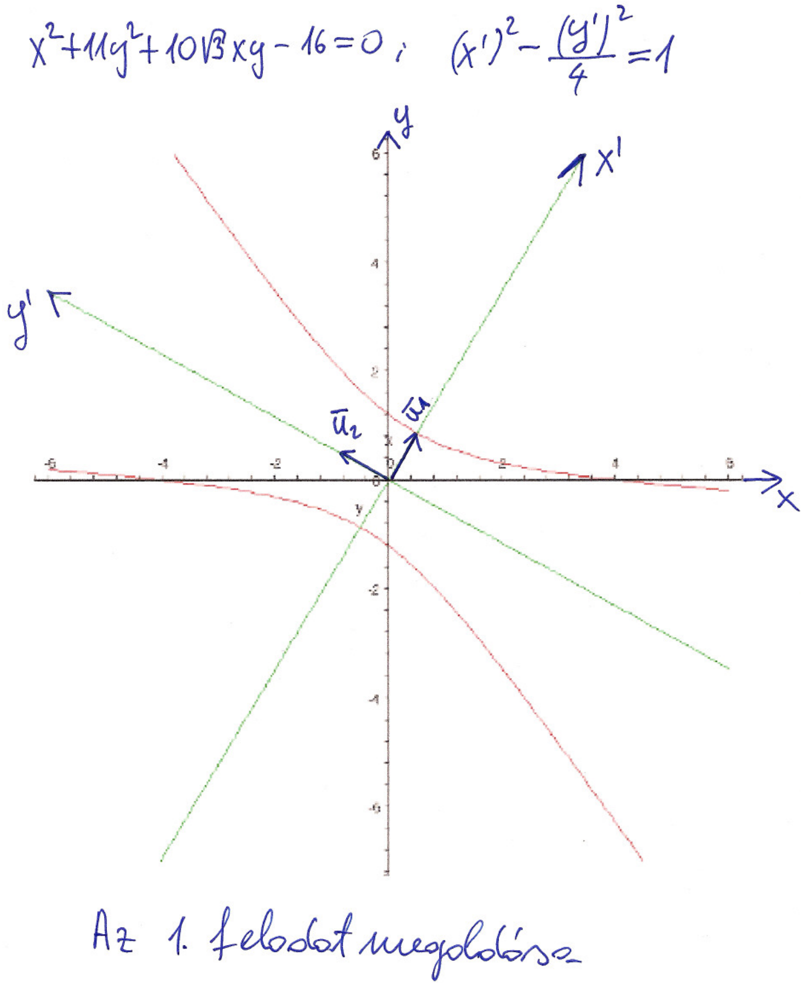
Matematika A2 építőkari hallgatóknak

Kúpszeletek, másodrendű felületek

Feladatok

1. $x^2 + 11y^2 + 10\sqrt{3}xy - 16 = 0$

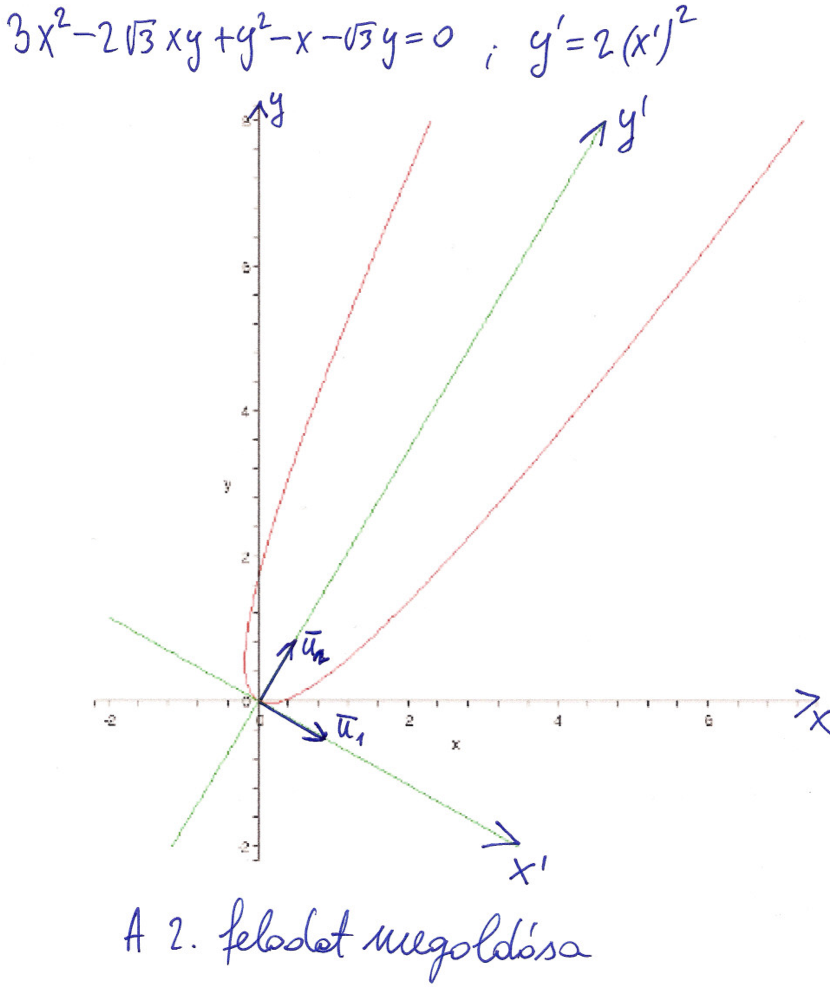
   Megoldás: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 16$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -4$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, tehát az új változók $x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$. Ezekkel az új változókkal $16(x')^2 - 4(y')^2 - 16 = 0$, átrendezés után $(x')^2 - \frac{(y')^2}{4} = 1$, tehát egy $+60$ fokkal elforgatott hiperboláról van szó.



1. ábra.

2. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - x - \sqrt{3}y = 0$

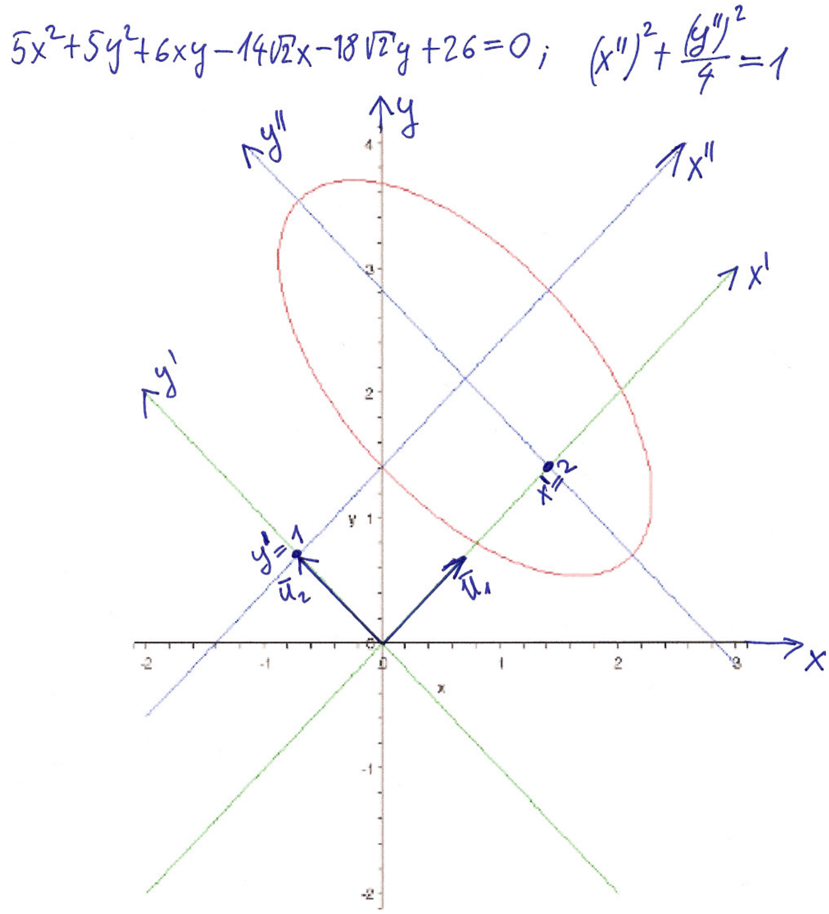
Megoldás: $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, tehát az új változók $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y$, $y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$. A lineáris részre pedig $K = (-1; -\sqrt{3})$, az új változóknak megfelelő vektor pedig $K' = KQ = (0\ -2)$, azaz a képlet az új változókkal $4(x')^2 - 2y' = 0$, átrendezve $y' = 2(x')^2$, tehát egy -30 fokkal elforgatott parabola volt megadva.



2. ábra.

3. $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 14\sqrt{2}x - 18\sqrt{2}y + 26 = 0$

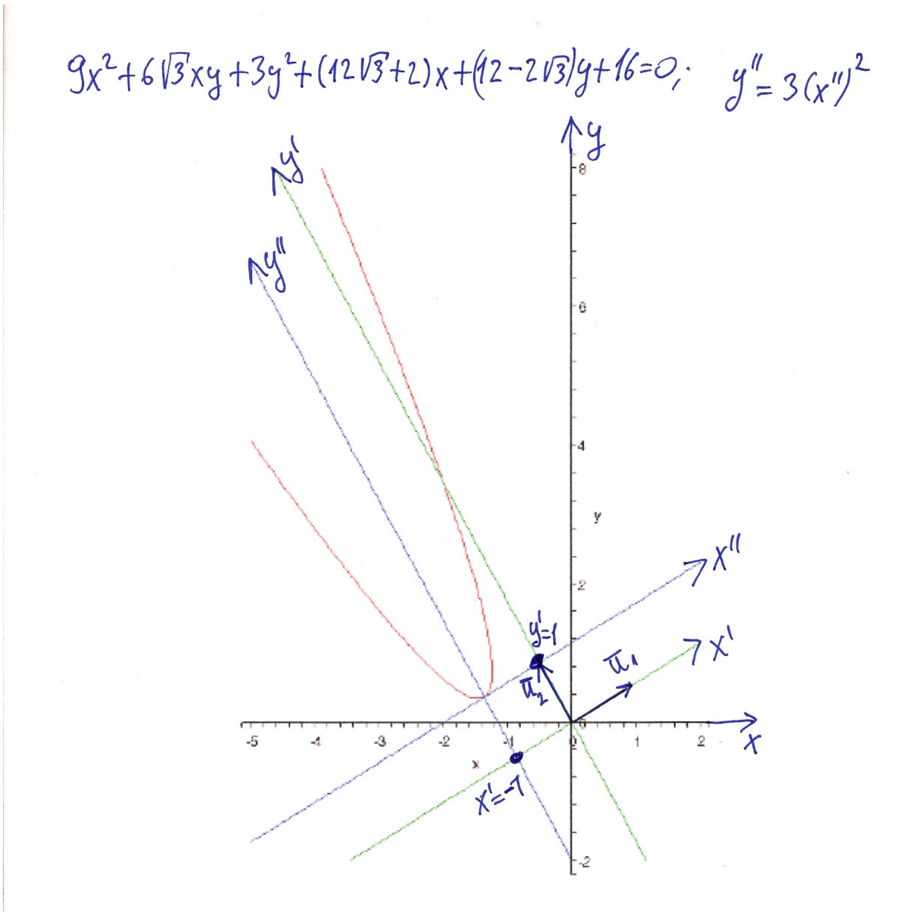
Megoldás: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 8$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, tehát az új változók $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$. A lineáris részre $K = (-14\sqrt{2}; -18\sqrt{2})$, az új változóknak megfelelő vektor pedig $K' = KQ = (-32; -4)$. Így kapjuk, hogy az új változókkal felírt képlet $8(x')^2 + 2(y')^2 - 32x' - 4y' + 26 = 0$. Ezt most teljes négyzetté alakítjuk: $8(x' - 2)^2 - 32 + 2(y' - 1)^2 - 2 + 16 = 0$, ezért bevezetjük a még újabb változókat: $x'' = x' - 2$ $y'' = y' - 1$, amikkel felírva a képletet kapjuk, hogy $(x'')^2 + \frac{(y'')^2}{4} = 1$, tehát egy ellipszisről beszélünk.



3. ábra. A 3. feladat megoldása.

4. $9x^2 + 6\sqrt{3}xy + 3y^2 + (12\sqrt{3}+2)x + (12-2\sqrt{3})y + 16 = 0$

Megoldás: $A = \begin{pmatrix} 9 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 12$, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 0$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, tehát az új változók $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$, $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$. A lineáris részre $K = (12\sqrt{3}+2;\ 12-2\sqrt{3})$, az új változóknak megfelelő vektor pedig $K' = KQ = (24; -4)$. Így kapjuk, hogy az új változókkal felírt képlet $12(x')^2 + 24x' - 4y' + 16 = 0$. Ezt most teljes négyzetté alakítjuk: $12(x'+1)^2 - 4(y'-1) = 0$, ezért bevezetjük a még újabb változókat: $x'' = x' + 1$ $y'' = y' - 1$, amikkel felírva a képletet kapjuk, hogy $y'' = 3(x'')^2$, tehát egy parabola volt megadva.



4. ábra. A 4. feladat megoldása.