

# Megoldások

## 1. Lineáris algebra

1.  $x = 1, y = -1, z = -1, t = 1.$

2.  $x_1 = 2i, x_2 = -2 - 2i, x_3 = 2 + i.$

3.  $x_1 = -\frac{53}{6}x_4 + \frac{5}{2}x_5, x_2 = -\frac{17}{6}x_4 + \frac{3}{2}x_5, x_3 = \frac{7}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_5.$

4.  $a = 4.$

5. (a)  $-5$

(b)  $40$

(c)  $1 + ab + ad + cd + abcd$

$$6. x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 6 & -7 & 3 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-265}{244},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 8 & 6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-257}{244},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 8 & -7 & 6 \\ 2 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & -7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{595}{244}.$$

7. A jegyzet 39-40. oldalán leírt módszert alkalmazzuk: az

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixon a Gauss–Jordan-eliminációt végrehajtva a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{10} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amely mutatja, hogy (például)  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  egy maximális lineárisan független rendszer, illetve, hogy  $\mathbf{a}_3 = -\frac{7}{10}\mathbf{a}_1 - \frac{3}{5}\mathbf{a}_2$  és  $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ .

8. (a) A

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \\ -i & i & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixon a Gauss–Jordan-eliminációt végrehajtva a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amely teljes rangú, ezért a vektorok lineárisan függetlenek.

(b) A

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3+2i \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & i & i \end{bmatrix}$$

mátrixon a Gauss–Jordan-eliminációt végrehajtva a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amely nem teljes rangú, ezért a vektorok lineárisan összefüggőek. Az is látható, hogy  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ .

9. Az

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} i & 1+i & 1-i & 1 \\ -1 & 2i & -2i & i \\ -i & -2+2i & -2-2i & 1+i \end{bmatrix}$$

mátrixon a Gauss–Jordan-eliminációt végrehajtva a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amelyből kiolvasható, hogy  $\mathbf{b} = (1-i)\mathbf{a}_1 + (-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i)\mathbf{a}_2 + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i)\mathbf{a}_3$ .

10. A jegyzet 15-16. oldalán leírtak alapján:

$$(a) [\mathbf{w}]_B = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]^{-1}[\mathbf{w}]_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

$$(b) [\mathbf{u}]_T = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2][\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

11. A 16. oldal 2. következménye alapján:

$$[\mathbf{a}]_{B'} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]^{-1}[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2][\mathbf{a}]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15 & 8 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 369 \\ -833 \end{bmatrix}.$$

12. A jegyzet 12. példájához hasonlóan:  $A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $A \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , így  $A$  mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. A transzformáció mátrixa a természetes bázisban

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

14.  $T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ , így  $T$  mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

15. Fejezzük ki az  $\mathbf{y}_i$  vektorokat az  $\mathbf{x}_j$  vektorok lineáris kombinációiként. Ehhez az  $[\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3 \ \mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \mathbf{y}_3]$  mátrixon hajtsuk végre a Gauss–Jordan-eliminációt. Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, ami alapján  $A$  mátrixa a  $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$  bázisban:

$$[[\mathbf{y}_1]_B \ [\mathbf{y}_2]_B \ [\mathbf{y}_3]_B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. A 19. oldalon szereplő 6. tételt használva:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -77 & 19 \\ -358 & 88 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -77 & 19 \\ -358 & 88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3304 & -8963 \\ 1222 & 3315 \end{bmatrix}.$$

17. (a) A jegyzet 49. oldalán leírtak alapján:

Tekintsük  $S$ -nek két nem párhuzamos vektorát. Például  $x = 1$ ,  $y = 0$  választással  $z = -5$ ;

$x = 0$ ,  $y = 1$  esetén  $z = 6$  adódik. Tekintsük az  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$  mátrixot. Ezzel az  $S$  síkra való merőleges vetítés mátrixa

$$M(M^T M)^{-1} M^T = \frac{1}{62} \begin{bmatrix} 37 & 30 & -5 \\ 30 & 26 & 6 \\ -5 & 6 & 61 \end{bmatrix}.$$

A  $P = (8, 1, 3)$  pont képe:

$$\frac{1}{62} \begin{bmatrix} 37 & 30 & -5 \\ 30 & 26 & 6 \\ -5 & 6 & 61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{311}{62} \\ \frac{142}{62} \\ \frac{31}{62} \end{bmatrix}.$$

(b) Most (például)  $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ . Ezzel a  $T$  síkra való merőleges vetítés mátrixa

$$M(M^T M)^{-1} M^T = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 29 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & 10 \\ 2 & 10 & 26 \end{bmatrix}.$$

A  $P = (8, 1, 3)$  pont képe:

$$\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 29 & -5 & 2 \\ -5 & 5 & 10 \\ 2 & 10 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{233}{30} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{52}{15} \end{bmatrix}.$$

18. A 21. oldal 15. példájához hasonlóan ( $c, d$  tetszőleges):

(a)  $\lambda_1 = 3, \mathbf{v}_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_2 = -2, \mathbf{v}_2 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$

(b)  $\lambda_1 = 2, \mathbf{v}_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_2 = -1, \mathbf{v}_2 = c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \lambda_3 = 1, \mathbf{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(c)  $\lambda_1 = -1, \mathbf{v}_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \mathbf{v}_2 = c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

19. A jegyzet 27. oldalán leírtak szerint járunk el. Az  $A$  mátrix sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 5 + 2\sqrt{2}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 5 - 2\sqrt{2}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Így } A = \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 - \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ha a normált  $\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}$ ,  $\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}$  sajátvektorokat tekintjük, akkor ezekkel (mivel  $A$  szimmetrikus):

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{bmatrix}^T.$$

20. Az  $A$  mátrix sajátértékei és a hozzájuk tartozó normált sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 12, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \lambda_2 = -8, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Így } A = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T = 12 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

21. A 24-25. oldalon szereplő eljárást alkalmazzuk a megadott vektorokra.  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_2 =$

$$\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -3 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

a kifeszített altér egy ortogonális bázisát adja, ebből  $\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|}, \frac{\mathbf{b}_3}{|\mathbf{b}_3|} \right\}$ , azaz  $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{14}{\sqrt{282}} \\ \frac{2}{\sqrt{282}} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{94}} \\ \frac{1}{\sqrt{282}} \end{bmatrix} \right\}$  ortonormált bázis.

22. A 35. oldal 25. példájához hasonlóan:

A keresett  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  polinom együtthatóira a következő lineáris egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} a_0 + (-3)a_1 + (-3)^2a_2 + (-3)^3a_3 &= 2 \\ a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2a_2 + (-1)^3a_3 &= 4 \\ a_0 + (1)a_1 + (1)^2a_2 + (1)^3a_3 &= 3 \\ a_0 + (2)a_1 + (2)^2a_2 + (2)^3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ennek a mátrixán végrehajtva a Gauss–Jordan-eliminációt, a következő mátrix adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{83}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{49}{120} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{20} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{120} \end{bmatrix}$$

Így  $p(x) = \frac{83}{20} - \frac{49}{120}x - \frac{13}{20}x^2 + \frac{11}{120}x^3$ .

23. (a) Az 53-54. oldalon leírtak szerint járhatunk el, a keresett  $y = a + bx$  egyenletű egyenes együtthatóira a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, így  $a = \frac{128}{59}$ ,  $b = -\frac{19}{59}$ .

- (b) A keresett  $y = a + bx$  egyenes együtthatóira:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 125 \end{bmatrix},$$

így  $a = \frac{248}{53}$ ,  $b = \frac{273}{106}$ .

24. Az  $A^T A x = A^T b$  egyenletet kell megoldani, így

(a)  $x_1 = \frac{149}{46}$ ,  $x_2 = -\frac{2}{115}$ . Ezzel a hiba  $\|Ax - b\| = \frac{9}{\sqrt{230}}$ .

(b)  $x_1 = -\frac{46}{85}$ ,  $x_2 = \frac{3}{17}$ . Ezzel a hiba  $\|Ax - b\| = 12\sqrt{\frac{14}{85}}$ .

25. (a) Az 59. oldal 29. példájához hasonlóan: az  $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$  mátrix sajátértékei és (egységni) sajátvektorai  $\lambda_1 = 9$ ,  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ . Így  $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , a szinguláris értékekből álló diagonális mátrix pedig  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{1}A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ , tehát  $U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ . Ezekkel  $A = UDV^T$ .

(b)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

(Az előzőekhez hasonlóan  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}C\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{1}C\mathbf{v}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$ -at pedig úgy kapjuk, hogy  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ -t kiegészítjük ortonormált rendszerré. Ez például úgy történhet, hogy megoldjuk az  $\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_3 = 0$ ,  $\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_3 = 0$  egyenletrendszert  $\mathbf{u}_3$ -ra, azaz megkeressük a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}u_{13} + \frac{1}{\sqrt{6}}u_{23} + \frac{1}{\sqrt{6}}u_{33} &= 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}u_{23} + \frac{1}{\sqrt{2}}u_{33} &= 0 \end{aligned}$$

rendszer megoldásait ( $u_{13} = -c$ ,  $u_{23} = c$ ,  $u_{33} = c$ ), majd ezek közül kiválasztjuk az egységni hosszút.)

26. A szinguláris érték felbontásokból a jegyzet 61. oldalán leírt módon kaphatjuk meg a poláris felbontásokat:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

27. A jegyzet 62. oldalán leírtak alapján először diagonalizáljuk a mátrixokat a sajátértékek, illetve sajátvektorok kiszámításával, majd ez alapján határozzuk meg a keresett függvényértékeket.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

$$e^{2A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^6 & 0 \\ 0 & e^{-8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{-8} + e^6 & -2e^{-8} + 2e^6 \\ -2e^{-8} + 2e^6 & e^{-8} + 4e^6 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{-3B} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-6} & 0 \\ 0 & e^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-6} + 3e^9 & 4e^{-6} - 4e^9 \\ -\frac{3}{2}e^{-6} + \frac{3}{2}e^9 & 3e^{-6} - 2e^9 \end{bmatrix}.$$

## 2. Parciális differenciálegyenletek

28. (a)  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$   
 (b)  $g(x) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx)$   
 (c)  $h(x) = \frac{2\pi}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos(kx)$
29.  $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}x\right)$
30.  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx)$
31.  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$ , ahol  $b_k = \frac{8(-1)^{k+1}}{k\pi} - \frac{16}{k^3\pi^3}(1 - (-1)^k)$ .
32. (a)  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \sin(kx)$ , ahol  $A_k = \frac{1}{k}$  (a  $\frac{\pi-x}{2}$  függvény tiszta szinuszos Fourier-sorának együtthatói a 30. feladatból),  $B_k = 0$  minden pozitív egész  $k$ -ra.  
 (b)  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\left(\frac{k\sqrt{2}\pi}{5}t\right) + B_k \sin\left(\frac{k\sqrt{2}\pi}{5}t\right)) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$ , ahol

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{5} \int_0^5 3x \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) dx = \frac{2}{5} \int_0^{\pi} \frac{15y}{\pi} \sin(ky) \frac{5}{\pi} dy = \frac{15}{\pi} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \sin(ky) dy \\ &= \frac{15}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{2}{k} = (-1)^{n+1} \frac{30}{k\pi} \end{aligned}$$

(helyettesítéses integrálással visszavezetve az  $x$  függvény Fourier-együtthatóinak kiszámítására, ami a jegyzetben szerepel), illetve

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}x\right) \sin(\pi x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{8\pi}{5}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$$

miatt  $B_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{2}$ ,  $B_8 = \frac{5}{8\sqrt{2}\pi} \frac{1}{2}$ ,  $k \notin \{2, 8\}$  esetén  $B_k = 0$ .

- (c)  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(k\pi t) + B_k \sin(k\pi t)) \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$ , ahol  $A_3 = 1$ ,  $k \neq 1$ -re  $A_k = 0$ , és  $B_k = \frac{2}{2k\pi} \left( \frac{8(-1)^{k+1}}{k\pi} - \frac{16}{k^3\pi^3}(1 - (-1)^k) \right) = \frac{8(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2} - \frac{16}{k^4\pi^4}(1 - (-1)^k)$ , a 31. feladat eredménye alapján.

33. A húr kitérését induláskor az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ 3, & \text{ha } 2 \leq x \leq 3, \\ -x + 6, & \text{ha } 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

függvény adja meg. Tekintsük ennek a páratlan, 12 periódusú kiterjesztését a számegeenesre, jelöljük ezután ezt  $f(x)$ -szel. A D'Alembert-formula szerint  $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+2t) + f(x-2t))$ , ezért  $t = 1, 5$ -ben:

$$u(x, 1, 5) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 5, \\ -\frac{1}{2}x + 3, & \text{ha } 5 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

34. Terjesszük ki  $g$ -t páratlan, 4-periodikus módon a számegeenesre. Ezzel a D'Alembert-formula szerint:  $u(x, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2.4} \int_{x-1}^{x+1} g(u) du$ . A számunkra érdekes szakaszon:

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ 3x - 2, & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 3x - 10, & \text{ha } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Ezért

$$u\left(x, \frac{1}{4}\right) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left[ \int_{x-1}^0 (3u+2) du + \int_0^{x+1} (3u-2) du \right] = \frac{1}{4}x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{8} \left[ \int_{x-1}^2 (3u-2) du + \int_2^{x+1} (3u-10) du \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

35. A húr kitérését induláskor az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -5 \text{ vagy } x \geq 2, \\ x+5, & \text{ha } -5 \leq x \leq -3, \\ 2, & \text{ha } -3 \leq x \leq 1, \\ -2x+4, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

függvény adja meg. A D'Alembert-formula szerint  $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$ , ezért  $t = 5$ -ben:

$$u(x, 5) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -10 \text{ vagy } -3 \leq x \leq 0 \text{ vagy } x \geq 7, \\ \frac{1}{2}x+5, & \text{ha } -10 \leq x \leq -8, \\ 1, & \text{ha } -8 \leq x \leq -4 \text{ vagy } 2 \leq x \leq 6, \\ -x-3, & \text{ha } -4 \leq x \leq -3, \\ \frac{1}{2}x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ -x+7, & \text{ha } 6 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

36. A D'Alembert-formula alapján:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\cos(3(x+2t)) + \cos(3(x-2t))] + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} \frac{6x}{x^2+1} dt \\ &= \cos(3x) \cos(6t) + \frac{3}{4} [\ln((x+2t)^2+1) + \ln((x-2t)^2+1)]. \end{aligned}$$

37. (a)  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{2})^2 2t} \sin(\frac{n\pi}{2}x)$ , ahol az  $A_n$ -ek a  $\sin(4\pi x) \cos(\frac{5\pi}{2}x)$  függvény  $[0, 2]$  intervallumon vett tiszta szinuszos Fourier-sorának együtthatói.

$$\sin(4\pi x) \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{13\pi}{2}x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \right].$$

Emiatt  $A_3 = A_{13} = \frac{1}{2}$ , és  $A_n = 0$ , ha  $n \notin \{3, 13\}$ . Tehát

$$u(x, t) = \frac{1}{2} e^{-(\frac{3\pi}{2})^2 2t} \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2} e^{-(\frac{13\pi}{2})^2 2t} \sin\left(\frac{13\pi}{2}x\right).$$

(b)  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi}{3})^2 \sqrt{3}t} \sin(\frac{n\pi}{3}x)$ , ahol az  $A_n$ -ek az  $x(3-x)$  függvény  $[0, 3]$  intervallumon vett tiszta szinuszos Fourier-sorának együtthatói, azaz

$$A_n = \frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x) \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) dx = \frac{2}{3} \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{3y}{\pi} \left(3 - \frac{3y}{\pi}\right) \sin(ny) dy = \frac{2}{\pi} \frac{9}{\pi^2} \int_0^{\pi} y(\pi-y) \sin(ny) dy = \frac{9}{\pi^2} B_n,$$

ahol  $B_n$ -ek az  $y(\pi-y)$  függvény  $[0, \pi]$  intervallumon vett tiszta szinuszos Fourier-sorának együtthatói, azaz a jegyzet 71. oldalán leírtak szerint

$$B_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Tehát

$$A_n = \begin{cases} \frac{72}{n^3\pi^3}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$



### 3. Vektoranalízis

38. (a)  $-\frac{17}{105}$   
 (b)  $-4\pi$   
 (c) 0  
 (d)  $\frac{10}{3}$   
 (e) 0, 5  
 (f)  $-2\pi$
39. (a)  $\frac{64}{3}\pi$   
 (b)  $-30$   
 (c)  $9\pi^2$
40. (a)  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2y$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (z - x, 0, z - x)$   
 (b)  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (-\frac{y}{z^2}, -z, -\frac{x}{y^2})$   
 (c)  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz[\cos(x^2yz) + \cos(xy^2z) + \cos(xyz^2)]$ ,  
 $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2 \cos(xyz^2) - xy^2 \cos(xy^2z), x^2y \cos(x^2yz) - yz^2 \cos(xyz^2), y^2z \cos(xy^2z) - x^2z \cos(x^2yz))$   
 (d)  $\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{r}|}$
41. (a) Mivel a vektortér nincs értelmezve az  $x + y + z = 0$  síkon, a curl-teszt nem ad megoldást.  
 (b)  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0)$  a tér minden pontjában, ezért van potenciálfüggvény, mégpedig:  
 $u(x, y, z) = \sin(x + y) + \cos(x - y) + C$ .  
 (c)  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, 0)$  a tér minden pontjában, ezért van potenciálfüggvény, mégpedig:  
 $u(x, y, z) = x^2y + yz^2 - xz^2 - xyz + C$ .
42.  $u(x, y, z) = xy + xz + yz$  potenciálfüggvény, a görbe két végpontja a  $(0, 0, 0)$  és az  $(\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2})$ , így a kettő közötti görbe menti integrál értéke (az úttól függetlenül)  $\frac{5}{4}a^2$ .
43. (a)  $\frac{12}{5}a^5\pi$   
 (b)  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = x + y + z$ , ennek az integrálja a téglatest belsejében  $\frac{189}{2}$ .  $\mathbf{F}$  integrálja az  $x = -2$  síkba eső lap mentén (a téglatesthez viszonyítva kifelé mutató normálissal) 49. Ezért  $\mathbf{F}$  integrálja a többi lap mentén a Gauss-tétel szerint  $\frac{189}{2} - 49 = \frac{91}{2}$ .
44.  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = (xz \cos(xyz) + ye^{yz}, -yz \cos(xyz) + e^x \cos z, 0)$ . A Stokes-tétel szerint a megadott körvonal menti integrál megkapható  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ -nek a körlapon vett integrálásával. Mivel a körlap az  $xy$  síkban fekszik, és  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$   $z$  irányú komponense mindenütt 0, a felületmenti integráljának értéke 0.
45. A  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y$  függvényt kell integrálnunk a félkörlapon, az integrál értéke  $\frac{2}{3}$ .
46. A Green-tétel következményeként a jegyzet 138. oldalán láttuk, hogy a terület megkapható az  $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$  vektortérnek a határoló görbén (pozitív irányítással) vett integráljaként. A  $(0, 0)$ ,  $(2\pi, 0)$  közötti szakaszon  $(0, x)$  integrálja 0. A cikloisív mentén vett integrál (most  $2\pi$ -től 0-ig kell mennünk a paraméterértékekkel):

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\pi} (0, R(t - \sin t)) \cdot (R(1 - \cos t), R \sin t) dt = - \int_0^{2\pi} R^2 \sin t(t - \sin t) dt = \\
 & - R^2 \left( \int_0^{2\pi} t \sin t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \right) = -R^2 \left( [-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \right) = \\
 & - R^2(-2\pi - \pi) = 3R^2\pi.
 \end{aligned}$$

Tehát a bezárt terület  $3R^2\pi$ .