

# Matematika MSc Építőmérnököknek

Szerző: Simon Károly

A jegyzet nagyobb részét Dr. Simon Bakos Erzsébet gépelte Latex szövegszerkesztőben.

# Tartalomjegyzék

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Az A2-ben tanult lineáris algebra összefoglalása</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1. Az $\mathbb{R}^n$ és alterei                            | 6         |
| 1.2. Lineáris egyenletrendszerek                             | 8         |
| 1.2.1. Gauss-elimináció                                      | 9         |
| 1.2.2. Vektorok lineáris függetlensége                       | 11        |
| 1.2.3. Cramer-szabály  | 12        |
| 1.3. Áttérés egyik bázisról a másikra                        | 15        |
| 1.4. Lineáris transzformációk                                | 17        |
| 1.4.1. Lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban | 19        |
| 1.5. Sajátértékek, sajátvektorok                             | 20        |
| 1.6. Ortogonális mátrixok                                    | 22        |
| 1.7. Szimmetrikus mátrixok diagonalizálása                   | 23        |
| <b>2. Lineáris algebra II.</b>                               | <b>29</b> |
| 2.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz                       | 29        |
| 2.1.1. determináns   | 29        |
| 2.1.2. Determináns geometriai jelentése:                     | 31        |
| 2.1.3. Mátrix nyoma  | 32        |
| 2.1.4. Mátrixok kétpontos szorzata                           | 33        |
| 2.1.5. Ferdén szimmetrikus mátrixok                          | 33        |
| 2.1.6. Gauss-Jordan elimináció                               | 34        |
| 2.1.7. Kifeszített altér bázisának meghatározása             | 38        |
| 2.2. A mátrix fundamentális alterei                          | 41        |
| 2.3. Dimenzió tétel mátrixokra                               | 41        |
| 2.4. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$ -ben                 | 46        |
| 2.5. Altérre vonatkozó projekció mátrixa                     | 49        |
| 2.5.1. Alkalmazás I. lineáris egyenletrendszerek             | 52        |
| 2.5.2. Pozitív definit mátrixok                              | 54        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 2.5.3.    | Szinguláris érték felbontás . . . . .                | 57         |
| 2.5.4.    | Mátrixok poláris felbontása . . . . .                | 61         |
| 2.5.5.    | Szimmetrikus mátrixok spektrál felbontása . . . . .  | 61         |
| <b>3.</b> | <b>Parciális differenciálegyenletek</b>              | <b>63</b>  |
| 3.1.      | Fourier sorok: Ismétlés . . . . .                    | 63         |
| 3.1.1.    | Általánoságban a Fourier sor definíciója . . . . .   | 63         |
| 3.1.2.    | Fourier-sor komplex alakja . . . . .                 | 67         |
| 3.1.3.    | A tiszta szinuszos Fourier sor definíciója . . . . . | 68         |
| 3.2.      | Rezgő húr . . . . .                                  | 72         |
| 3.2.1.    | I. megoldás Dávid Bernoullitól: . . . . .            | 74         |
| 3.2.2.    | II. megoldás D’Alamberttől . . . . .                 | 82         |
| 3.2.3.    | Végtelen hosszú húr esete . . . . .                  | 91         |
| 3.3.      | Hővezetés egyenlete . . . . .                        | 93         |
| 3.3.1.    | Hővezetés véges hosszúságú rúdiban . . . . .         | 93         |
| <b>4.</b> | <b>Vektoranalízis</b>                                | <b>99</b>  |
| 4.1.      | Vektorterek . . . . .                                | 99         |
| 4.2.      | Vonalmenti integrál . . . . .                        | 102        |
| 4.2.1.    | Vonalintegrál függetlensége az úttól . . . . .       | 108        |
| 4.2.2.    | Curl-teszt a síkban . . . . .                        | 112        |
| 4.2.3.    | Curl-teszt a térben . . . . .                        | 112        |
| 4.2.4.    | Potenciálfüggvény meghatározása . . . . .            | 113        |
| 4.3.      | Felületmenti integrál . . . . .                      | 117        |
| 4.3.1.    | Gauss-féle divergencia tétel . . . . .               | 123        |
| 4.3.2.    | Stokes tétel . . . . .                               | 129        |
| 4.4.      | Green-tétel . . . . .                                | 136        |
| 4.5.      | Néhány feladat a vektoranalízisből . . . . .         | 142        |
| <b>5.</b> | <b>Appendix</b>                                      | <b>147</b> |
| 5.1.      | Forgás felületek paraméterezése . . . . .            | 147        |
| 5.2.      | Másodrendű felületek . . . . .                       | 150        |

# 1. fejezet

## Az A2-ben tanult lineáris algebra összefoglalása

Egy olyan egyenletet amely felírható

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b \quad (1.1)$$

alakban, ahol  $a_1, \dots, a_n, b$  adott valós vagy komplex számok **lineáris egyenletnek** hívunk. Az ilyen egyenletekből álló

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \cdots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

alakú egyenlet rendszereket **lineáris egyenletrendszereknek** hívjuk. Egész pontosan  $n$  ismeretlenből és  $s$  egyenletből álló lineáris egyenletrendszereknek hívjuk.

Ezen fejezet egyik fontos célja lineáris egyenletrendszerek megoldásának tanulmányozása. Egy olyan egyenletet amely felírható

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$$

alakban, ahol  $a_1, \dots, a_n, b$  adott valós vagy komplex számok **lineáris egyenletnek** hívunk. Az ilyen egyenletekből álló

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}x_1 & + & a_{s2}x_2 & + & \cdots & + & a_{sn}x_n & = & b_s \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

alakú egyenlet rendszereket **lineáris egyenletrendszereknek** hívjuk. Egész pontosan  $n$  ismeretlenből és  $s$  egyenletből álló lineáris egyenletrendszereknek hívjuk.

## 1.1. Az $\mathbf{R}^n$ és alterei

**1. DEFINÍCIÓ:**  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \ 1 \leq i \leq n\}$ . Vagyis az  $\mathbf{R}^n$  a rendezett valós szám  $n$ -esek halmaza.

Ha adott egy koordinátarendszer, akkor a sík pontjai leírhatók a számpárok segítségével. Tehát a sík azonosítható az  $\mathbf{R}^2$ -nel. Hasonlóan a tér azonosítható az  $\mathbf{R}^3$ -nal. Az  $\mathbf{R}^n$   $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  és  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  vektorai között ugyanúgy mint a síkban vagy a térben értelmezhetjük az

összeadást:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .

A számmal való szorzás:  $5\mathbf{x} = (5x_1, \dots, 5x_n)$  vagy  $-3,5\mathbf{x} = (-3,5x_1, \dots, -3,5x_n)$ .

A skaláris szorzás:  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ .

Azt mondjuk, hogy az  $\mathbf{x}$  vektor *merőleges* az  $\mathbf{y}$  vektorra, ha  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$  (jele:  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ).

Ebben a fejezetben a vektorok **lineáris kombinációjának** fogalma központi szerepet játszik:

**2. DEFINÍCIÓ: (lineáris kombináció)** Adottak az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^s$ -beli vektorok és valamely  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$  számok. Ekkor a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^s$

$$\beta_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + \beta_m \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{b} \quad (1.4)$$

vektort az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^s$ -beli vektorok **lineáris kombinációjának** nevezzük. A  $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$  számokat a lineáris kombinációban előforduló **együtthatóknak** nevezzük.

A vektorok lineáris kombinációinak fontos szerepe van a több változós lineáris egyenletrendszerek megoldásában. Nézzük ezt egy példán keresztül:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 16 \end{aligned} \quad (1.5)$$

egyenletrendszer felírható mint

$$x_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} + x_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 16 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (1.6)$$

Továbbá a (2.3) egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Vagyis amikor az (2.3) egyenletrendszert oldjuk meg akkor keressük azokat az  $x_1$  és  $x_2$  együtthatókat, amelyekkel az  $\mathbf{a}_1$  és  $\mathbf{a}_2$  vektorokból képzett lineáris kombináció éppen a  $\mathbf{b}$  vektor. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a  $\mathbf{b}$  vektort felbontjuk az  $\mathbf{a}_1$  és az  $\mathbf{a}_2$  vektorokkal párhuzamos összetevők összegére.

**Általánosságban:** A következő egyenletrendszer

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s \end{array} \right\} \quad (1.8)$$

megoldása azzal ekvivalens, hogy megtaláljuk azon  $x_1, \dots, x_n$  számokat, melyekkel mint együtthatókkal az

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}$$

vektorokból lineáris kombinációival elő áll a

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}$$

vektor. Vagyis:

$$x_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + x_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{b}. \quad (1.9)$$

Ez pedig a következő mátrix egyenlet megoldásával ekvivalens:

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}, \quad (1.10)$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

megoldásával ekvivalens:

**3. DEFINÍCIÓ:** Az  $\mathbf{R}^n$  egy *lineáris alterének* hívjuk az  $L \subset \mathbf{R}^n$  halmazt, ha abból hogy  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in L$  következik, hogy az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  vektorok összes lehetséges lineáris kombinációja is  $L$ -ben van. Ez geometriailag azt jelenti, hogy  $L$  azon  $\mathbf{R}^n$ -beli vektorok halmaza amelyeket fel lehet bontani az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  vektorokkal párhuzamos vektorok összegére.

1. **PÉLDA:** A legegyszerűbb lineáris altér az, ami az origóból áll,  $L = \{(0, \dots, 0)\}$  és az, amikor  $L = \mathbf{R}^n$  maga a teljes tér. Ezeket *triviális lineáris altereknek* nevezzük.
2. **PÉLDA:** A sík *nem triviális alterei* az origón átmenő egyenesek.
3. **PÉLDA:** A tér *nem triviális lineáris alterei* az összes origón átmenő egyenesek és az összes origót tartalmazó síkok.

## 1.2. Lineáris egyenletrendszerek

Ebben a fejezetben egyenletrendszeren **mindig** lineáris egyenletrendszert értünk.

$$\begin{array}{rclclcl}
 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\
 \mathbf{4. PÉLDA:} & & x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\
 & & & & x_2 & - & x_3 & & & = & 5
 \end{array}$$

ekkor az egyenletrendszer *kiegészített mátrixának* hívjuk a következőt:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer *mátrixa*:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Továbbá

Az egyenletrendszer megoldása során az adott egyenletrendszert helyettesíthetjük egy másik egyenletrendszerrel, melynek ugyanazok a megoldásai, de amelyet könnyebb megoldani. A helyettesítés során lépések egy sorozatát hajtjuk végre. Ezek a lépések a következők lehetnek:

1. Valamely egyenletét a rendszernek megszorozzuk egy nem nulla számmal.
2. Valamelyik két egyenletet felcseréljük.



3. Az egyik egyenlet valahányszorosát egy másik egyenlethez adjuk.

Az egyenletrendszer kiegészített mátrixában a fenti lépések a következő műveleteknek felelnek meg:

1. Egy sort megszorozunk egy nem nulla számmal.
2. Két sort felcserélünk.
3. Az egyik sor számszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.

**4. DEFINÍCIÓ:** A fenti három műveletet *elemi sortranszformációnak* nevezzük.

### 1.2.1. Gauss-elimináció

A Gauss-eliminációt a lineáris egyenletrendszerek megoldására használjuk. Két lépésből áll:

1. lépés: Az egyenletrendszer kiegészített mátrixát ú.n. *sor-echelon* alakra hozzuk elemi sortranszformációk alkalmazásával.
2. lépés: A sor-echelon alakból megkapjuk az egyenletrendszer megoldását.

**5. DEFINÍCIÓ:** Azt mondjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa sor-echelon alakban van, ha:

1. a csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai,
2. ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes,
3. két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).

**5. PÉLDA:** Sor-echelon alakú mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sor-echelon alakra hozás módszerének **első lépése**:

Adott a következő mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Kiválasztjuk balról az *első nem csupa nulla* oszlopot.
2. Megcseréljük az első két sort úgy, hogy az előbb kiválasztott oszlop tetején *ne nulla* legyen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Elosztjuk az első sort *kettővel*, hogy a mátrix bal felső sarkában lévő szám *egy* legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Az első sor egy megfelelő konstans szorosát adjuk a többi sorhoz, hogy az első oszlop *minden* eleme *nulla* legyen *kivéve* a bal felső sarokban lévő *egy*et. Ezért az első sor  $-2$ -szeresét adjuk a harmadik sorhoz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

5. Most takarjuk le a mátrix első sorát, és a maradékon ismételjük meg a fenti eljárást. A második sort elosztjuk  $-2$ -vel, hogy a harmadik oszlop második eleme 1 legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

A következő lépésben a második sor  $-5$ -szörösét adjuk a harmadik sorhoz, hogy a harmadik oszlop harmadik eleme *nulla* legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ezután a harmadik sornak vesszük a 2-szeresét, hogy az ötödik oszlop utolsó eleme 1 legyen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Az eredmény egy *sor-echelon alak*. Innen az egyenletrendszer megoldása:  $x_5 = 2$ ;  $x_3 - \frac{7}{2}x_5 = -6 \Rightarrow x_3 = 1$ ;  $x_1 + 2x_2 - 5 \cdot 1 + 3x_4 - 6 \cdot 2 = 14$  vagyis:

$$x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 31$$

$$x_3 = 1 \quad . \quad \text{Ez azt jelenti, hogy végtelen sok megoldás}$$

$$x_5 = 2$$

van, amit úgy kapunk, hogy az  $x_2$  és  $x_4$  értékét tetszőlegesen választjuk ezután  $x_1 = -2x_2 - 3x_4 + 31$ , a  $x_3 = 1$ , és az  $x_5 = 2$ .

Tehát az egyenletrendszer egy megoldása:

ha  $x_2 = 1$  és  $x_4 = 3$ , akkor  $x_1 = 20$  és  $x_3 = 1$ , és  $x_5 = 2$ .

### 1.2.2. Vektorok lineáris függetlensége

**6. DEFINÍCIÓ:** Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok *lineárisan függetlenek*, ha egyik sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorokat *lineárisan függőnek* hívjuk, ha valamelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

**1. TÉTEL:** Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok lineárisan függetlenek, akkor és csak akkor, ha  $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$  csak abban az esetben lehetséges, ha  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ .

**1. FELADAT:** Bizonyítsuk be, hogyha az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok valamelyike a  $\mathbf{0}$  vektor, akkor az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektor rendszer semmi esetre sem lehet lineárisan független.

**7. DEFINÍCIÓ:** Egy  $L \subset \mathbf{R}^n$  lineáris altér egy *bázisa*  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in L$ , ha a

1.  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  vektorok lineárisan *függetlenek*.
2.  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  vektorok összes lehetséges lineáris kombinációi kiadják az  $L$  összes vektorát.

**6. PÉLDA:** Az  $\mathbf{R}^2$  egy bázisát adja bármely két *nem* párhuzamos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  vektor.

Az  $\mathbf{R}^3$  egy bázisát adja bármely három *nem* egy síkba eső vektor (úgy értve, hogyha közös kezdőpontból mérjük fel őket).

**2. TÉTEL:** Ha  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  vektorok az  $L \subset \mathbf{R}^n$  altér egy bázisa, akkor az  $L$  altérnek bármely másik bázisának ugyancsak  $k$  vektora van.

**8. DEFINÍCIÓ:** Ha az  $L \subset \mathbf{R}^n$  altérnek a bázisai  $k$  vektorból állnak, akkor azt mondjuk, hogy az  $L$  altér *dimenziója*  $k$ . Jele:  $\dim(L) = k$ .

**3. TÉTEL:** Ha  $\dim(L) = k$ , akkor bármely lineárisan független  $k$  vektor bázist alkot.

Tehát például, ha  $L$  az  $\mathbb{R}^3$ -nak kétdimenziós altere (vagyis  $L$  egy olyan sík, amely az origón átmege), akkor  $L$ -nek bázisa minden olyan  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ , ahol  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$  tetszőleges  $\mathbf{0}$ -tól különböző nem párhuzamos vektorok.

### 1.2.3. Cramer-szabály

**9. DEFINÍCIÓ:** Legyen  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Legyen  $B_i$  az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy az  $A$  mátrixból kidobjuk az első sort, és az  $i$ -edik oszlopot:  $\begin{bmatrix} a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , ez egy  $B_i$   $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix.

Ekkor az  $A$  mátrix determinánsát definiálhatjuk a kisebb méretű  $B_i$  mátrixok determinánsával, azaz

$$\det(A) = a_{11} \det(B_1) - a_{12} \det(B_2) + a_{13} \det(B_3) - \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(B_n).$$

A  $B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) mátrixok determinánsait a még kisebb méretű mátrixokkal definiálhatjuk a fenti elv szerint. Így végül a méretek minden lépésben való csökkentésével eljutunk a  $2 \times 2$ -es mátrixok determinánsához, amit már definiáltunk a következő módon:  $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , akkor  $\det(D) = ad - bc$ .

**4. TÉTEL:** (Cramer-szabály): Tegyük fel, hogy az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$  mátrixának determinánása nem egyenlő nullával.

Legyen  $A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , a  $b_1, b_2, \dots, b_n$  az  $i$ -

edik oszlopban van. Ekkor az egyenletrendszer megoldása egyértelmű:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}; \dots; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

A Cramer-szabály olyan egyenletrendszerekre alkalmazható, ahol az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával, és az egyenletrendszer mátrixának determinánása **nem egyenlő nullával**.

Ezt a tételt akkor érdemes alkalmazni, mikor  $n$  kicsi, azaz  $n = 2, 3$ . Nagyobb  $n$ -ekre a sok  $(n + 1)$  determináns kiszámítása nagyon sok műveletet igényel. Nagy  $n$ -ekre a Cramer-szabálynak elméleti jelentősége van, ugyanis a Cramer-szabály garantálja, hogyha  $\det(A) \neq 0$ , akkor létezik és egyértelmű a megoldás.

**7. PÉLDA:** Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Megoldás:  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $\det(A) = 6 \neq 0$ ,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \det(A_1) = 6; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \det(A_2) = 0$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \det(A_3) = -12. \text{ Tehát}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1; \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 0; \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = -2.$$

### A Cramer-szabály egy fontos következménye:

Tekintsük a következő ún. homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Ennek az egyenletrendszernek legalább egy megoldása **mindig** van. Nevezetesen az  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ . A Cramer-szabály szerint ha az egyenletrendszer  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  determinánsa nem nulla, akkor a megoldás egyértelmű. Tehát, ha  $\det(A) \neq 0$ , akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek **csak a triviális**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \text{ a megoldása.}$$

**10. DEFINÍCIÓ:** Legyen  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbf{R}^n$ . Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorok által kifeszített  $L$  (jele:  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ ) altér azon  $\mathbf{b}$  vektorokból áll, amelyek előállnak az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  lineáris kombinációiként.

**1. LEMMA:**  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  egy lineáris altere az  $\mathbf{R}^n$ -nek.

**11. DEFINÍCIÓ:** Az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  rendszer *rangja* definíció szerint az  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  altér dimenziója.

### 1.3. Áttérés egyik bázisról a másikra

Az  $\mathbf{R}^n$  természetes bázisának hívjuk a  $T = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  bázist, ahol

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A  $\mathbf{v}$  vektor természetes bázisban vett koordinátáit vagy  $[\mathbf{v}]_T$ -vel jelöljük vagy egyszerűen csak  $\mathbf{v}$ -t írunk.

Ha  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  egy tetszőleges bázisa az  $\mathbf{R}^n$ -nek, akkor  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  vektor egyértelműen felírható

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$$

alakban. Ekkor azt mondjuk a  $B$  bázisban a  $\mathbf{v}$  vektor koordinátái:  $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ . Jelben:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

**8. PÉLDA:** Ha  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \end{bmatrix}$ , akkor

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$$

tehát  $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ , ahol a  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  bázis.

**5. TÉTEL:** Ha  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  egy tetszőleges bázisa az  $\mathbf{R}^n$ -nek, akkor  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  vektorra:

$$[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B,$$

ahol  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  egy mátrix, melynek első oszlopa  $\mathbf{u}_1$ , második oszlopa  $\mathbf{u}_2$ , ... , $n$ -edik oszlopa  $\mathbf{u}_n$ . Ezt a jelölést később is használjuk.

**Bizonyítás.** Ha  $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ , akkor

$$[\mathbf{v}]_T = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B. \quad \blacksquare$$

**1. KÖVETKEZMÉNY:** Egy  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$  vektor koordinátáit a  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  bázisban a következő formula adja:

$$[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]^{-1} \cdot [\mathbf{v}]_T. \quad (1.11)$$

**2. KÖVETKEZMÉNY:** Ha  $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  és  $B' = \{\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n\}$  bázisai az  $\mathbf{R}^n$ -nek és  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ , akkor

$$[\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}]_B \quad (1.12)$$

**12. DEFINÍCIÓ:** A  $[\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  mátrixot a  $B$  bázisról a  $B'$  bázisra való áttérés mátrixának hívjuk.

**9. PÉLDA:** Határozzuk meg a  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$  vektor koordinátáit a  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$  bázisban!

*Megoldás:* Legyen  $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ . A 1. Következmény miatt  $[\mathbf{v}]_B = P^{-1}\mathbf{v}$ . Mivel  $\det(P) = 10$ , ezért  $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ . Tehát

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.8 \\ -0.4 \end{bmatrix}.$$



**10. PÉLDA:** Adottak a következő bázisok:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \quad (1.13)$$

ha  $\mathbf{w}$  vektor koordinátái a  $B$ -ben  $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$  kérdés mik a  $\mathbf{w}$  koordinátái a  $B'$ -ben?

*Megoldás:* Alkalmazhatjuk a (1.12) formulát:

$$[\mathbf{w}]_{B'} = [\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2]^{-1} \cdot [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot [\mathbf{w}]_B. \quad (1.14)$$

Ehhez: Legyen  $P := [\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ . Ekkor  $\det(P) = 2$ , tehát  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ .

Tehát  $[\mathbf{w}]_{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{2} \\ -\frac{99}{2} \end{bmatrix}$ .

## 1.4. Lineáris transzformációk

**13. DEFINÍCIÓ:** Az  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^s$  leképezést lineáris transzformációnak hívjuk, ha

a.  $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n;$

b.  $F(c\mathbf{u}) = cF(\mathbf{u}); \forall c \in \mathbf{R} \text{ és } \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n.$

**11. PÉLDA:** A sík és az egyenes lineáris transzformációi:

1. Számegyenes lineáris transzformációi az  $F(x) = cx$  alakú függvények.
2. A sík lineáris transzformációi például az origó körüli forgatások, origón átmenő egyenesre tükrözések, vagy  $F(x_1, x_2) = (2x_1, 3x_2)$ .

**12. PÉLDA:** Határozzuk meg az origó körüli (pozitív irányú)  $30^\circ$ -os szöggel való forgatás mátrixát, majd ennek segítségével számítsuk ki a  $\mathbf{v} = [1, 5]$  vektor  $30^\circ$ -os szöggel való elforgatásával kapott  $\mathbf{w}$  vektort!

*Megoldás:* Mivel *nem* specifikáltuk, hogy melyik bázisról van szó, ezért az  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  természetes bázisban dolgozunk. Itt először meghatározzuk  $\mathbf{b}_1 = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$  és  $\mathbf{b}_2 = F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$  értékeket, majd ezekből képezzük a  $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$  mátrixot

$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  és  $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ . Tehát  $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ . Ennek segítségével megkaphatjuk annak a  $\mathbf{w}$  vektornak a koordinátáit, amit a  $\mathbf{v} = (1, 5)$  vektor origó körüli (pozitív irányú)  $30^\circ$ -os forgatásával kapunk:

$$\mathbf{w} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

**14. DEFINÍCIÓ:** Azt mondjuk, hogy a  $B := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  bázisban az  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  lineáris transzformáció mátrixa  $M_B$ , ha minden

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$$

vektorra:

$$[F(\mathbf{a})]_B = M_B \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M_B \cdot [\mathbf{a}]_B \quad (1.15)$$

teljesül.

Alkalmazva a definíciót az  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  vektorokra, kapjuk, hogy

$$M_B = \begin{bmatrix} [F(\mathbf{u}_1)]_B & [F(\mathbf{u}_2)]_B \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

vagyis, a  $2 \times 2$ -es  $M_B$  mátrix első oszlopa  $[F(\mathbf{u}_1)]_B$  és második oszlopa:  $[F(\mathbf{u}_2)]_B$ .

**13. PÉLDA:** Legyen  $T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ . Találjuk meg a  $T$  mátrixát:

a.) a természetes bázisban;

b.) az  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  bázisban.

Megoldás:

$$\text{a.) } T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ így a } T \text{ mátrixa a természetes}$$

$$\text{bázisban: } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b.) } T \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ ahol } \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ és } \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ a koordináták}$$

a természetes bázisban.

$$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1; \quad T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{u}_2 \text{ és } B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}.$$

$$[T(\mathbf{u}_1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [T(\mathbf{u}_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ így } [T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

### 1.4.1. Lineáris transzformáció mátrixai különböző bázisokban

**6. TÉTEL:** Legyen  $P := [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$  és legyen  $M_T$ , a  $F$  lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisban, és  $M_B$  a  $B$  bázisban. Ekkor

$$\boxed{M_B = P^{-1} \cdot M_T \cdot P}. \quad (1.17)$$

**Bizonyítás.** Rögzítsünk egy tetszőleges

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = P \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

vektort. Fel kell majd használnunk azt, hogy  $i = 1, 2$ -re:

$$[F(\mathbf{u}_i)]_B = P^{-1} \cdot [F(\mathbf{u}_i)]_T = P^{-1} \cdot M_T \cdot [\mathbf{u}_i]_T. \quad (1.18)$$

Az első azonosság a 2.20. Tételből, míg a második azonosság az  $M_T$  definíciójából adódik. Továbbá

$$[F(\mathbf{a})]_B = M_B \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F(\mathbf{u}_1)]_B & [F(\mathbf{u}_2)]_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Felhasználva (2.19)-et:

$$\begin{aligned} [[F(\mathbf{u}_1)]_B, [F(\mathbf{u}_2)]_B] &= [P^{-1} \cdot M_T \cdot [\mathbf{u}_1]_T, P^{-1} \cdot M_T \cdot [\mathbf{u}_2]_T] \\ &= P^{-1} \cdot M_T \cdot [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \\ &= P^{-1} \cdot M_T \cdot P. \end{aligned}$$

Innen és (2.21)-ből következik, hogy

$$M_B = P^{-1} \cdot M_T \cdot P.$$

■

## 1.5. Sajátértékek, sajátvektorok

**15. DEFINÍCIÓ:** Adott egy  $A$   $n \times n$ -es mátrix. Egy  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  vektort az  $A$  mátrix *sajátvektorának* nevezzük, ha az  $A\mathbf{x}$  vektor az  $\mathbf{x}$  vektornak valamilyen  $\lambda$ -szorososa. Azaz  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Ekkor a  $\lambda$  egy *sajátértéke* az  $A$  mátrixnak.

Vegyük észre, hogy

- a. ha  $\mathbf{x}$  egy sajátvektora az  $A$  mátrixnak, akkor  $2\mathbf{x}, 3\mathbf{x}$  és általában  $c\mathbf{x}$ , ahol  $c \in \mathbf{R}$ ,  $c \neq 0$  is egy sajátvektora az  $A$ -nak,
- b. abban az esetben is, ha az  $A$  összes eleme valós, mind a sajátértékek, mind a sajátvektorok komponensei lehetnek *komplex számok*.

**14. PÉLDA:** 1.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ , ekkor, ha  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$  és  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , akkor  $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$  és  $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$ . Vagyis  $\mathbf{u}_1$  a  $\lambda_1$ -hez,  $\mathbf{u}_2$  a  $\lambda_2$ -höz tartozó sajátvektorok.

2.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ . Legyen  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$  és  $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Ekkor látható, hogy  $A\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$  és  $A\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$ , vagyis  $\mathbf{u}_1$  egy a  $\lambda_1$  sajátértékhez tartozó sajátvektor, és  $\mathbf{u}_2$  egy olyan sajátvektor, ami a  $\lambda_2$ -höz tartozik.

*Kérdés:* Hogyan határozhatjuk meg egy  $A$   $n \times n$ -es mátrix sajátértékeit és a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat?

*Válasz:* Abból indulunk ki, hogy  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Használva az

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

egységmátrixot kapjuk :  $\lambda\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ , vagyis  $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$  , innen

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

A kapott homogén lineáris egyenletrendszernek az  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ -tól különböző megoldása (mint ezt a Cramer-szabály egy következményeként láttuk) *pont* akkor van, ha

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Tehát az  $A$  mátrix sajátértékei a  $\det(A - \lambda I) = 0$  egyenlet  $\lambda$ -ra történő megoldásai. A sajátvektorokat ezután az  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  egyenletből határozzuk meg.

**15. PÉLDA:**  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ . Határozzuk meg a sajátvektorokat és a sajátértékeket!

*Megoldás:* A  $\det(A - \lambda I) = 0$  egyenletet felhasználva,

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 5 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 5 = \lambda^2 - 9 + 5 = \lambda^2 - 4.$$

Tehát  $\lambda_1 = 2$  és  $\lambda_2 = -2$ .

Felhasználva az  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  egyenletet a  $\lambda_1$  és a  $\lambda_2$  értékekhez tartozó  $\mathbf{u}_1$  és  $\mathbf{u}_2$  sajátvektorok meghatározására.

$\lambda_1 = 2$  esetén:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 5 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Így  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$   $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  megoldása  $x_1 = x_2$ . Tehát egy, a  $\lambda_1$ -hez tartozó sajátvektor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$  esetén:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 5 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tehát  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$  az  $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Ennek megoldása:  $5x_1 = x_2$ .

Tehát egy, a  $\lambda_2 = -2$ -höz tartozó sajátvektor:  $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ .

## 1.6. Ortogonális mátrixok

**16. DEFINÍCIÓ:** Egy valós  $n \times n$ -es  $Q$  mátrixot *ortogonálisnak* hívunk, ha

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Vagyis, ha

$$Q^T Q = Q Q^T = I.$$

Legyen  $Q = [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{q}_n]$ , ekkor  $Q^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix}$ . A  $Q^T Q$  mátrix  $(i, j)$ -edik helyén

$$i \begin{bmatrix} \dots & \mathbf{q}_i^T & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ \vdots \\ \mathbf{q}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \bullet (\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix} i. \text{ Az } (i, j)\text{-edik he-}$$

lyen a  $Q^T Q = I$  értéke  $\begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ .

Tehát  $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$ , ha  $i \neq j$  és  $|\mathbf{q}_i| = 1$ . Az ilyen tulajdonságú  $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$  vektorrendszer *ortonormált rendszernek* nevezzük.

**17. DEFINÍCIÓ:** Egy  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$  vektor rendszer *ortonormált*, ha

- $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{q}_j$  minden  $i \neq j$ -re és
- $|\mathbf{q}_i| = 1$  minden  $i$ -re.

Vagyis azt kaptuk, hogy egy mátrix ortogonális akkor és csakis akkor, ha az oszlopvektorok rendszere ortonormált. Ez viszont azt jelenti, ha egy mátrix ortogonális, és felcseréljük az oszlopvektorok sorrendjét, akkor az így kapott új mátrix is ortogonális lesz.

**16. PÉLDA:** Az  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix ortogonális, mivel  $I^{-1} = I$  és  $I^T = I$ ,

így  $I^{-1} = I^T$ . Az előbbi megjegyzés miatt  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  és  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

mátrixok is ortogonálisak.

Miért szeretjük az ortogonális mátrixokat?

Azért szeretjük az ortogonális mátrixokat, mert a velük való szorzás *megőrzi a hosszat és a térfogatot*. Vagyis:

**7. TÉTEL:** Legyen  $Q$  egy  $n \times n$ -es ortogonális mátrix, és  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$  tetszőleges vektorok.

- (a)  $|Q\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$  megőrzi a hosszat,
- (b)  $(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$  megőrzi a szöget (hiszen megőrzi a skalárszorzatot is),
- (c)  $|\det(Q)| = 1$  megőrzi a térfogatot.

**Bizonyítás.** Csak az (a) részét bizonyítjuk a tételnek.

$$|Q\mathbf{x}| = \sqrt{(Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{x})} = \sqrt{\mathbf{x}^T \underbrace{Q^T Q}_I \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = |\mathbf{x}|. \blacksquare$$

## 1.7. Szimmetrikus mátrixok diagonalizálása

Egy  $n \times n$ -es  $A$  mátrixot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az  $A$  szimmetrikus a főátlójára, azaz  $a_{ij} = a_{ji}$ , ( $A^T = A$ ).

A szimmetrikus mátrixok egy nagyon fontos tulajdonsága, hogy:

**8. TÉTEL:** Egy szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós

Ennek felhasználásával be lehet bizonyítani, hogy:

**9. TÉTEL:** Legyen az  $A$  egy  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix. Ekkor létezik olyan  $Q$  ortogonális mátrix, amelyre  $Q^T A Q = D$ , ahol  $D$  egy diagonális mátrix.

**Bizonyítás.** Ha az  $A$  egy  $n \times n$ -es valós szimmetrikus mátrix, akkor az  $A$  minden sajátértéke valós, de nem feltétlenül különböző. Az egynél nagyobb multiplicitású gyökökhöz tartozó sajátvektorok terében ki szeretnénk választani egy ortogonális bázist erre szolgál az ún. "ortogonalizációs eljárás" ■

### Ortogonalizációs eljárás

Legyen  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  az  $\mathbf{R}^n$  tér lineárisan független vektorrendszere (nyilván  $k \leq n$ ). Mint mindig,  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  jelöli a kifeszített alteret, vagyis az  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  vektorokból képezhető összes lineáris kombinációk halmazát.

**17. PÉLDA:** Határozzuk meg az  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$  egy ortonormált bázisát (azaz  $k$  db vektort az  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ -ban, melyek hossza 1 és páronként merőlegesek)!

*Megoldás:* Ha  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  lineárisan független, akkor először egy ortogonális  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$  bázisát adjuk meg az  $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ -nak, majd a kívánt ortonormált rendszert a  $\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|}$  adja.

Legyen  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ . Határozzuk meg azt az  $\alpha_1$ -et, amire

$$\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$$

teljesíti a  $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$  feltételt. Vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1.$$

Innen

$$\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$

Ekkor tehát  $\mathbf{b}_2 \in L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  és  $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$ .

Határozzuk meg azt a  $\beta_1, \beta_2$  értéket, amire a

$$\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$$

vektorra teljesül, hogy  $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$  és  $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$ . Vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1 = \beta_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \underbrace{\beta_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1}_0 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$



Továbbá

$$0 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 = \beta_1 \underbrace{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}_0 + \beta_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}.$$

Ekkor tehát  $\mathbf{b}_3 \in L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  és  $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$ ;  $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$ . Az eljárás ugyanígy folytatjuk, amíg  $\mathbf{b}_k$ -t is meghatározzuk.

**18. PÉLDA:**  $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Határozzuk meg az

$L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ -nak egy ortonormált bázisát!

*Megoldás:*  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$ , ahol  $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1} = -\frac{1}{2}$ , így  $\mathbf{b}_2 = -\frac{1}{2} \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

$\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$ , ahol  $\beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1} = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$ , így

$$\mathbf{b}_3 = \underbrace{\beta_1}_{-\frac{1}{2}} \mathbf{b}_1 + \underbrace{\beta_2}_{-\frac{1}{3}} \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  ortogonális bázisa az

$L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ -nak. Azért, hogy ortonormált bázist kapjunk a hosszakkal le kell osztani:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát az  $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  egy ortonormált bázisa:

$$\left\{ \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}.$$

**10. TÉTEL:**  $A$  egy  $n \times n$ -es valós szimmetrikus mátrix. Ekkor az  $A$  különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai merőlegesek egymásra.

Ha az  $A$ -nak minden sajátértéke különböző, akkor a sajátvektorait egység hosszúnak választva, azonnal kapunk egy sajátvektorokból álló ortonormált rendszert.

Ha az  $A$  valamely sajátértékének multiplicitása nagyobb mint 1, akkor az ilyen sajátértékekhez tartozó sajátvektorokra alkalmazni kell az ortogonalizációs eljárást, hogy megkapjuk a sajátvektorok egy ortonormált rendszerét.

Tehát egy  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrixnak mindig van  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  sajátvektorokból álló ortonormált rendszere!

**19. PÉLDA:** Határozzuk meg az  $\mathbf{R}^4$  térnek az  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  mátrix

sajátvektorából álló ortonormált bázisát!

*Megoldás:*  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 1)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$  és  $\lambda_4 = -2$ . Könnyen találhatunk négy sajátvektort.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol  $\mathbf{w}_i$  a  $\lambda_i$ -nek felel meg és  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Ezután az  $L(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$  altér egy ortonormált bázisát az ortogonalizálási eljárással meghatározzuk, és a  $\mathbf{w}_4$ -et normáljuk.

$$\mathbf{c}_4 = \frac{\mathbf{w}_4}{|\mathbf{w}_4|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \text{ Az "Ortogonalizálási eljárás" című fejezet példájának eredményét felhasználva:}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}; \mathbf{c}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ez egy ortonormált bázisa  $\mathbf{R}^4$ -nek, mely az  $A$  sajátvektoraiból áll.

Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix. Legyen  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  az  $A$  mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált rendszer. Ekkor

- (i) a diagonalizálás fejezetben leírtak alapján a  $Q = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  mátrixra  $Q^{-1}AQ = D$ .  $D$  diagonális mátrix, melynek főátlójában az  $A$  mátrix sajátértékei vannak,
- (ii) mivel  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  egy ortonormált rendszer, így  $Q$  egy ortogonális mátrix.  $Q^{-1} = Q^T$ . Tehát  $Q^T A Q = D$ , ami egy diagonális mátrix.

**20. PÉLDA:** Legyen  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ . Ekkor az  $A$  sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ és } \lambda_2 = 3, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Innen

$$A = Q \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot Q^T.$$

Vegyük észre, hogy a jobboldali szorzat közepén álló diagonális mátrix főátlójának első eleme  $\lambda_1 = 1$  második eleme  $\lambda_2 = 3$ . Ennek a felbontásnak egyik alkalmazása a következő: Legyen

$$F(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$$

Ekkor az  $F$  lineáris transzformációnak a természetes bázisban a mátrixa az  $A$ . Ha áttérünk a  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  bázisra, akkor a fenti  $F$  lineáris transzformációnak a mátrixa a  $B$  bázisban a  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  diagonális mátrix lesz. Mivel ez a mátrix sokkal egyszerűbb mint az  $A$  mátrix ezért például ezen  $F$  lineáris transzformáció iteráltjainak vizsgálata sokkal egyszerűbben elvégezhető a  $B$  bázisban.



## 2. fejezet

# Lineáris algebra II.

A Lineáris algebra rész tárgyalásakor az [1] könyvet követjük. Ebben a könyvben rengeteg további feladat és érdekes gyakorlati alkalmazás, található.

### 2.1. Kiegészítés az A2-ben tanultakhoz

#### 2.1.1. determináns

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy  $n \times n$ -es mátrix. Az  $A$  mátrix  $a_{ij}$  elemének **minorja**  $M_{ij}$  annak a mátrixnak a determinánsa, amelyet úgy kapunk, hogy az  $A$  mátrixból eldobjuk az  $i$ -edik sort és a  $j$ -edik oszlopot. A

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

számot az  $a_{ij}$  elem **cofactorának** hívjuk. Ekkor

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}. \quad (2.1)$$

Ezt a kifejezést a **determináns  $i$ -edik sor szerinti cofactor kifejtésének** mondjuk.

**21. PÉLDA:** Legyen  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ . Ekkor tekinthetjük az utolsó sor szerinti cofactor kifejtést:

$$\det(A) = (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot (3 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = -16$$

A  $3 \times 3$ -as mátrix determinánsát meg kaphatjuk a következő módon is:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}) \quad (2.2)$$

Ennek egy elmés általánosításaként egy tetszőleges  $n \times n$ -es determináns kiszámítható. Ennek leírásához szükség van a következő fogalomra: ha az  $\{1, 2, \dots, n\}$  számok sorrendjének tetszőleges felcserélésével megkapjuk a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  számokat, akkor azt mondjuk, hogy a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  számok az  $\{1, 2, \dots, n\}$  egy **permutációja**. Azt mondjuk, hogy a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  permutáció páros, ha azon cserék száma amivel a  $\{j_1, \dots, j_n\}$ -ből az  $\{1, 2, \dots, n\}$  vissza nyerhető egy páros szám. Egyébként a permutáció páratlan. Például: ha  $n = 3$  az

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$$

permutációk párosak, míg a

$$\{3, 2, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{1, 3, 2\}$$

permutációk páratlanok. **Előjeles elemi szorzatnak** nevezzük a

$$\pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

alakú szorzatokat, ahol a  $+$  jelet akkor választjuk, ha a  $\{j_1, \dots, j_n\}$  permutáció páros egyébként a mínusz jelet választjuk.

**11. TÉTEL:**  $\det(A)$  egyenlő az összes lehetséges előjeles elemi szorzatok összegével.

Vegyük észre, hogy ez éppen (2.2) általánosítása. Ezen tételt használva be lehet látni, hogy:

**12. TÉTEL:** Minden  $A$  négyzetes ( $n \times n$ -es valamilyen  $n$ -re) mátrixra

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Ez azt is jelenti, hogy a (2.1)-ben adott sor szerinti cofactor kifejtés helyett az oszlop szerinti cofactor kifejtést is használhatjuk. Vagyis minden  $1 \leq j \leq n$ -re:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}. \quad (2.3)$$

### 2.1.2. Determináns geometriai jelentése:

Egy (négyzetes) mátrix determinánisa mindig egy szám. Ennek van abszolút értéke és előjele. Először megértjük a determináns abszolút értékének geometriai jelentését, azután pedig a determináns előjelének a geometriai jelentését értjük meg.

**A determináns abszolút értékének a jelentése:**

Jelöljük az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix  $j$ -edik oszlop vektorát  $\mathbf{u}_j$ -vel. Vagyis

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$$

Vegyük észre, hogy

$$A \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i,$$

ahol  $\mathbf{e}_i$  az  $i$ -edik koordináta egység vektor, vagyis az a vektor, aminek minden koordinátája 0 kivéve az  $i$ -edik koordinátát ami viszont 1-el egyenlő. Ezért az

$$\mathbf{y} \rightarrow A \cdot \mathbf{y} \tag{2.4}$$

leképezés az  $\mathbb{R}^n$  egység kockáját vagyis a

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1\}$$

halmazt  $1 - 1$  értelműen rá képezi az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  vektorok által kifeszített  $P < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n >$  paralelepipedonra. **A determináns abszolút értéke éppen ezen  $P < \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n >$  paralelepipedon térfogata.** Vagyis az  $A$  mátrix determinánsának abszolút értéke azt mondja meg, hogy az

$$f : \mathbf{y} \rightarrow A \cdot \mathbf{y}$$

lineáris leképezés esetén egy  $H \subset \mathbb{R}^n$  halmaz  $f(H)$  képének térfogata hányszorosa a  $H$  térfogatának. Képletben:

$$\text{térfogat } f(H) = |\det(A)| \cdot \text{térfogat}(H).$$

### A determináns előjelének jelentése:

Ha a determináns előjele pozitív, akkor az

$$f : \mathbf{y} \rightarrow A \cdot \mathbf{y}$$

leképezés irányítás tartó (mint például a forgatások). Ha a determináns előjele negatív az  $f$  irányítás váltó (mint például a tükrözések).

### 2.1.3. Mátrix nyoma

Legyen  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^d$  egy négyzetes ( $d \times d$ -es) mátrix. Ekkor az  $A$  mátrix nyoma (jelben:  $\text{tr}(A)$  vagy  $\text{sp}(A)$ ) az  $A$  mátrix főátlójában álló elemek összege:

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^d a_{kk}.$$

**22. PÉLDA:** Legyen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ . Ekkor  $\text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15$ .

Mátrix nyomának legfőbb tulajdonságai: Legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges  $d \times d$ -es mátrixok. Ekkor:

1.  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$
2. Minden  $c$  konstansra:  $\text{tr}(c \cdot A) = c \cdot \text{tr}(A)$ .
3.  $\text{tr}(A \pm B) = \text{tr}(A) \pm \text{tr}(B)$
4.  $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$
5. Ha  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  az  $A$  mátrix összes sajátértékei (multiplicitással, vagyis minden sajátérték annyiszor felsorolva ahányszoros sajátérték), akkor

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_d.$$

Megjegyezzük, hogy

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_d.$$

Vagyis mind a mátrix nyoma mind a determinánsa csak am mátrix sajátértékeitől függ. Ebből az következik, hogy ha  $A$  és  $B$  két olyan mátrix, melyek ugyanazon lineáris transzformációnak a mátrixai más-más bázisban, akkor mind  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$  mind pedig  $\det(A) = \det(B)$ .



### 2.1.4. Mátrixok kétpontos szorzata

A mérnöki matematikai szakirodalomban gyakran előfordul a mátrixok kétpontos szorzata. (Matematika könyvekben nem.) Legyenek adva a következő  $d \times d$ -es mátrixok:

$$A = (a_{i,j})_{i,j=1}^d \text{ és } B = (b_{i,j})_{i,j=1}^d.$$

Az  $A$  és  $B$  mátrixok kétpontos szorzata (jelben  $A : B$ ) a skalárszorzat mintájára van definiálva. Vagyis:

$$A : B = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} b_{i,j}. \quad (2.5)$$

**23. PÉLDA:** Legyen  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  és  $B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ . Ekkor  $A : B = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 70$ .

Vegyük észre, hogy az  $A^T \cdot B$  mátrix  $k$ -adik sorának  $k$ -adik eleme  $\sum_{i,j=1}^d a_{k,i}^T b_{i,k} = \sum_{i,j=1}^d a_{i,k} b_{i,k}$ . Ezt összegezve minden  $1 \leq k \leq d$ -re, kapjuk, hogy

$$A : B = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{k=1}^d \sum_{i,j=1}^d a_{i,k} b_{i,k} = \sum_{k=1}^d \sum_{i,j=1}^d a_{k,i}^T b_{i,k} = \text{tr}(A^T \cdot B). \quad (2.6)$$

### 2.1.5. Ferdén szimmetrikus mátrixok

Legyen  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^d$  egy  $d \times d$ -es mátrix. Azt mondjuk, hogy az  $A$  egy ferdén szimmetrikus mátrix, ha  $A = -A^T$ . Vagyis, ha tükrözzük az  $A$  elemeit az  $A$  főátlójára (arra az átlóra, ami a bal felső sarokból megy a jobb alsó sarokba), akkor ezen tükrözés eredményeképpen az  $A$  mátrix mínusz egyszeresét kapjuk.

**13. TÉTEL:** Ha  $A$  négyzetes mátrix, akkor  $A$  előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként.

**Bizonyítás.** Legyen  $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$  és  $R = \frac{1}{2}(A - A^T)$ . Ekkor  $S$  szimmetrikus és  $R$  pedig ferdén szimmetrikus mátrixok. Nyilván  $A = S + R$ . ■

### 2.1.6. Gauss-Jordan elimináció

Az A2 előadáson tanult Gauss elimináció során a mátrixot sor-echelon alakra hoztuk elemi sor transzformációk egymás utáni alkalmazásaival. Emlékeztetek, hogy egy mátrix sor echelon alakban van ha:

1. A csupa nullából álló sorok (ha vannak a mátrixban egyáltalán) a mátrix utolsó sorai.
2. Ha egy sornak van nem nulla eleme, akkor az első nem nulla elem egyes.
3. Két egymás utáni sor mindegyike tartalmaz nem nulla elemet, akkor az első nem nulla elem (ami szükségszerűen egyes) az alsó sorban, jobbra van a felső sor első nem nulla elemétől (ami szintén egyes).

Nevezzük a fenti definícióban szereplő minden nem csupa nulla sor elején álló egyeseket **pivot elemek**nek és ezen elemek oszlopait **pivot oszlopok**nak. A sor echelon alakból a redukált sor echelon alakot úgy kapjuk hogy ha a sor-echelon alakból indulva, a pivot elemek sorainak megfelelő többszöröseit levonva a felettük lévő sorokból elérjük, hogy a mátrixban a pivot elemek felett csak nullák legyenek.

#### 24. PÉLDA:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Az  $A$  mátrixból sor-echelon alakra hozás után kapjuk az:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol a pirossal írt elemek a pivot elemek. Most alakítjuk ki a redukált sor-echelon formát:

Az utolsó nem csupa nulla sor (vagyis a mi esetünkben a harmadik sor) megfelelő szám szorosait hozzáadjuk a megelőző sorokhoz, hogy az utolsó nem csupa nulla sor pivot eleme felett csak nullák legyenek:

Vagyis az utolsó sor  $\frac{7}{2}$ -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és ugyanebben a lépésben az utolsó sor  $-6$  szorosát hozzáadjuk az első sorhoz. Kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

ahol a kék szín jelöli az újonnan kialakított nullákat az utolsó sor pivot eleme (piros 1-es) felett. Most az így kapott mátrix második sorának pivot eleme feletti pozícióban akarunk nullát kialakítani. Ehhez, hozzáadjuk a második sor 5-szörösét az első sorhoz. Ennek eredményeként kapjuk a redukált sor-echelon alakú mátrixot:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy az  $A'$  sor-echelon alakban és az  $A''$  redukált sor-echelon alakban a pivot elemek ugyanazok.

Azt a folyamatot, amelynek során az  $A$  mátrixból a redukált sor-echelon alakú  $A''$  mátrixot létrehoztuk **Gauss-Jordán eliminációnak** hívjuk.

```
> with(linalg):
```

```
> A:=matrix(3,6,[0,0,-2,0,7,12,2,4,-10,6,12,28,2,4,-5,6,-5,-1]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>gaussjordan(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**25. PÉLDA:** Adott a síkon 4 pont, melyek  $x$  koordinátái különbözőek. Ehhez létezik egyetlen olyan legfeljebb harmadfokú polinom, amely mind a négy adott ponton átmegy. Határozzuk meg ezt a polinomot, ha a pontok

$$P_1 = (-2, -2), P_2 = (-1, 4), P_3 = (1, 2), P_4 = (2, 3).$$

Megoldás: Jelöljük a keresett (legfeljebb) harmadfokú polinomot  $p(x)$ -el. Ekkor

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Azt hogy a  $p(x)$  polinom átmegy az adott négy ponton a következő négy egyenlet írja le:

$$\begin{aligned} a_0 + (-2)a_1 + (-2)^2a_2 + (-2)^3a_3 &= -2 \\ a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2a_2 + (-1)^3a_3 &= 4 \\ a_0 + (1)a_1 + (1)^2a_2 + (1)^3a_3 &= 2 \\ a_0 + (2)a_1 + (2)^2a_2 + (2)^3a_3 &= 3 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

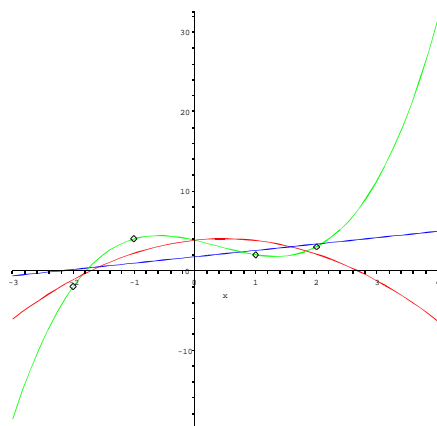
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ezt Gauss-Jordan eliminációval redukált sor-echelon alakra hozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Az utolsó oszlopban álló elemek adják rendre  $a_0, a_1, a_2, a_3$  értékét. Vagyis a keresett polinom:

$$p(x) = \frac{23}{6} - \frac{7}{4}x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3.$$



2.1. ábra. A  $P_1, \dots, P_4$  pontokat legjobban megközelítő első- (kék) másod- (piros) és harmadfokú (zöld) polinomok.

Ezt az ábrát a következő MAPLE program eredményezi:

```
> x1:=[-2,-1,1,2]:
```

```
> y1:=[-2,4,2,3]:
```

```
> #corresponding data points:
```

```
> with(stats):with(plots):
```

Warning, these names have been redefined: anova, describe, fit,

```

importdata, random, statevalf, statplots, transform

> pts:=zip((x,y)->[x,y],x1,y1):
> pt_plot:=pointplot(pts):
> inter_poly:=interp(x1,y1,x):
> ip_plot:=plot(inter_poly, x=-3..4,color=GREEN):
> ls_fit1:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x+b, {a,b}]]([x1,y1]):
> ls_plot1:=plot(rhs(ls_fit1),x=-3..4,color=blue):
> ls_fit2:=fit[leastsquare[[x,y],y=a*x^2+b*x+c, {a,b,c}]]([x1,y1]):
> ls_plot2:=plot(rhs(ls_fit2),x=-3..4,color=red):
> display([pt_plot,ls_plot1,ls_plot2,ip_plot]);

```

### 2.1.7. Kifeszített altér bázisának meghatározása

Adottak az  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\} \in \mathbb{R}^d$ -beli vektorok. Legyen  $W \subset \mathbb{R}^d$  az  $S$  által kifeszített altér. Vagyis  $W$  azon vektorok összesége, amelyek előállnak  $S$ -beli vektorok lineáris kombinációjaként.

$$W = \{\mathbf{w} : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_s; \mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_s \mathbf{v}_s\}.$$

Két természetes probléma fordul elő nagyon gyakran:

1. Találjuk meg  $W$  egy *tetszőleges* bázisát.
2. Találjuk meg  $W$  egy olyan bázisát, *amely  $S$ -beli vektorokból áll.*

Az első problémát megoldottuk A2-ben. Nevezetesen az  $S$ -beli vektorokból mint **sor vektorokból** alkottunk egy  $B$  mátrixot. Ezt a  $B$  mátrixot Gauss eliminációval sor-echelon alakra hoztuk. A nem nulla sor vektorok alkották a  $W$  egy bázisát. Ez így egyszerű és nagyon gyors, viszont az ilyen módon kapott bázis vektorok általában nem

az  $S$ -beli vektorok közül kerülnek ki tehát ez a módszer megoldja az első problémát de nem oldja meg a nehezebb második problémát. A második probléma megoldásához szükséges a következő észrevétel:

**Észrevétel:**

Legyen  $A$  egy  $k \times s$  méretű mátrix melynek oszlop vektorai  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^k$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_s]. \quad (2.7)$$

Tegyük fel, hogy az oszlop vektorok között fennáll

$$\mathbf{c}_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}_k.$$

Hajtsunk végre egy tetszőleges elemi sor transzformációt az  $A$  mátrixon. Így kapjuk az  $A'$  mátrixot, melynek oszlop vektorait jelöljük  $\mathbf{c}'_1, \dots, \mathbf{c}'_s \in \mathbb{R}^k$ -vel. Vagyis az elemi sor transzformáció eredménye:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k1} & \dots & a'_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}'_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}'_s]. \quad (2.8)$$

**14. TÉTEL:** Használva a fenti jelöléseket:

$$\mathbf{c}'_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k \mathbf{c}'_k.$$

Vagyis az  $A'$  mátrix oszlop vektorai között ugyanazok az összefüggőségi viszonyok vannak mint az  $A$  mátrix esetén.

**A fenti 2. probléma megoldása az Észrevétel segítségével:**

Legyen  $A$  az a  $k \times s$  méretű mátrix, melynek oszlop vektorait az  $S$  elemei ugyanazon sorrendben.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_s]. \quad (2.9)$$

Hajtsuk végre a Gauss-Jordan eliminációt. Vagyis az  $A$  mátrixból kiindulva hajtsuk végre elemi sor transzformációk azon sorozatát, melynek eredményeként kapunk egy redukált sor-echelon alakú mátrixot, melyet  $A'$ -nek nevezünk. Ennek a pivot oszlopainak megfelelő  $S$ -beli elemek alkotják a  $W$ -nek  $S$ -beli bázisát.

**26. PÉLDA:** Legyen  $W$  a következő vektorok által kifeszített altere  $\mathbb{R}^4$ -nek:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a  $W$  egy olyan bázisát, melynek minden eleme ezen  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$  vektorok közül kerül ki.

**Megoldás:** Legyen  $A$  az a mátrix, melynek oszlop vektorai az adott vektorok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alkalmazzuk a Gauss-Jordan eliminációt a **MAPLE** segítségével:

```
> with(linalg):
> A:=matrix(4,5,[1,2,0,2,5,-2,-5,1,-1,-8,0,-3,3,4,1,3,6,0,-7,2]):
> gaussjord(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a késsel írt elemek a pivot elemek az oszlopaik a pivot oszlopok. A tétel értelmében a pivot oszlopoknak megfelelő sorszámú  $\mathbf{v}$  vektorok alkotják a  $W$  bázisát. Vagyis a

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$$

a  $W$  egy bázisát adja.



## 2.2. A mátrix fundamentális alterei

**18. DEFINÍCIÓ:** Adott egy  $k \times s$  méretű  $A$  mátrix, melynek: oszlop vektorai:  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^k$  és a sor vektorai  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^s$ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{ks} \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_s] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

1.  $\mathbb{R}^k$ -ban azon alteret, melyet az  $A$  mátrix  $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_s\}$  oszlop vektorai feszítenek ki  $\text{col}(A)$ -val jelöljük.
2.  $\mathbb{R}^s$ -ben azon alteret, melyet az  $A$  mátrix  $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k\}$  sor vektorai feszítenek ki  $\text{row}(A)$ -val jelöljük.
3. A2-ben tanultuk, hogy a sor vektorok és az oszlop vektorok által kifeszített alterek (noha az első  $\mathbb{R}^s$ -beli a második  $\mathbb{R}^k$ -beli) dimenziói egyenlőek. Ezen közös dimenziót hívjuk a mátrix rangjának, jele:  $\text{rank}(A)$ .
4. Az  $A$  mátrix nullterének hívjuk azon  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$  vektorok alterét, melyekre:  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , jele  $\text{null}(A)$ . Az  $A$  nullterének dimenziója az  $A$  nulltuty-je, jele  $\text{nullity}(A)$ .

Mivel az  $A$  mátrix-al együtt az  $A^T$  transzponált mátrix is fontos ezért a transzponált mátrixra is fel akarjuk írni ugyanezeket a mennyiségeket. Viszont a transzponálás sort oszlopba visz és viszont, ezért:

$$\text{row}(A^T) = \text{col}(A) \text{ és } \text{row}(A) = \text{col}(A^T).$$

**19. DEFINÍCIÓ:** Az  $A$  mátrix fundamentális alterei:

$$\text{row}(A), \quad \text{col}(A), \quad \text{null}(A), \quad \text{null}(A^T).$$

## 2.3. Dimenzió tétel mátrixokra

**15. TÉTEL: (Dimenzió tétel mátrixokra)** Legyen  $A$  egy  $k \times s$  méretű (tehát nem feltétlen négyzetes) mátrix. Ekkor

$$\boxed{\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = s.} \quad (2.11)$$

**Bizonyítás.** Tekintsük az

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletet (itt  $\mathbf{x}, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^s$ ). Gauss eliminációt alkalmazva ezen egyenlet kiegészített mátrixát sor-echelon alakra hozzuk. Tegyük fel, hogy a nem csupa nulla sorok száma  $r$ -el egyenlő. Ekkor  $\text{rank}(A) = r$ . Minden nem csupa nulla sor egy ki nem küszöbölhető egyenletet jelent ami meg köt egy változót. Tehát az összesen  $s$  változóból megkötünk  $r$  változót. Így tehát marad  $s - r$  szabad változónk. Vagyis:

$$\text{szabad változók száma} = s - \text{rank}(A)$$

Más szavakkal:

$$\text{rank}(A) + \text{szabad változók száma} = s.$$

Másrészt a szabad változók száma éppen az  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  egyenlet megoldásai által meghatározott altér dimenziója. Más szavakkal:

$$\text{nullity}(A) = \text{szabad változók száma}.$$

Összetéve a két utolsó egyenletet kapjuk a tétel állítását. ■

Legyen  $S \subset \mathbb{R}^d$ . Ekkor az  $S$  merőleges alterének hívjuk azon  $\mathbb{R}^d$ -beli vektorok halmazát, melyek az  $S$  összes elemére merőlegesek, jele  $S^\perp$ .

$$S^\perp := \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d : \forall \mathbf{v} \in S; \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \}.$$

**16. TÉTEL: (Alterekre vonatkozó dimenzió tétel)** Legyen  $W$  az  $\mathbb{R}^s$  egy altere. Ekkor

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = s.$$

**Bizonyítás.** Ha  $W$  az  $\mathbb{R}^s$ -nek a két triviális altere  $(\mathbf{0}, \mathbb{R}^s)$  közül az egyik, akkor a tétel triviálisan igaz. Egyébként pedig választunk egy bázist a  $W$ . Tegyük fel, hogy ez a bázis  $k$  elemű. Ebből a bázisból mint sor vektorokból képezzük a  $k \times s$  méretű  $A$  mátrixot. Nyilván

$$\text{row}(A) = W \text{ és } \text{null}(A) = W^\perp. \quad (2.12)$$

■ Tehát az előző tételt használva:

$$\dim W + \dim W^\perp = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = s.$$

**Házi feladat:** Igazoljuk, hogy minden  $A$  mátrixra:

(a)

$$\boxed{\text{col}(A)^\perp = \text{null}(A^T)}. \quad (2.13)$$

(b)

$$\boxed{\text{row}(A)^\perp = \text{null}(A)}. \quad (2.14)$$

A fenti tétel következtében belátható, hogy:

**17. TÉTEL:** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es (tehát négyzetes) mátrix. Legyen továbbá  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  az  $A$  mátrixhoz tartozó lineáris leképezés melyet a következőképpen definiálunk:

$$\mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x}.$$

Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- (a) Az  $A$  mátrix redukált sor-echelon alakja egyenlő az  $n$ -dimenziós egység mátrix-al  $I_n$ -el.
- (b) Az  $A$  mátrixot felírhatjuk elemi mátrixok szorzataként.
- (c) Az  $A$  mátrix invertálható.
- (d)  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ -nak a triviális  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  az egyetlen megoldása.
- (f) Minden  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ -re az  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ -nek pontosan egy megoldása van.
- (g)  $\det(A) \neq 0$ .
- (h)  $\lambda = 0$  nem sajátértéke az  $A$  mátrixnak.
- (i)  $T_A$  leképezés 1 – 1 értelmű.
- (j)  $T_A$  leképezés ráképezés  $\mathbb{R}^n$ -re.
- (k) Az  $A$  mátrix oszlop vektorai lineárisan függetlenek.
- (l) Az  $A$  mátrix sor vektorai lineárisan függetlenek.
- (m) Az  $A$  mátrix oszlop vektorai az  $\mathbb{R}^n$  egy bázisát alkotják.
- (n) Az  $A$  mátrix sor vektorai az  $\mathbb{R}^n$  egy bázisát alkotják.
- (o)  $\text{rank}(A) = n$ .
- (p)  $\text{nullity}(A) = 0$ .

A 16. Tétel egy másik következménye:

**18. TÉTEL:** Legyen  $W$  az  $\mathbb{R}^n$ -nek egy  $n - 1$  dimenziós altere. Ekkor létezik egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  vektor, hogy

$$W^\perp = \{c \cdot \mathbf{a} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Vagyis  $W^\perp$  az  $\mathbf{a}$  vektor által meghatározott egyenes. Az ilyen  $W$  altereket **hipersíkoknak** hívjuk.

**Bizonyítás.** 16. Tételből tudjuk, hogy ekkor  $\dim(W^\perp) = 1$  vagyis  $W^\perp$  egy origón átmenő egyenes. ■

A 16. tétel alkalmazásaként kapjuk a következő tételt is, amelyet a későbbiekben használni fogunk:

**19. TÉTEL:** Legyen  $A$  egy tetszőleges mátrix. Ekkor

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A).$$

**Bizonyítás.** Jelöljük az  $A$  sorainak számát  $k$ -el és oszlopainak számát  $s$ -el. Tehát az  $A$  egy  $k \times s$  méretű mátrix. A 15. Tételből miatt elég azt belátni, hogy

$$\text{nullity}(A) = \text{nullity}(A^T A).$$

Ehhez elég megmutatni, hogy

$$\text{null}(A) = \text{null}(A^T A). \quad (2.15)$$

Ehhez két dolgot kell megmutatni:

(a) Ha  $\mathbf{a} \in \text{null}(A)$ , akkor  $\mathbf{a} \in \text{null}(A^T A)$

(b) Ha  $\mathbf{a} \in \text{null}(A^T A)$ , akkor  $\mathbf{a} \in \text{null}(A)$

Az (a) triviális hiszen

$$\mathbf{a} \in \text{null}(A) \Leftrightarrow A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow A^T \cdot (A \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow (A^T A) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Most megmutatjuk, hogy a (b) rész is teljesül: Legyen  $\mathbf{a} \in \text{null}(A^T A)$ . Ez azt jelenti, hogy  $A^T A \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^s$  vektor merőleges a  $\text{row } A^T A$  altérre. Vegyük észre, hogy

$$(A^T A)^T = A^T A$$

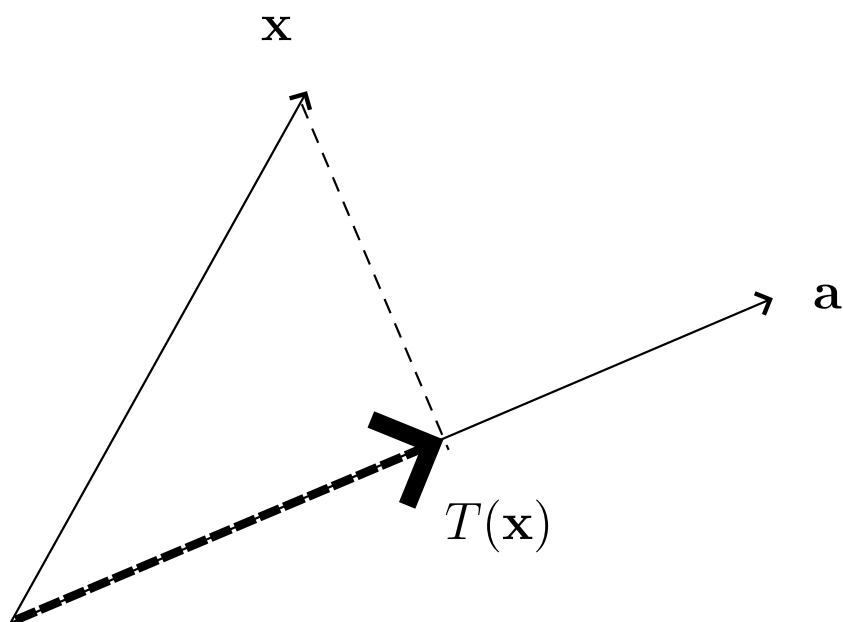
vagyis az  $A^T A$  mátrix szimmetrikus. Ezért az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges a  $\text{col}(A^T A) = \text{row}(A^T A)$  altérre is. Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges minden  $A^T A \cdot \mathbf{y}$  alakú vektorra bármi is az  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$  vektor. Tehát az  $\mathbf{a}$  vektor merőleges az  $A^T A \cdot \mathbf{a}$  vektorra is. Ezért:

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}^T \cdot ((A^T A)\mathbf{a}) = (\mathbf{a}^T A^T) \cdot (A\mathbf{a}) = (A\mathbf{a})^T \cdot (A\mathbf{a}).$$

Innen pedig  $\mathbf{0} = A\mathbf{a}$  vagyis  $\mathbf{a} \in \text{null}(A)$ . ■

## 2.4. Merőleges vetítések $\mathbb{R}^n$ -ben

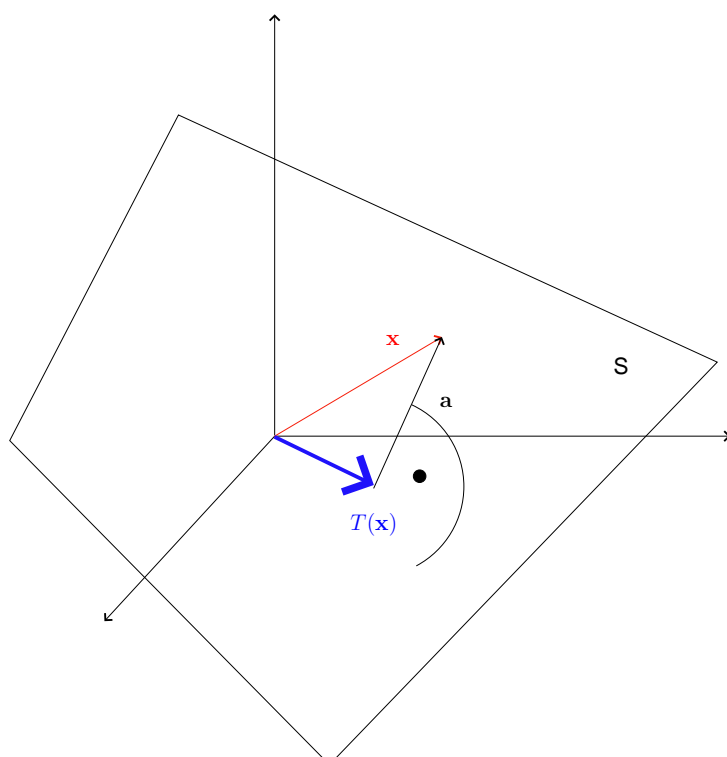
**1. FELADAT: (Merőleges vetítés  $\mathbb{R}^2$ -ben)** Rögzítsünk egy  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$  vektort. Legyen  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  az a lineáris transzformáció, amely minden  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  vektorhoz hozzá rendeli ezen  $\mathbf{x}$  vektornak az  $\mathbf{a}$  vektor egyenesére vett merőleges vetület vektorát (l. 2.2. ábra).



2.2. ábra.  $T(\mathbf{x})$  az  $\mathbf{a}$  vektor egyenesére való merőleges vetület **vektor**

**2. FELADAT: (Merőleges vetítés  $\mathbb{R}^3$ -ban)** Rögzítsünk  $\mathbb{R}^3$ -ban egy olyan  $S$  síkot, amely átmegy az origón. Legyen  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  az a lineáris transzformáció, amely minden  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  vektorhoz hozzá rendeli ezen  $\mathbf{x}$  vektornak az  $S$  síkra vett merőleges vetület vektorát (l. 2.3. ábra).

Most a fentiekhez hasonló feladatok megoldásait tanuljuk meg abban az esetben mikor  $n$  dimenziós térben valamely  $k < n$  dimenziós altérre vetítünk.

2.3. ábra.  $T(\mathbf{x})$  az  $S$  síkra való merőleges vetület **vektor**

A fenti **1. Feladat megoldása:**

$$T(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{x} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \mathbf{a}}_{\text{az } \mathbf{x}\text{-nek az } \mathbf{a}\text{-ra vett vetületének hossza}} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \mathbf{a}$$

Tehát

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{a}.$$

Nyilvánvalóan a nevezőt felírhatjuk mint  $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$ .

## 2. LEMMA:

$$P = \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a}^T$$

$2 \times 2$ -es mátrixot, akkor erre

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} \tag{2.16}$$

teljesül, vagyis a  $T$  lineáris transzformáció mátrixa a természetes bázisban a  $P$  mátrix.

**Bizonyítás.** Mint fent láttuk  $T(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \cdot [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}]$ . Most felírjuk az  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$  kifejezést mátrixos formában. Vegyük észre, hogy itt  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})$  egy szám (a szorzat vektorok skaláris szorzata). Emlékeztetünk, hogy a vektorokat mint oszlop vektorokat ágyazzuk be a mátrixok világába. Tehát egy  $\mathbf{y}$  megfelel egy  $n \times 1$ -es mátrixnak. Ha az  $\mathbf{y}$  vektort sor vektorként akarjuk szerepeltetni a mátrixok világában, akkor  $\mathbf{y}^T$ -at írunk. Tehát az  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}$  kifejezés az  $\mathbf{a}$  vektor egy szám szorosát adja, vagyis egy olyan vektor ami párhuzamos az  $\mathbf{a}$  vektorral. Az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{a}$  vektorok skalár szorzata tehát mátrixokban:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}.$$

Amiből

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T) \mathbf{x}.$$

Vagyis a  $P$  mátrix valóban  $\frac{1}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} \mathbf{a}^T$

■



## 2.5. Altérre vonatkozó projekció mátrixa

**20. TÉTEL: (Altérre vonatkozó projekciós tétel)** Adott egy nem triviális  $W$  altér  $\mathbb{R}^n$ -nek. Legyen  $T_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  az a lineáris transzformáció, amely minden  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektorhoz hozzárendeli az  $\mathbf{x}$  vektornak a  $W$  altérre való merőleges vetületét. Ekkor a  $T$  lineáris transzformáció  $P$  mátrixát a természetes bázisban megkapjuk a következőképpen:

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T, \quad (2.17)$$

ahol  $M$  egy olyan mátrix, melynek oszlop vektorai a  $W$  egy bázisának elemei.

**1. MEGJEGYZÉS:** Így persze az  $M$  mátrix választása nem egyértelmű, de attól függetlenül a  $P$  mátrix természetesen ugyanaz lesz az  $M$  minden lehetséges értékeire.

**27. PÉLDA:** Legyen  $S$  az  $x - 4y + 2z = 0$  sík.

(a) Határozzuk meg az  $S$ -re való merőleges vetítés  $P$  mátrixát!

(b) Használva az előző rész eredményét számítsuk ki az  $A = (1, 3, 7)$  pontnak az  $S$  síkra eső merőleges vetületét!

**Megoldás (a):** Vegyünk két nem párhuzamos vektort az  $S$  síkból. Ezek nyilván az  $S$  egy bázisát adják. Ezt megtehetjük úgy hogy az egyik pont esetén:  $y = 1, z = 0$  majd a másik pont esetén  $y = 0, z = 1$  értékeket választjuk. Ekkor az első esetben  $x = 4$  a másodikban pedig  $x = -2$ . Tehát az  $S$  sík egy bázisa:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ezért az  $M$  mátrix:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maple használatával:

```
> with(linalg):
```

```
> M:=matrix(3,2,[4,-2,1,0,0,1]):
```

```
> B:=inverse(multiply(transpose(M),M)):
```

```
> P:=multiply(M,B,transpose(M));
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T = \frac{1}{21} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & 8 & 17 \end{bmatrix}.$$

Megoldás (b):  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$T(\mathbf{x}) = P \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{20}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{8}{21} \\ -\frac{2}{21} & \frac{8}{21} & \frac{17}{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{25}{7} \\ \frac{47}{7} \end{bmatrix}.$$

**20. Tétel bizonyítása.** Legyen  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  egy bázisa  $W$ -nek. Legyen  $M$  az az  $n \times k$  méretű mátrix, melynek oszlopai a  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  vektorok. Jelben:

$$M = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k]$$

Ekkor mint azt (2.14)-ban láttuk

$$W = \text{col}(M) \text{ és } W^\perp = \text{null}(M^T),$$

Tehát az  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektort fel kell írni mint

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{x}) + \mathbf{a}, \quad (2.18)$$

ahol  $T(\mathbf{x}) \in \text{col}(M)$  és  $M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$  teljesül. Vegyük észre, hogy

$$T(\mathbf{x}) \in \text{col}(M) \Leftrightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k : T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \quad (2.19)$$

és

$$M^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow M^T \underbrace{(\mathbf{x} - T(\mathbf{x}))}_{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Tehát HA be tudjuk látni, hogy létezik **egyetlen**  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$  amire:

$$M^T \cdot (\mathbf{x} - M \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

akkor

$$T(\mathbf{x}) = M \cdot \mathbf{v} \text{ és } \mathbf{a} = \mathbf{x} - T(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

adja a fent keresett megoldást egyértelműen. Ehhez írjuk át a (2.21) egyenletet:

$$(M^T M) \cdot \mathbf{v} = M^T \cdot \mathbf{x}. \quad (2.23)$$

Ennek az egyenletnek létezik és egyértelmű a megoldása az ismeretlen  $\mathbf{v}$  vektorra, mivel

- az  $M^T M$  egy  $k \times k$ -as mátrix,

- $\text{rank}(M^T M) = k$ .

A második állítás abból jön, hogy egyrészt  $\text{rank}(M) = k$ , másrészt minden  $B$  mátrixra  $\text{rank}(B^T B) = \text{rank}(B)$  (ez a 19. Tétel). Tehát a (2.23) egyenletnek létezik és egyértelmű megoldása az ismeretlen  $\mathbf{v}$  vektorra. Nevezetesen:

$$\mathbf{v} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

Innen és (2.22) egyenletből adódik, a keresett

$$T(\mathbf{x}) = M (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{x}.$$

■

### 2.5.1. Alkalmazás I. lineáris egyenletrendszerek

Adott egy lineáris egyenletrendszer, amely  $m$  egyenletből és  $n$  ismeretlenből áll. Legyen ennek mátrixa  $A$ . Ekkor az egyenletrendszer leírható:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.24}$$

alakban. Ha ezt meg tudjuk oldani akkor jó. Ha viszont nem megoldható akkor is tehetünk valamit, nevezetesen meg lehet keresni azt az  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektort, amire

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

a minimális. Mivel

$$\text{col}(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{w} = A \cdot \mathbf{y}\}$$

ezért értelemszerűen azt az  $\mathbf{x}$  vektort amire  $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$  értéke a minimális megkapjuk mint a  $\mathbf{b}$  merőleges vetületét a  $\text{col}(A)$  altérre. Nevezetesen: Legyen

$\mathbf{b}^*$  a  $\mathbf{b}$  vektornak a  $\text{col}(A)$ -ra vett merőleges vetülete.

A 20. Tétel segítségével a  $\mathbf{b}^*$  vektor meghatározható. Mivel definíció szerint  $\mathbf{b}^* \in \text{col}(A)$  ezért a

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}^* \tag{2.25}$$

egyenletnek van legalább egy (esetleg végtelen sok) megoldása. Megoldva ezt az egyenletet megkapjuk a (2.24) egyenlet ún. **legkisebb négyzetes** megoldását.

Egyszerűbb úton is eljuthatunk a (2.24) egyenlet **legkisebb négyzetes** megoldásához:

Nevezetesen: a (2.25) egyenlet ekvivalens a

$$\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^*.$$

Beszorozva mind két oldalt  $A^T$ -vel:

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{b} - \mathbf{b}^*). \quad (2.26)$$

Házi feladat belátni, hogy ennek az egyenletnek a jobb oldala a  $\mathbf{0}$  vektorral egyenlő. Így: a (2.24) egyenlet **legkisebb négyzetes**  $\mathbf{x}$  megoldása kielégíti a

$$\boxed{(A^T A)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.} \quad (2.27)$$

egyenletet, melyet a (2.24) egyenlet ún. **normál egyenletének** hívunk.

**Legkisebb négyzetek módszere:** Adottak az  $x, y$  változók,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

melyekről okunk van feltételezni lineáris kapcsolat van közöttük. Vagyis valamilyen **meghatározandó, általunk még ismeretlen**  $a, b \in \mathbb{R}$ -re:

$$y_i = a + b \cdot x_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Azonban az adatokat mérések eredményeként kapjuk és ezért hibával terhelték. Hogyan adhatjuk az adatok alapján elérhető legjobb becslést az  $a, b$  értékre?

**Megoldás:** Az  $a, b$ -nek mint **ismeretleneknek** ki kellene elégíteni az

$$\begin{aligned} 1 \cdot a + x_1 \cdot b &= y_1 \\ 1 \cdot a + x_2 \cdot b &= y_2 \\ &\vdots \\ 1 \cdot a + x_n \cdot b &= y_n \end{aligned} \quad (2.28)$$

a mérési hibák miatt azonban ilyen  $a, b$  nem létezhet. Tehát keressük azt a megoldást, melyre legalább is a hibák négyzeteinek összege minimális. Ezt a (2.28) egyenletrendszer legkisebb négyzetek megoldása adja. Ez az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (2.29)$$

Felírjuk tehát a (2.27) normál egyenletet:

$$(A^T A) \cdot \mathbf{x} = A^T \cdot \mathbf{b}. \quad (2.30)$$

Vegyük észre, hogy  $A^T A$  egy  $2 \times 2$ -es mátrix. Vagyis a (2.30) egyenletrendszer egy két egyenletből és két ismeretlenből álló rendszer. Mivel  $\text{rank}(A) = 2$  ezért a 19. Tétel miatt  $\text{rank}(A^T A) = 2$  tehát a 17. Tétel miatt létezik egyetlen megoldása. Ez a megoldása adja a keresett  $a, b$  értékeket. Nevezetesen:

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$

Továbbá,

$$A^T \cdot \mathbf{b} = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

Vagyis a keresett  $y = a + b \cdot x$  egyenes felírásához szükséges  $a, b$ -t meghatározhatjuk mint az

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenlet megoldását. Mivel ez egy két ismeretlenes  $(a, b)$  két lineáris egyenletből álló egyenlet rendszer, ezért már középiskolás eszközökkel is meg lehet oldani.

## 2.5.2. Pozitív definit mátrixok

A pozitív számok analógjai a mátrixok között a **pozitív definit mátrixok**.

**20. DEFINÍCIÓ:** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es mátrix. Azt mondjuk, hogy az  $A$  mátrix

1. **pozitív definit**, ha

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0 \text{ teljesül minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ vektorra.}$$

2. **pozitív szemidefinit**, ha

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} \geq 0 \text{ teljesül minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ vektorra.}$$

3. **negatív definit**, ha

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} < 0 \text{ teljesül minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ vektorra.}$$

4. **negatív szemidefinit**, ha

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} \leq 0 \text{ teljesül minden } \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ vektorra.}$$

5. **indefinit**, ha létezik olyan  $\mathbf{x}$ , amelyre  $\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0$  és létezik olyan  $\mathbf{y}$ , amelyre  $\mathbf{y}^T \cdot A \cdot \mathbf{y} < 0$

Ez egyáltalán **nem azt jelenti**, hogy a mátrixnak minden elem pozitív! Például:

**28. PÉLDA:** 1.  $A_1 := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  mátrix egy pozitív definit mátrix, hiszen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \cdot A_1 \cdot \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_2x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 > 0. \end{aligned}$$

2. Legyen  $A_2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Akkor

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 < 0.$$

**21. TÉTEL:** Legyen  $A$  egy szimmetrikus mátrix. Az  $A$  mátrix akkor és csak akkor

1. **pozitív definit**, ha minden sajátértéke pozitív,
2. **pozitív szemidefinit**, ha minden sajátértéke nem-negatív,
3. **negatív definit**, ha minden sajátértéke negatív,
4. **negatív szemidefinit**, ha minden sajátértéke nem-positív,
5. **indefinit**, ha van pozitív és negatív sajátértéke is.

**Bizonyítás.** Legyen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  az  $A$  mátrix sajátértékei multiplicitással (ez azt jelenti, hogy egy  $\lambda$  sajátértéket annyszor sorolunk fel ahányszoros gyöke  $\lambda$  a  $\det(A - \lambda I) = 0$  karakterisztikus egyenletnek.) Legyenek  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  a megfelelő páronként merőleges egység hosszú sajátvektorok. Képezzük a  $P := [\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n]$ ,  $n \times n$ -es mátrixot (melynek tehát az oszlopai az  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  vektorok) és legyen  $D$  az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  állnak ebben a sorrendben. Ekkor mint tanultuk (szimmetrikus mátrixok diagonalizálása fejezet, A2 tárgy)

$$A = P \cdot D \cdot P^T.$$

Ezért a  $\mathbf{y} = P^T \cdot \mathbf{x}$  helyettesítéssel

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \cdot D \cdot \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Mivel  $y_i^2 \geq 0$  ezért a vele való szorzás nem változtat előjelet (viszont nullává tesz ha  $y_i = 0$ ). Ebből a tétel mind az öt állítása teljesen nyilvánvaló. ■

Emlékezzünk, hogy a 19. Tételben bizonyításában igazoltuk, hogy  $\text{null}(A) = \text{null}(A^T A)$  és emiatt a mátrixok dimenzió tételéből adódóan  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$ . Most további tulajdonságait igazoljuk az  $A^T A$  alakú mátrixoknak:

**3. LEMMA:** Legyen  $A$  egy tetszőleges  $k \times s$  méretű mátrix. Ekkor az  $A^T \cdot A$  mátrix

- (a) Szimmetrikus és
- (b) pozitív szemidefinit.

**Bizonyítás.**  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ . Ezzel igazoltuk az (a) állítást. A (b) állítás igazolása:  $\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T \cdot (A\mathbf{x})$ . Ez pedig az  $A\mathbf{x}$  vektor skaláris szorzata önmagával, ami az  $A\mathbf{x}$  vektor hosszának a négyzete, ami nem lehet negatív bármi is az  $\mathbf{x}$ . ■ Egy fontos tulajdonsága a szimmetrikus és pozitív definit mátrixoknak, hogy



**4. LEMMA:** Legyen  $A$  egy szimmetrikus pozitív definit mátrix. Ekkor létezik egy szimmetrikus pozitív definit mátrix  $B$ , melyre  $A = B^2$ .

**Bizonyítás.** Mivel  $A$  szimmetrikus, ezért létezik olyan ortogonális mátrix  $P$ , amelyre  $A = PDP^T$ , ahol  $D$  az a diagonális mátrix, melynek főátlójában az  $A$  sajátértékei vannak. Ezek nem pozitívak. Tekintsük ezen pozitív sajátértékek pozitív gyökeit és nevezzük  $D_1$ -nek a belőlük (megfelelő sorrendben felírva) alkotott diagonális mátrixot. Ekkor nyilván  $D_1 \cdot D_1 = D$ . Ezért

$$A = (PD_1P^T)(PD_1P^T),$$

vagyis a pozitív definit mátrix  $PD_1P^T$  négyzete egyenlő  $A$ -val. ■

Tehát a fenti tétel miatt az  $A^T \cdot A$  mátrix minden sajátértéke nem negatív.

### 2.5.3. Szinguláris érték felbontás

Legyen  $A$  egy  $2 \times 2$ -es mátrix. Természetes módon ehhez tartozik a

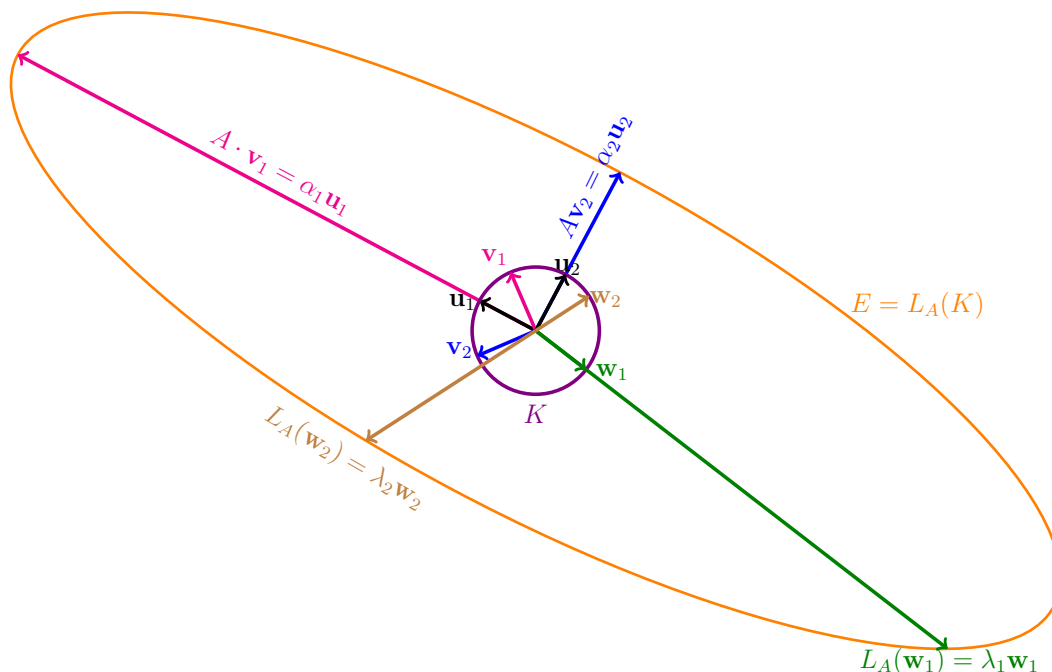
$$L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad L_A(\mathbf{x}) := A \cdot \mathbf{x}$$

lineáris transzformáció. Nevezzük  $D$ -nek az origó középpontú egységsugarú körlemezt és nevezzük  $K$ -nak ennek határát, az origó középpontú egységsugarú kört. A fenti  $L_A$  lineáris transzformáció a  $D$  körlemezt egy ellipszis lemezre viszi, melynek határa az  $E$  ellipszis (lásd 2.4. Ábra.) Fontos, hogy meg tudjuk találni

- (a) az  $E$  ellipszis féltengelyeinek  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  hosszait,
- (b) A féltengelyek irányába mutató (egymásra merőleges)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  egység vektorokat.

Ha ismerjük a féltengelyek  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  irányait és  $\alpha_1, \alpha_2$  hosszait, akkor ismerjük az  $E$  ellipszist.

**A féltengelyek irányai és hosszai:** Tekintsük az  $A^T A$  mátrixot. Határozzuk meg ennek sajátértékeit! Mivel az  $A^T A$  mátrix pozitív szemidefinit, ezért a **sajátértékek** mind nem negatívak. Ezért az  $A^T A$  sajátértékeit felírhatjuk  $\alpha_1^2, \alpha_2^2$  alakban, ahol  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0$ . Ekkor a féltengelyek hosszai  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$ . Azt mondjuk, hogy az  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$  számok az  $A$  mátrix **szinguláris értékei**. Ezek nem feltétlen esnek egybe az  $A$  mátrix sajátértékeivel. Az  $E$  ellipszis (egymásra merőleges) féltengelyeinek irányát két lépésben határozzuk meg:



2.4. ábra. Az  $L_A(\mathbf{x}) := A \cdot \mathbf{x}$  leképezés az origó centrumú  $K$  egység sugarú kört az  $E$  ellipszibe viszi. Az  $A^T A$ -nak a sajátértékei  $\alpha_1^2, \alpha_2^2$ . Az  $A^T A$ -nak az  $\alpha_k^2, (k = 1, 2)$  sajátértékhez tartozó saját vektora  $\mathbf{v}_k$ . Az  $E$  ellipszis féltengelyeinek irányait az  $\mathbf{u}_k := \frac{1}{\alpha_k} \cdot A\mathbf{v}_k$  egységvektorok határozzák meg, a féltengelyek hosszai:  $\alpha_1, \alpha_2$ . Berajzoltuk az  $A$  mátrix sajátvektorait  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  és ezeknek képeit az  $L_A$  leképezéssel.

(i) Kiszámoljuk az  $A^T A$  mátrix  $\alpha_1^2, \alpha_2^2$  sajátértékeihez tartozó  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  egység hosszú egymásra merőleges  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sajátvektorait.

(ii) Képezzük az

$$\mathbf{u}_1 := \frac{1}{\alpha_1} A\mathbf{v}_1 \text{ és } \mathbf{u}_2 := \frac{1}{\alpha_2} A\mathbf{v}_2$$

vektorokat. Belátható, hogy ezek is páronként merőleges egység hosszú vektorok és az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  egységvektorok adják meg az  $E$  ellipszis hosszabbik és rövidebbik tengelyének irányát. Az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  vektorokat hívjuk az  $A$  mátrix **baloldali szinguláris vektorainak**. A  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  vektorokat hívjuk az  $A$  mátrix **jobboldali szinguláris vektorainak**.

Be lehet látni, hogy ha

$$U := [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] \text{ és } V := [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$$

vagyis az  $U$  és  $V$  mátrixok oszlop vektorai a megfelelő  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok, akkor

$$A = U \cdot D \cdot V^T, \quad (2.31)$$

ahol  $D$  az a diagonális mátrix, aminek főátlójában az  $A$  mátrix szinguláris értékei állnak, a megfelelő sorrendben. Vagyis  $D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ . A (2.31) kifejezést az  $A$  mátrix **szinguláris érték felbontásának** nevezzük. Tetszőleges  $n \times r$ -es mátrixokra a szinguláris értékek és a szinguláris érték felbontás a fentivel azonos módon definiálható.

**29. PÉLDA:** Végezzük el a szinguláris érték felbontást az  $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$  mátrixra!

**Megoldás:** Felírjuk az  $A^T \cdot A$  mátrixot. Ennek sajátértékei

$$\Lambda_1 = 85.051913, \text{ és } \Lambda_2 = 7.94808695$$

Az  $A^T A$ -nak a  $\Lambda_1, \Lambda_2$ -sajátértékekhez tartozó egység hosszú sajátvektorai oszlop vektorként mátrixba rendezve

$$V = \begin{bmatrix} -0.3953575440 & -0.9185273063 \\ 0.9185273063 & -0.3953575440 \end{bmatrix},$$

ahol  $\mathbf{v}_1$  a  $V$  mátrix első és  $\mathbf{v}_2$  a  $V$  mátrix második oszlopa. Most kiszámoljuk az  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\alpha_1} A \mathbf{v}_1$  és  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\alpha_2} A \mathbf{v}_2$  vektorokat. Ezek az alábbi  $U$  mátrix első és második oszlopai:

$$U = \begin{bmatrix} -0.8825218340 & 0.4702714244 \\ 0.4702714244 & 0.8825218340 \end{bmatrix}$$

Ezeket a vektorkat lerajzoltuk a 2.4. Ábrán. Az  $A$  mátrix szinguláris vektorai **NEM** feltétlenül esnek egybe az  $A$  sajátvektoraival. Ezt mutatja ezen példa is: Az  $A$  mátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 = 8.178908345 \text{ és } \lambda_2 = -3.178908345.$$

A megfelelő saját vektorok:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0.7914242578 \\ -0.6112672438 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0.8394534689 \\ 0.5434315720 \end{bmatrix}.$$

```

File Edit View Insert Format Tools Window Help
C Maple Input Monospaced 12 B I U
>
> with(linalg):      A := linalg[matrix](2,2,[2,-8,-4,3]);
                                A = [ 2  -8 ]
                                [-4  3 ]
> p:=evalf(Svd(A,U,V)); a_1:=p[1]; a_2:=p[2]; #az A^TA sajátértékeinek GYÖKEI: a_1, a_2
                                p = [9.222359408, 2.819235171]
                                a_1 = 9.222359408
                                a_2 = 2.819235171
> UT:=transpose(U): VT:=transpose(V):
> print(V); #A V mátrix k-adik oszlopa az (A^T A)-nak a k-adik sajátértékhez tartozó egység sajátvektor
                                [-.3953575440  -.9185273063]
                                [ 0.9185273063  -.3953575440]
> print(U); #a_k u_k=A v_k
                                [-.8825218340  0.4702714244]
                                [ 0.4702714244  0.8825218340]
> multiply(U,diag(a_1, a_2),VT):
                                [ 2.000000000  -8.000000001]
                                [-4.000000001  3.000000000]

```

2.5. ábra.

Ezek pedig különböznek az  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  vektoroktól miként azt a 2.4. Ábra is mutatja. A MAPLE program segítségével a 2.5. Ábrán látható módon végezhetjük el a 29. Példabeli szinguláris felbontást.

### Levezetés:

Legyen

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}.$$

Az  $A^T A$  mátrix szimmetrikus ezért

$$V^T \cdot A^T A \cdot V = \Sigma \quad (2.32)$$

Vagyis

$$(AV)^T \cdot (AV) = \Sigma.$$

Ezért  $i \neq j$ -re:  $A\mathbf{v}_i \perp A\mathbf{v}_j$  és  $\|A\mathbf{v}_i\| = \alpha_i$ . Azt az összefüggést, hogy  $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\alpha_i}A\mathbf{v}_i$  mátrixosan úgy fejezzük ki, hogy

$$U = (AV) \cdot D^{-1} \text{ vagyis } UD = AV \text{ vagyis } V^T A^T = DU^T. \quad (2.33)$$

Ez utóbbit a (2.32) formulába helyettesítve:

$$DU^T \cdot A \cdot V = \Sigma.$$

Mivel  $D^{-1}\Sigma = D$ , átszorítások után kapjuk, hogy

$$A = U \cdot D \cdot V^T.$$

### 2.5.4. Mátrixok poláris felbontása

**22. TÉTEL: (Poláris felbontás)** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es mátrix, melyre  $\text{rank}(A) = k$ . Ekkor létezik egy  $P$  szimmetrikus pozitív szemidefinit mátrix, amelyre  $\text{rank}(P) = k$  és egy  $Q$  ortogonális mátrix, melyekre

$$A = P \cdot Q. \quad (2.34)$$

Ha  $\text{rank}(A) = n$ , akkor  $P$ -t választhatjuk pozitív definitnek.

**Bizonyítás.** A felbontást a szinguláris érték felbontásból indulva konstruáljuk meg. A szinguláris érték felbontásban:

$$A = UDV^t = (UDU^T) \cdot (UV^T) = P \cdot Q.$$

Az nyilvánvaló, hogy  $UV^T$  ortogonális mert ortogonális mátrixok szorzata ortogonális. Másrészt

$$\mathbf{x}^T \cdot UDU^T \cdot \mathbf{x} = (U^T \mathbf{x})^T \cdot D \cdot U^T \mathbf{x}.$$

A tétel állítása abból következik, hogy  $D$  diagonális mátrix elemei nem negatívak. ■

### 2.5.5. Szimmetrikus mátrixok spektrál felbontása

Legyen  $A$  egy szimmetrikus mátrix.  $A = QDQ^T$ , ahol  $D$  diagonális és  $Q$  pedig ortogonális, melynek oszlop vektorai  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ , az  $A$ -nak a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sajátértékeihez tartozó páronként merőleges sajátvektorok. Innen azonnal adódik, hogy

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T.$$

Ezt nevezzük az  $A$  spektrál felbontásának. Ennek jelentőségét a következő mutatja. Továbbiakban legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy olyan függvény amit előállít a 0-körüli Taylor sora:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Továbbá, legyen a  $A$  egy  $n \times n$ -es négyzetes mátrix, amely diagonalizálható. Vagyis feltételezzük, hogy léteznek  $A$ -nak a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sajátértékeihez tartozó  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  lineárisan független sajátvektorai. Legyen  $D$  az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vagyis

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

áll és  $P$  az a mátrix, amelynek oszlop vektorai  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ . Ekkor,  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ . Tehát

$$A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1} = P \cdot \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \cdot P^{-1}.$$

$$f(A) := f(0)I + f'(0)A + \frac{f''(0)}{2!}A^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}A^n + \dots$$

könnyen kiszámítható mint

$$f(A) = P f(D) P^{-1} = P \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) P^{-1}.$$

Speciálisan, ha  $A$  egy  $2 \times 2$ -es mátrix, melynek sajátértékei  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  és  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Ekkor létezik  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$  az lineárisan független sajátvektorai. Ezekből mint oszlop vektorokból alkotjuk a  $P$ -t. Ezzel:

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

## 3. fejezet

# Parciális differenciálegyenletek

A parciális differenciálegyenletek fejezetben sokszor kell majd kiszámolni függvényeknek a tiszta sinusos Fourier sorát. Ezért itt most összefoglaljuk az ehhez szükséges, az A2 tárgyban tanult ismereteket és azon túlmenően mutatunk néhány ügyes módszert speciális esetekben.

### 3.1. Fourier sorok: Ismétlés

Akinek bővebb ismétlésre van szüksége, szám sorokról Fourier sorokról és Taylor sorokról olvashatnak bővebben a [http://www.math.bme.hu/~simonk/a2/első-masodik\\_het\\_a.pdf](http://www.math.bme.hu/~simonk/a2/első-masodik_het_a.pdf) jegyzet részletben.

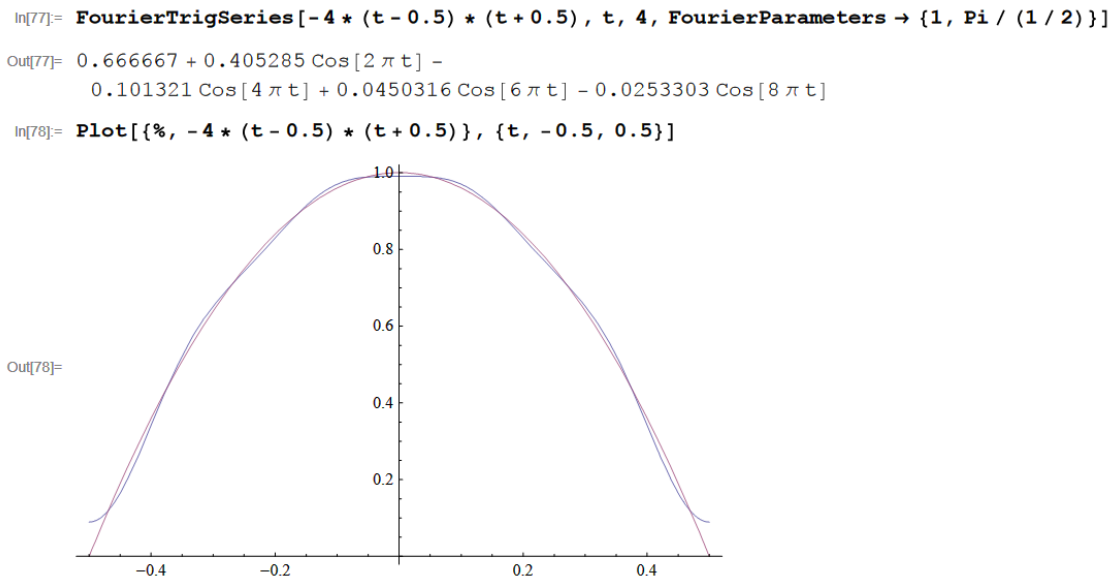
#### 3.1.1. Általánoságban a Fourier sor definíciója

Adott egy  $p > 0$  szám és egy korlátos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely  $2 \cdot p$ -szerint periodikus. Feltesszük, hogy  $f$ -nek a  $[-p, p]$  intervallumon belül (és így bármely intervallumon belül) csak véges sok szakadás pontja van. Az  $f$ -függvény Fourier együtthatói az  $a_0, a_1, a_2, \dots$  és  $b_1, b_2, \dots$  számok, ahol

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx, \quad n \geq 1$$

és

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) dx, \quad n \geq 1.$$



3.1. ábra.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ha  $-0.5 \leq t \leq 0.5$ , akkor  $f(t) = -4(t - 0.5)(t + 0.5)$ . A számegeyes többi részére terjesszük ki  $f(t)$ -t periodikusan (periodusa = 1). A fenti Mathematica kód mutatja a Fourier sor első 5 nem nulla tagjának összegét (kék) és az  $f(t)$  függvényt (piros)

**2. MEGJEGYZÉS:** Mivel az  $x \mapsto \cos\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right)$  függvény páros és az  $f(x)$  függvény páratlan ezért az  $x \mapsto f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right)$  függvény is páratlan. Mivel az integrál a függvény alatti előjeles terület ezért az  $x \mapsto f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2} \cdot x\right)$  függvény integrálja a  $[-p, 0]$  intervallumon éppen a mínusz egyszerese ugyanezen függvény  $[0, \pi]$  intervallumon vett integráljának. Ebből adódik, hogy:

$$\text{Ha az } f(x) \text{ páratlan, akkor } a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Használva, hogy páratlan  $f(x)$  függvényre az  $x \mapsto f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right)$  függvény páros, kapjuk, hogy:

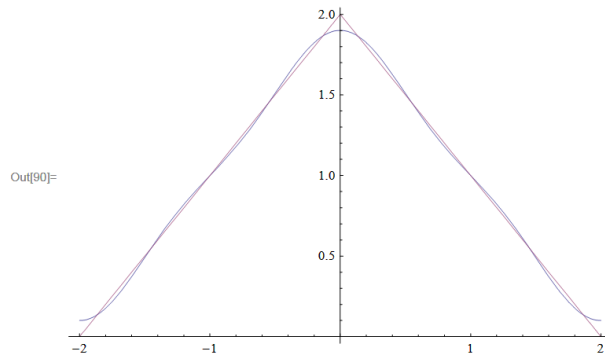
$$\text{Ha az } f(x) \text{ páratlan, akkor } b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) dx. \quad (3.2)$$



```
In[89]= FourierTrigSeries[2 - Abs[t], t, 4, FourierParameters -> {1, Pi / (2)}]
```

$$\text{Out[89]= } 1 + \frac{8 \cos\left[\frac{\pi t}{2}\right]}{\pi^2} + \frac{8 \cos\left[\frac{3\pi t}{2}\right]}{9\pi^2}$$

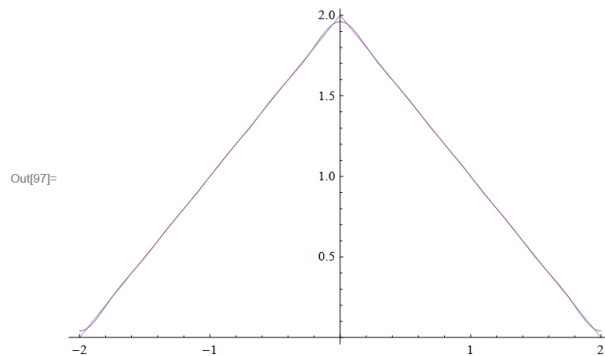
```
In[90]= Plot[{%, 2 - Abs[t]}, {t, -2, 2}]
```



```
In[96]= FourierTrigSeries[2 - Abs[t], t, 10, FourierParameters -> {1, Pi / (2)}]
```

$$\text{Out[96]= } 1 + \frac{8 \cos\left[\frac{\pi t}{2}\right]}{\pi^2} + \frac{8 \cos\left[\frac{3\pi t}{2}\right]}{9\pi^2} + \frac{8 \cos\left[\frac{5\pi t}{2}\right]}{25\pi^2} + \frac{8 \cos\left[\frac{7\pi t}{2}\right]}{49\pi^2} + \frac{8 \cos\left[\frac{9\pi t}{2}\right]}{81\pi^2}$$

```
In[97]= Plot[{%, 2 - Abs[t]}, {t, -2, 2}]
```



3.2. ábra.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ha  $-2 \leq t \leq 2$ , akkor  $f(t) = 2 - |x|$ . A számegegyenes többi részére terjesszük ki  $f(t)$ -t periodikusan (periodusa = 4). A fenti Mathematica kód mutatja a Fourier-sornak: a felső ábrán az első három, míg az alsó ábrán az első hat nem nulla tag összegét (kék) és az  $f(t)$  függvényt (piros)

**30. PÉLDA:** Valamilyen adott  $p > 0$  számra legyen  $f(x)$  az a  $2p$ -szerint periodikus függvény, melyet a  $[-p, p]$  intervallumon a következő formulával adunk meg:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } |x| < p; \\ 0, & \text{ha } x = -p \text{ vagy } x = p \end{cases}.$$

Határozzuk meg az  $f(x)$  Fourier együtthatóit!

**Megoldás.** Csak a  $b_n$  ("szinuszos") együtthatókat kell meghatározni. Ennek céljából parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \sin(u \cdot x) dx = \frac{\sin(ux) - ux \cos(ux)}{u^2}. \quad (3.3)$$

Helyettesítsünk be  $u = \frac{n\pi}{p}$ -t és használjuk, hogy minden  $n$  természetes számra:  $\sin(n\pi) = 0$  és  $\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$ . Innen kapjuk, hogy

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p x \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) dx = \frac{2p}{n\pi} \cdot (-1)^{n+1}. \quad (3.4)$$

■

Az  $f$  függvény Fourier sorának  $n$ -edik részletösszege pedig:

$$\begin{aligned} s_n(x) := & a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{p}x\right) + \\ & + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{p}x\right) + \\ & \vdots \\ & + a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right) \end{aligned}$$

Vagyis

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right) + b_k \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right) \quad (3.5)$$

Az  $f(x)$  függvény Fourier sora:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x\right) \right). \quad (3.6)$$

**31. PÉLDA:** Határozzuk meg a 30. Példában adott  $f(x)$  függvény Fourier sorát!

**Megoldás.** Használva a (3.4) Formulát kapjuk, hogy: az  $f(x)$  Fourier sora:

$$\frac{2p}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{p} \cdot x\right).$$

■

A továbbiakban azt a fontos kérdést tárgyaljuk, hogy az  $f(x)$  függvény Fourier sora mely  $x_0$  pontokban konvergens és ha konvergens akkor teljesül-e, hogy

$$f(x_0) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x_0\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{p} \cdot x_0\right) \right). \quad (3.7)$$

Ha egy  $x_0$  pontban (3.7) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény Fourier sora az  $x_0$  pontban előállítja az  $f$ -et.

**23. TÉTEL:** Ha egy  $2p$  szerint periodikus  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvénynek csak véges sok szakadáspontja van a  $[p, p]$  intervallumon, és a függvény a szakadáspontoktól eltekintve differenciálható, akkor az  $f(x)$ -t a Fourier-sora minden folytonossági helyen előállítja. Továbbá, ha a szakadási pontokban az  $f(x)$  függvény féloldali érintői léteznek, és **nem** függőlegesek, akkor

$$s_n(x_0) \rightarrow \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Az  $f(x_0 + 0)$  jelenti az  $f(x)$  függvény jobboldali határértékét az  $x_0$  helyen. Ha az  $f(x)$ -nek szakadása van az  $x_0$ -ban, akkor még a jobb- és baloldali határérték létezhet. A fenti tétel azt mondja ki, hogy egy ilyen pontban, a tétel feltételeinek teljesülése esetén, a Fourier-sor a jobb- és baloldali határértékek átlagához konvergál.

Alkalmazva ezt a tételt látjuk, hogy a 30. Példabeli  $f(x)$  függvényt Fourier sora minden pontban előállítja.

### 3.1.2. Fourier-sor komplex alakja

Az itt következő anyagot A2-ben tanulták: (l. 29.old. [http://www.math.bme.hu/~simonk/a2/elso-masodik\\_het\\_a.pdf](http://www.math.bme.hu/~simonk/a2/elso-masodik_het_a.pdf))

Tanultuk, hogy

$$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t),$$

ahol  $i$  az imaginárius egység ( $i^2 = -1$ ). Ebből adódik, hogy

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{és} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Ha ezt behelyettesítjük az (3.6) formulába, akkor adódik, hogy ha

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (3.8)$$

akkor a Fourier-sor komplex alakja:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (3.9)$$

továbbá,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.10)$$

továbbá minden  $n \geq 1$ -re

$$a_n = (c_n + c_{-n}) \quad \text{és} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad (3.11)$$

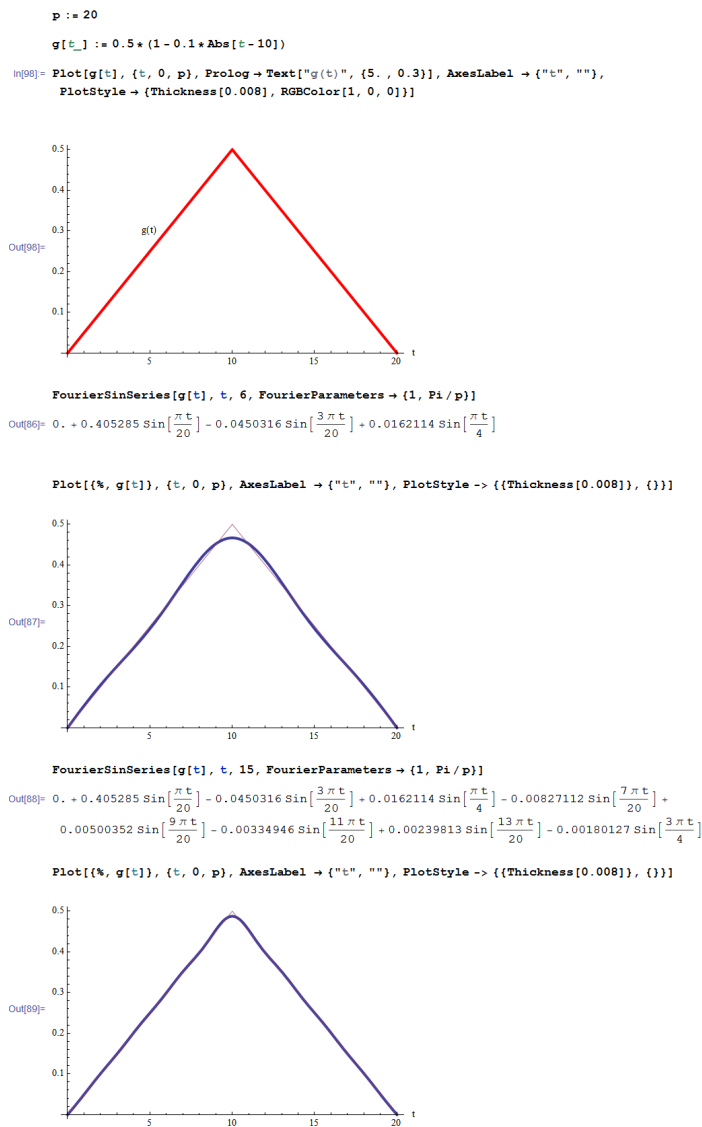
(mint már említettük,  $a_0 = c_0$ ).

### 3.1.3. A tiszta szinuszos Fourier sor definíciója

Legyen  $f(x)$  egy olyan  $f : [0, p] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely korlátos, véges sok szakadás pontja van és  $f(0) = f(p) = 0$ . A továbbiakban az  $f$ -et kiterjeszthetjük az egész számegyenesre oly módon, hogy a kiterjesztett függvény (amit továbbra is  $f(x)$ -el jelölünk) egy  $2p$ -szerint periodikus függvény lesz. Először értelmezzük az  $f$  függvényt a  $[-p, 0]$  intervallumon:

$$x \in [-p, 0], \quad f(x) := -f(-x). \quad (3.12)$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy tükröztük az  $f$  grafikonját az origóra. Második lépésben a mostmár a  $[-p, p]$ -intervallumon értelmezett  $f$  függvényt  $2p$  periódussal kiterjesztjük a száme egyenesre.



3.3. ábra.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ha  $0 \leq t \leq 20$ , akkor  $g(t) = 0.5(1 - 0.1|t - 10|)$  "háromszög" a felső ábrán. A számegyenes többi részére terjesszük ki  $g(t)$ -t periodikusan (periodusa = 20). A fenti Mathematica kód mutatja a Fourier-sornak: a középső ábrán az első négy, míg az alsó ábrán az első nyolc nem nulla tag összegét (kék) és az  $g(t)$  függvényt (piros)

Az ily módon az egész  $\mathbb{R}$ -re kiterjesztett,  $2p$ -szerint periodikus és páratlan  $f(x)$  függvénynek felírjuk a Fourier sorát. Mint fent láttuk ez egy tiszta szinuszos sor lesz amit az  $f(x)$  eredeti  $f$  függvény tiszta szinuszos Fourier sorának hívunk. Ennek együtthatói

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) dx \quad (3.13)$$

és az  $f(x)$  tiszta sinusos sor fejtése a  $[0, p]$  intervallumon:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{p} \cdot x\right) \text{ ha } 0 < x < p. \quad (3.14)$$

### Tisztasinusos Fourier együtthatók kiszámolásása speciális esetekben

Néhány speciális esetben (a 3.13) integrál kiszámolását megsporoalhatjuk.

- (i) Ha  $k \geq \ell \geq 1$  egész számok és  $f(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{p}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{p}x\right)$ , akkor használhatjuk a  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$  azonosságot. Innen

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{(k + \ell)\pi}{p}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{(k - \ell)\pi}{p}x\right)$$

a tisztasinusos sor fejtés. Tehát

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } n = k + \ell \text{ vagy } n = k - \ell; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- (ii) Néhány függvény tiszta sinusos Fourier dor fejtése a  $[0, \pi]$  intervallumon.

- $0 \leq x < \pi$ ,  $f(x) = x$  függvényre:

$$f(x) = 2 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots \right), \text{ ha } 0 \leq x < \pi.$$

- $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + \dots \right), \text{ ha } 0 \leq x \leq \pi.$$

- $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi. \end{cases}$  függvényre:

$$h(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right), \text{ ha } 0 \leq x \leq \pi.$$

- $0 \leq x \leq \pi$ ,  $\varphi(x) = x \cdot (\pi - x)$  függvényre:

$$\varphi(x) = \frac{8}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \dots \right), \text{ ha } 0 \leq x \leq \pi.$$

(iii) A fenti esetekre vissza vezetéssel. Erre példa:

**32. PÉLDA:** Határozzuk meg a  $w(x) := x(1 - x)$ , tiszta sinusos Fourier sorát a  $[0, 1]$  intervallumon, felhasználva az előző pont megfelelő formuláját.

**Megoldás.** Jelöljük  $b_n$ -el a  $\varphi(x)$  és  $a_n$ -el a  $w(x)$  tiszta sinusos Fourier sorának  $n$ -edik együtthatóját. Vagyis

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 w(x) \sin(n\pi x) dx \text{ és } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(s) \sin(ns) ds.$$

Vegyük észre, hogy

$$w(x) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \varphi(\pi \cdot x).$$

Ezért helyettesítéses integrálással adódik, hogy

$$a_n = \frac{1}{\pi^2} b_n.$$

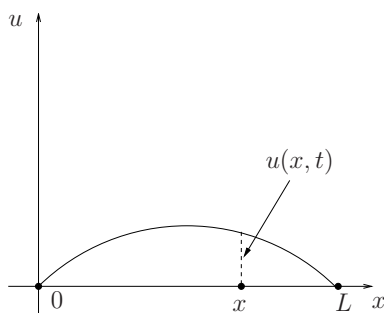
Viszont  $b_n$ -et az előző pontban megadták számunkra:

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Tehát kapjuk, hogy:

$$a_n = \begin{cases} \frac{8}{n^3\pi^3}, & \text{ha } n \text{ páratlan;} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

■

3.4. ábra. A húr kitérése a  $t$  idő pillanatban

## 3.2. Rezgő húr

Tekintsük az  $L$  hosszúságú tökéletesen rugalmas húr. Helyezzük ezt a húr az  $x$  tengely  $[0, L]$  szakaszára és mozdítsuk ki az  $x$ -tengelyre merőlegesen. A húr az  $x$ -tengelyre merőlegesen az  $(x, u)$  síkban mozog. Azt, hogy a húr egy  $x$  abszcisszájú pontja hol van  $t$  idő múlva az  $u(x, t)$  függvény adja meg. A rezgő húr mozgását tehát meghatároztuk, ha az  $u(x, t)$  ismeretlen függvényt megtaláljuk.

**24. TÉTEL:** A keresett  $u(x, t)$  függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletet, ahol  $c$  egy konstans. A fenti (3.15) parciális differenciálegyenletet a **rezgő húr parciális differenciálegyenletének** hívjuk.

A tétel alábbiakban mellékelt bizonyítása [2, 653. old.]-ről származik.

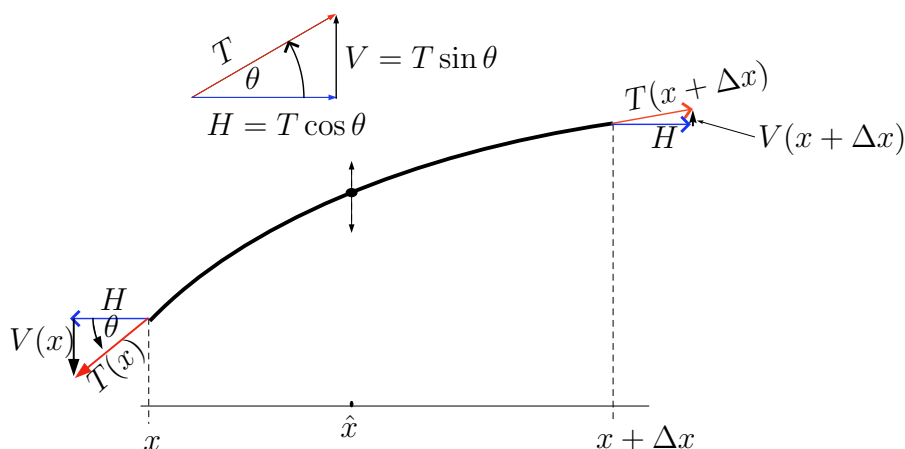
### Bizonyítás.

Képzeld el, hogy a húr az  $x$ -tengelyen fekszik úgy, hogy a bal végpontja az  $x = 0$ . A húr egységnyi hosszra eső tömege  $\rho$ . Az egyenletet igazolásához tekintsük a húr egy picike  $\Delta x$  hosszú darabját, amely az  $[x, x + \Delta x]$  szakasz felett található. Tegyük fel, hogy a húr már rezeg és  $t$  idő után ezen darabjának alakját a 3.5. ábra mutatja.

*Feltételek:*

**F1** Feltételezzük, hogy a húr könnyű és számolásaink során a húr súlyát nem vesszük figyelembe.





3.5. ábra. Rezgő húr egy kicsi darabkája. Ennek súlypont az  $\hat{x}$  felett mozog függőlegesen. Az ábra a ható erőket mutatja egy tetszőlegesen rögzített  $t$  pillanatban

**F2** Továbbá az elmozdulások kicsik ezért a súlypont csak függőlegesen mozog.

Newton törvényét ezen húr darabkájára alkalmazva kapjuk, hogy:

**Húzóerő különbsége a végpontokban = (súlypont gyorsulása) \* (tömeg).**

Legyen a húzó erő nagysága az  $x$  és az  $x + \Delta x$  pontokban  $T(x)$  illetve  $T(x + \Delta x)$ . A húzó erő (érintő irányú) szöge a vízszintes iránnyal  $\theta$ . A fenti második feltétel miatt a súlypont csak vertikálisan mozog, tehát horizontális gyorsulása nincs. Ezért bármely két pontban a húzóerő horizontális komponense ugyan olyan nagy. Nevezzük ezt  $H$ -nak. A húzó erő vertikális komponense az  $x$  pontban  $t$  idő után

$$V(x, t) = H \cdot \tan \theta = H \cdot u_x(x, t). \quad (3.16)$$

Newton törvénye szerint

$$V(x + \Delta x) - V(x) = \rho \Delta x u_{tt}(\hat{x}).$$

Elosztva  $\Delta x$ -el és  $\Delta x \rightarrow 0$ -át véve

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = V_x(x, t) = \rho u_{xt}(x, t)$$

Innen és ??-ből adódik, hogy

$$H \cdot u_{xx}(x, t) = \rho u_{tt}(x, t),$$

Vagyis

$$\frac{H}{\rho} u_{xx} = u_{tt}. \quad (3.17)$$

Ezzel beláttuk az állítást  $c^2 = \frac{H}{\rho}$  választással. ■

Ahhoz, hogy ebből a húr helyzetét leíró  $u(x, t)$ -t megkapjuk, még tudnunk kell a húr alakját a  $t = 0$  időpontban. Továbbá szükséges még tudnunk, hogy a  $t = 0$ -ban a húr egyes pontjait milyen sebességgel mozditotjuk el az  $u$  függőleges irányába. Vagyis a  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  differenciálegyenletnek adottak a

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

**kezdeti feltételei.** Továbbá meg követeljük, hogy a

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

**kerületi feltétel** teljesül.

Tehát meg kell határozni azt az  $u(x, t)$  függvényt, amelyre teljesül, hogy:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), & 0 < t, 0 < x < L \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, & 0 \leq t \end{cases}. \quad (3.18)$$

### 3.2.1. I. megoldás Dávid Bernoullitól:

Dávid Bernulli megoldásának ötlete, hogy a (3.18) megoldását kereshetjük olyan függvényekből álló végtelen függvénysor összegeként, amely függvények felírhatók

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (3.19)$$

alakban. Nevezetesen, ha  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , akkor nyilván:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) T(t) \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) T''(t).$$

Ezeket a (3.15) egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy  $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$ , vagyis:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Ugyanis az egyenlet bal oldala csak  $t$ -től, jobb oldala csak  $x$ -től függ, amiből adódik, hogy ők ugyanazzal az állandóval egyenlők, amit fizikai okból negatívnak kell feltételeznünk. Így tehát **két** egyenletünk van:

$$(1) \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2; \quad \text{és} \quad (2) \quad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Átrendezve:

$$(1') \quad T''(t) + \alpha^2 T(t) = 0, \quad \text{és} \quad (2') \quad X''(x) + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0.$$

Ezekáltalános megoldásai (tanulták az A3 tárgyban. **Kattintson ide az A3 jegyzet**hez)

$$T(t) = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t, \quad \text{és} \quad X(x) = E \cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + F \sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right).$$

Ha ezt vissza írjuk (3.19)-be, akkor kapjuk, hogy:

$$u(x, t) = \underbrace{(A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t))}_{T(t)} \cdot \underbrace{\left(E \cos\left(\frac{\alpha}{c}x\right) + F \sin\left(\frac{\alpha}{c}x\right)\right)}_{X(x)}$$

Tudjuk, hogy

$$u(0, t) = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) E \equiv 0.$$

Innen kapjuk, hogy

$$E = 0.$$

Felthetjük, hogy  $F = 1$ . Másrészt

$$0 \equiv u(L, t) = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) F \sin\left(\frac{\alpha}{c}L\right).$$

Innen kapjuk, hogy

$$\sin\left(\underbrace{\frac{\alpha}{c}L}_{k\pi}\right) = 0.$$

Ez teljesül, ha

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{L}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Vagyis a megoldást az

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\left(\frac{kc\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{kc\pi}{L}t\right)) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)} \quad (3.20)$$

alakban kereshetjük. Az egyetlen feladatunk, hogy az  $A_k$  és  $B_k$  együtthatókat meghatározzuk. Ezt fogjuk tenni a megoldás hátralévő részében. Az  $\{A_k\}_{k=1}$  és  $\{B_k\}_{k=1}$  együtthatókat a kezdeti feltételekből, pontosabban az  $f(x)$  és a  $g(x)$  függvények tiszta sinusos Fourier-sorának segítségével állíthatjuk elő. Mivel

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi}{L} x,$$

így  $A_k$  az  $f(x)$  függvény  $[0, L]$  intervallumon vett tiszta sinusos Fourier-sorának  $k$ -adik együtthatója, vagyis:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \left( \frac{k\pi}{L} t \right) dt. \quad (3.21)$$

Hasonlóan, a  $B_k$  együtthatókat a  $g(x)$  függvény tiszta sinusos Fourier-sora felhasználásával határozzuk meg. Nevezetesen:

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-A_k \alpha_k \sin \alpha_k t + B_k \alpha_k \cos \alpha_k t) \sin \left( \frac{\alpha_k}{c} x \right),$$

Innen  $t = 0$  helyettesítéssel (felhasználva, hogy  $\frac{\alpha_k}{c} = \frac{k\pi}{L}$ ):

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right). \quad (3.22)$$

Tehát meg kell határozni a  $g(x)$  függvény tiszta sinusos Fourier-sorát. A  $[0, L]$  intervallumon legyen ez

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right). \quad (3.23)$$

Összevetve a (3.22) és (3.23) egyenleteket:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k B_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right),$$

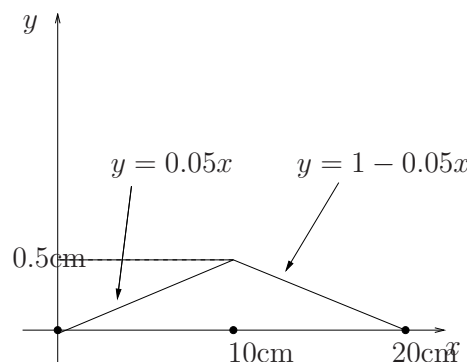
kapjuk, hogy

$$\alpha_k B_k = b_k.$$

Tehát

$$B_k = \frac{b_k}{\alpha_k} = \frac{L}{kc\pi} \cdot b_k = \frac{1}{kc\pi} \int_0^L g(t) \sin \left( \frac{k\pi}{L} t \right) dt. \quad (3.24)$$

Tehát a (3.18) feltételeinek eleget tevő  $u(x, t)$  függvényt úgy határozzuk meg, hogy minden  $k \geq 1$ -re kiszámíthatjuk  $A_k$  együtthatókat a (3.21) egyenletből és a  $B_k$  együtthatókat a (3.24) egyenletből, majd ezeket behelyettesítjük a (3.20) egyenletbe.



3.6. ábra. A húr kezdeti alakja

**33. PÉLDA:** Legyen az  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ -ben szereplő  $c = 1$ . A 20 cm hosszú két végén rögzített húrt megfeszítjük úgy, ahogyan a 3.6. ábra mutatja, és azután elengedjük. Határozzuk meg a húr mozgását leíró  $u(x, t)$  függvényt!

*Megoldás:*

Tudjuk, hogy  $c = 1$  és  $L = 20$ . Mivel a húrt magára hagytuk (nem adtunk neki kezdeti sebességet), ezért a húr kezdeti sebessége 0. Tehát  $g(x) \equiv 0$ . Innen  $\forall k \geq 1$ -re  $B_k = 0$ , hiszen a  $g(x) \equiv 0$  függvény sinusos Fourier-sora minden  $b_k$  együtthatója 0 lesz. Az  $\{A_k\}$  együtthatók kiszámolásához meg kell határozni az

$$f(x) = \begin{cases} 0.05x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 - 0.05x, & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \end{cases} \quad (3.25)$$

tiszta sinusos sorfejtését!

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx = \frac{2}{20} \int_0^{10} 0.05x \sin \left( \frac{k\pi}{20} x \right) dx + \frac{2}{20} \int_{10}^{20} (1 - 0.05x) \sin \frac{k\pi}{20} x dx = \frac{40}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2}$$

(A hiányzó részletszámítások [4, 328. old.] találhatóak.)

Tehát:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{40}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} \cos \left( \frac{k\pi}{20} t \right) \sin \left( \frac{k\pi}{20} x \right)$$

Vagyis:

$$u(x, t) = \frac{40}{\pi^2} \left( \frac{1}{1^2} \cos\left(\frac{\pi}{20}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right) - \frac{1}{3^2} \cos\left(\frac{3\pi}{20}t\right) \sin\left(\frac{3\pi}{20}x\right) + \frac{1}{5^2} \cos\left(\frac{5\pi}{20}t\right) \sin\left(\frac{5\pi}{20}x\right) - \dots \right)$$

**34. PÉLDA:** A Mathematica (vagy bármi más matematikai asszisztens program) segítségével határozzuk azt az  $u(x, t)$  függvényt, amelyre:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3.1^2 u_{xx}(x, t), & 0 < t, 0 < x < 2 \\ u(x, 0) = \frac{1}{40} (1 - |x - 1|), & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{80} x(2 - x), & 0 < x < 2 \\ u(0, t) = 0, u(2, t) = 0, & 0 \leq t \end{cases} \quad (3.26)$$

Rajzoljuk le az  $u(x, t)$  függvény grafikonját és rajzoljuk le a húr alakját a  $t = 2.2$  pillanatban.

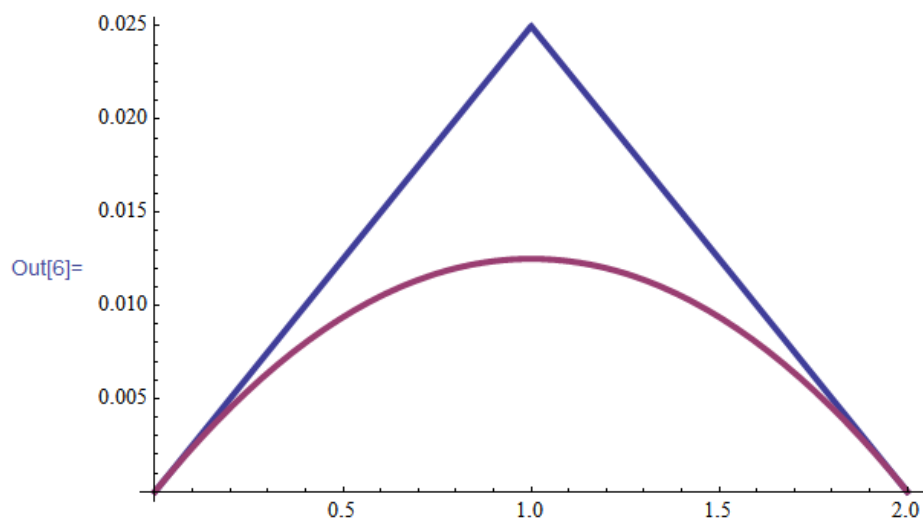
**Megoldás:** A megoldás három lépéséből a második egyáltalán nem fontos, csak azért van, hogy lássuk, hogy a Fourier sor első  $n$  tagja mennyire pontosan közelíti meg az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvényeket.

**I. Lépés:** Először is választunk egy  $n$ -et ami nekünk most  $n = 10$ . Ez azt adja meg, hogy a Fourier soruk első  $n$  tagjával közelítjük az  $f(x)$  és a  $g(x)$  függvényeket. A (3.18) formula jelöléseit használva, ebben a feladatban  $c = 3.1$ ,  $L = 2$  és  $f(x) = \frac{1}{40} (1 - |x - 1|)$ ,  $g(x) = \frac{1}{80} x(2 - x)$ . Ezt közöljük a Mathematica programmal:

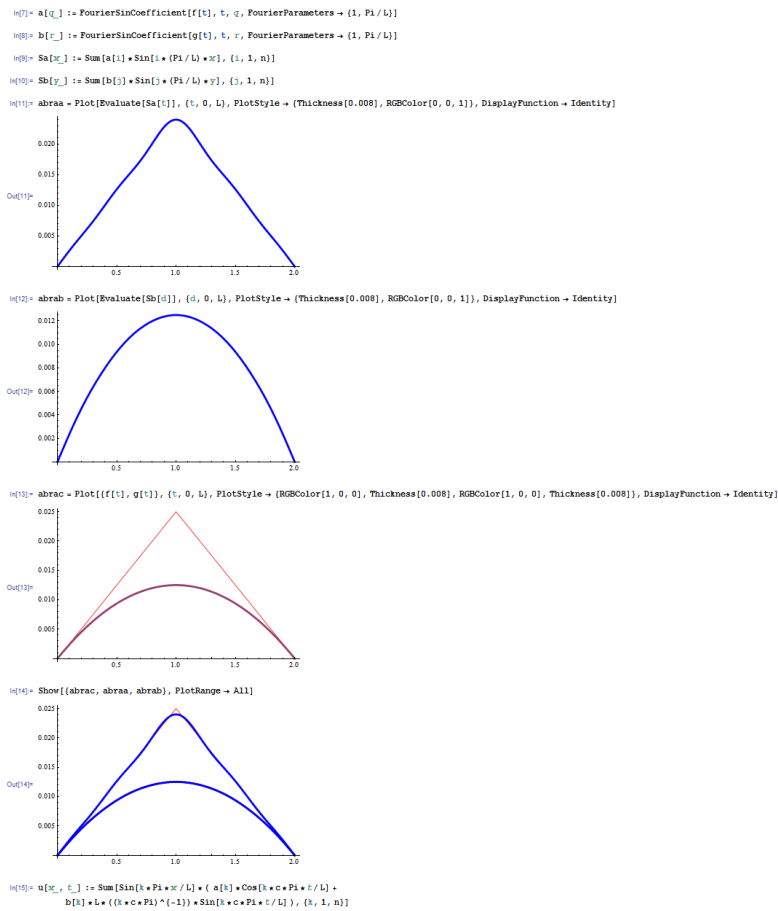
**II. Lépés:** Ez lépés nem szükséges, csak azért van, hogy megtudjuk, hogy az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények Fourier sorainak  $n$ -edik részlet összegei mennyire pontosan közelítik meg ezen függvényeket. Először is kiszámoljuk az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények első  $n$  tiszta szinuszos Fourier együtthatóit, amiket rendre  $a[q]$ ,  $b[r]$ -nek hívunk a programban, és ezek segítségével felírjuk az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények tiszta szinuszos Fourier-sorának  $n$ -edik részlet-összegeit, melyeket  $Sa[x]$ ,  $Sb[y]$ -vel jelölünk. Ezek után összehasonlítjuk az  $Sa[x]$ ,  $Sa[y]$  függvények (kék) grafikonjait az  $f(x)$  és  $g(x)$  függvények (piros) grafikonjaival. Ha az utolsó ábrán alig látunk pirosat, akkor relative jó a megközelítés.

**III. Lépés:** Beírjuk az  $u(x, t)$  képletét használva (3.20)-et majd kinyomtatjuk a megfelelő ábrákat:

```
In[1]:= L := 2
In[2]:= n := 10
In[3]:= c := 3.1
In[4]:= f[x_] := (1 / 40) * (1 - Abs[x - 1])
In[5]:= g[z_] := (1 / 80) * z * (2 - z)
In[6]:= Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, L}, PlotStyle -> Thickness[0.008]]
```



3.7. ábra. Első lépés a 34. példa megoldásában.



3.8. ábra. Második lépés az a 34. példa megoldásában.

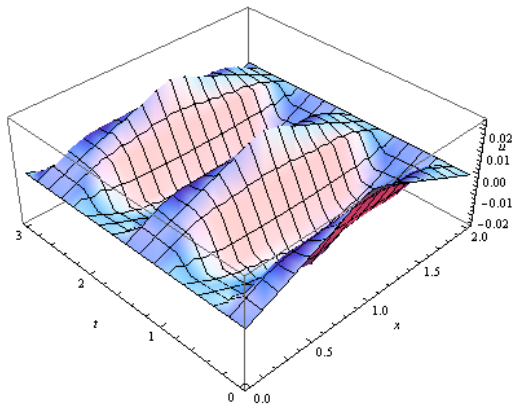


```

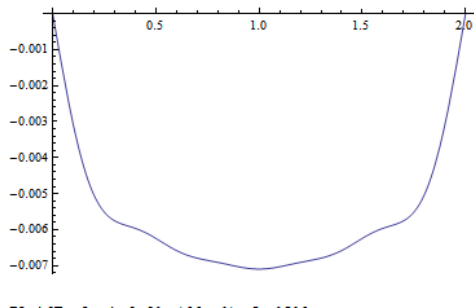
u[x_, t_] := Sum[Sin[k*Pi*x/L]*( a[k]*Cos[k*c*Pi*t/L] +
  b[k]*L*((k*c*Pi)^{-1})*Sin[k*c*Pi*t/L] ), {k, 1, n}]

Plot3D[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 2}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {x, t, u}, PlotRange -> All]

```



```
Plot[Evaluate[u[x, 2.2]], {x, 0, 2}]
```



3.9. ábra. Harmadik lépés az a 34. példa megoldásában.

**2. FELADAT:** Határozzuk meg az  $u(x, t)$  függvényt, ha

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = \sin(3x) - \frac{1}{\pi} \cdot x, & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0, & 0 < t \end{cases} .$$

**3. FELADAT:** Határozzuk meg az az  $u(x, t)$  függvényt, melyre:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}; x \in [0, 2] \\ u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{40}x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{40} - \frac{1}{40}x & \text{ha } x \in [1, 2] \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 3\sin(\pi x); \\ u(0, t) = u(2, t) = 0. \end{cases}$$

A  $h(x) = 1 - \frac{2|x-L/2|}{L}$  függvény tisztaszinuszos Fourier-sora a  $[0, L]$ -en :

$$\frac{8}{\pi^2} \left( \sin\left(\frac{x\pi}{L}\right) - \frac{\sin\left(\frac{3x\pi}{L}\right)}{3^2} + \frac{\sin\left(\frac{5x\pi}{L}\right)}{5^2} - \frac{\sin\left(\frac{7x\pi}{L}\right)}{7^2} + \dots \right)$$

**4. FELADAT:** ldja meg a rezgő húrra vonatkozó kezdeti érték problémát Fourier-sorfejtéssel:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0.1x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0.1 - 0.1x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \\ u_t(x, 0) = \cos(3\pi x) \sin(\pi x) \\ u(0, t) = u(1, t) \equiv 0 \end{cases} .$$

### 3.2.2. II. megoldás D'Alamberttől

Emlékeztetünk, hogy megint keressük azon  $u(x, t)$  függvényt, melyre:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), & 0 < t, 0 < x < L \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, & 0 \leq t \end{cases} . \quad (3.27)$$

D'Alambert megoldása azon az észrevételen alapul, hogyha  $u_1, u_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  kétszer differenciálható tetszőleges függvények, akkor az

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_1(x + ct) + \mathbf{u}_2(x - ct) \quad (3.28)$$

mindig kielégíti a rezgő húr

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$$

parciális differenciálegyenletét.

*Ugyanis:* ha

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct),$$

akkor

$$u_t(x, t) = cu'_1(x + ct) - cu'_2(x - ct).$$

Innen:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u''_1(x + ct) + c^2 u''_2(x - ct)$$

Másrészt:  $u_x(x, t) = u'_1(x + ct) + u'_2(x - ct)$  és

$$u_{xx}(x, t) = u''_1(x + ct) + u''_2(x - ct)$$

A két előző kiemelt egyenletből adódik:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 [u''_1(x + ct) + u''_2(x - ct)] = c^2 u_{xx}(x, t).$$

Ekkor tehát az a **feladat** maradt, hogy a (3.27) feltételekből kell meghatároznunk az  $u_1$ ,  $u_2$  függvényeket.

**Megoldás:** Az  $u(x, 0) = f(x)$  és  $u_t(x, 0) = g(x)$  kezdeti feltételek esetén az

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$$

egyenletbe  $t = 0$ -t írva

$$f(x) = u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x).$$

Ha  $u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$  kifejezést  $t$  szerint deriváljuk, majd  $t = 0$ -t helyettesítünk, akkor

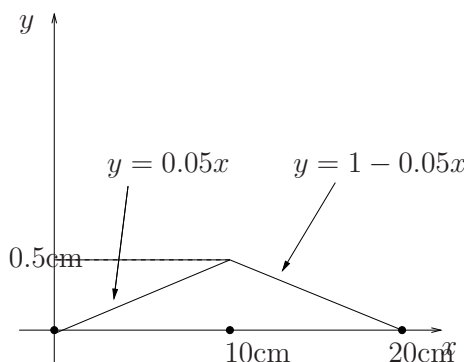
$$u_t(x, 0) = cu'_1(x) - cu'_2(x).$$

Tehát kapjuk, hogy

$$f(x) = u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x) \text{ és } g(x) = u_t(x, 0) = c(u'_1(x) - u'_2(x))$$

így

$$\left. \begin{aligned} u'_1(x) + u'_2(x) &= f'(x) \\ u'_1(x) - u'_2(x) &= \frac{g(x)}{c} \end{aligned} \right\}$$



3.10. ábra. A húr kezdeti alakja

egy közös differenciálegyenlet rendszer, melynek megoldását tanultuk.

Innen adódik, hogy

$$u_1(s) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2c} \int_0^s g(\tau) d\tau + A$$

$$u_2(s) = \frac{1}{2}f(s) - \frac{1}{2c} \int_0^s g(\tau) d\tau + B$$

Ebből következik, hogy  $A + B = 0$  kell legyen. Így tehát (3.28)-ből

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau. \quad (3.29)$$

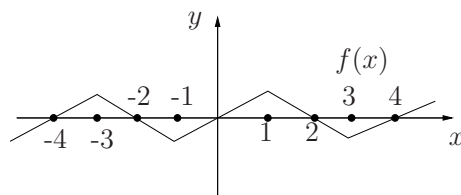
Vegyük észre, hogy ebben a levezetésben *nem* használtuk azt a kerületi feltételt, hogy  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , tehát a fenti levezetés "végtelen hosszú" húr esetén is működik.

**35. PÉLDA:** Tekintsük megint a 33. példát, és oldjuk meg D'Alambert módszerével. A húr kezdeti alakját a 3.10 mutatja. Elengedve a húrt adjuk meg a húr mozgását leíró  $u(x, t)$  függvén.

*Megoldás:*

$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + t) + f(x - t)]$ , ahol  $f(x)$  a következő függvénynek a kiterjesztése a számegeyenesre:

$$f(x) = \begin{cases} 0.05x & \text{ha } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 - 0.05x & \text{ha } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$



3.11. ábra. Az  $f(x)$  "sátortető függvény" kiterjeszése a  $[0, 2]$  intervallumról számegegyenesre.

Tehát azt, hogy 10 időegység múlva az  $x = 2$  cm-ben mi lesz a húr kitérése úgy határozzuk meg, hogy:

$$\begin{aligned} u(2, 10) &= \frac{1}{2} [f(12) - f(-8)] = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{1 - 0.05 \cdot 12}_{f(12)} - \left( \underbrace{-0.05 \cdot 8}_{f(-8)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} [1 + 0,4 - 0,6] = 0,9 \end{aligned}$$

**36. PÉLDA:** A  $[0, 2]$  intervallumon fekszik egy húr, melynek kezdeti alakját az  $f \equiv 0$  adja meg és a húr rezgését az  $u_{tt} = u_{xx}$  írja le. Erre a húrra rávágunk egy kalapáccsal alulról felfelé egységnyi sebességgel és a kalapács feje a húrt a  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  szakaszon éri. Határozzuk meg a húr alakját a  $t = 1$  időpontban a D'alambert módszerével.

**Megoldás:** Tehát a (3.29) formulában  $c = 1$  és  $f \equiv 0$ . Továbbá

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ 0, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ vagy } \frac{3}{2} < x \leq 2. \end{cases}$$

Ezt a  $g(x)$ -et a 3.12. ábra (a) része mutatja. Ezt most páratlan módon kiterjesztjük a  $[-2, 2]$  intervallumra (vagyis tükrözzük a fenti  $g(x)$  grafikonját az origóra.) Az így kapott mostmár a  $[-2, 2]$  intervallumon értelmezett páratlan függvényt továbbra is  $g(x)$ -el jelöljük. Ezután kiterjesztjük 4 periódussal ezt a páratlan függvényt az egész számegegyenesre. Így a számegegyenesen kaptunk egy függvényt (amit továbbra is  $g(x)$ -nek hívunk) és ami 4-szerint periodikus és páratlan. Ennek felhasználásával a (3.29) formulából kapjuk, hogy

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \quad (3.30)$$

Legyen például  $x = 0.2$  és  $t = 1$ . Ekkor a 3.12. ábra (c) része mutatja a (3.30)-beli integrál geometriai jelentését. Nevezetesen:

$$u(0.2, 1) = \int_{-0.8}^{-0.5} -1 dx + \int_{-0.5}^{0.5} 0 dx + \int_{0.5}^{1.2} 1 dx.$$

a 3.12. ábra (c) részén az első integrál a szürke (baloldali) téglalap területének  $-1$ -szerese. A második integrál persze nulla. A harmadik integrál pedig a zöld (jobboldali) téglalap területe. Ezekből azonnal adódik, hogy  $u(0.2, 1) = \frac{1}{2}(-0.3 + 0.7) = 0.2$ . Pontosan ugyanígy látszik, hogy a húr alakja a  $t = 1$  időpontban:

$$u(x, 1) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}; \\ 2 - x, & \text{ha } \frac{3}{2} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

A következő, bonyolultabb számolást igénylő példát a **Mathematica** programmal oldjuk meg. Ezt a problémát egyszer már megoldottuk (34. Példa) a Fourier-sorba fejtés módszerével. Most mégyszer megoldjuk az éppen most tanult módszerrel.

**37. PÉLDA:** Határozzuk az  $u(x, t)$  függvényt, amelyre:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 3.1^2 u_{xx}(x, t), & 0 < t, 0 < x < 2 \\ u(x, 0) = \frac{1}{40}(1 - |x - 1|), & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{80}x(2 - x), & 0 < x < 2 \\ u(0, t) = 0, u(2, t) = 0, & 0 \leq t \end{cases} \quad (3.31)$$

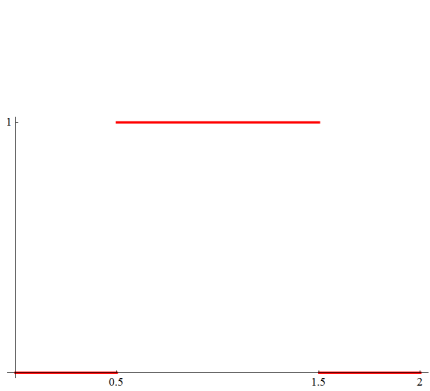
Rajzoljuk le az  $u(x, t)$  függvény grafikonját és rajzoljuk le a húr alakját a  $t = 2.2$  pillanatban.

**Megoldás:**

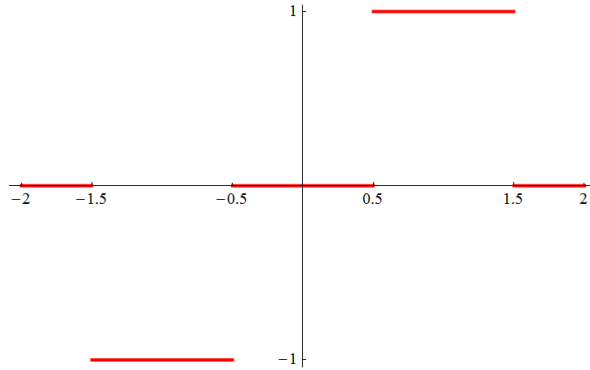
A megoldást három lépésre bontjuk:

**I. Lépés:** Használva a (3.27) jelöléseit, beírjuk, hogy  $L = 2$ ,  $c = 3.1$  és az  $f(x) = \frac{1}{40}(1 - |x - 1|)$ ,  $g(x) = \frac{1}{80}x(2 - x)$  függvényeket, majd lerajzoltatjuk ezek grafikonjait, hogy lássuk, hogy nem rosszul gépeltük be a függvényeket (l. 3.13. ábra)

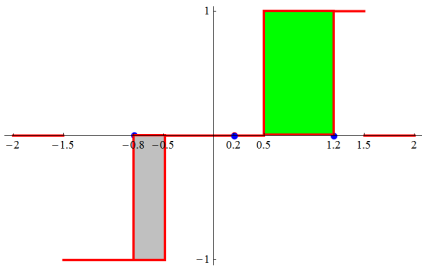
**II. Lépés:** Kiterjesztjük az  $f$  és a  $g$  függvényeket először a  $[-2, 2]$  intervallumon értelmezett **páratlan függvényé**, majd 4-periódusú függvényekké az egész számegyenesre (l. 3.14. ábra)



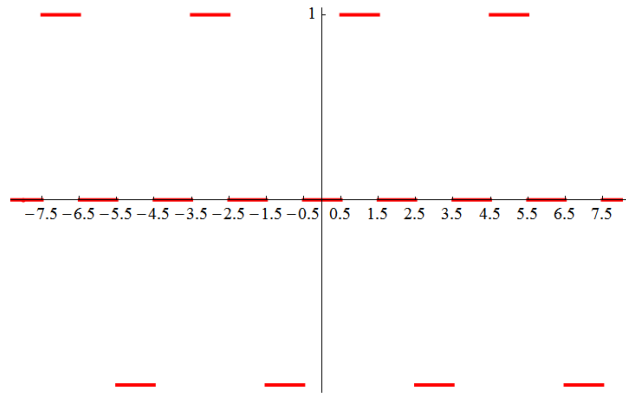
(a) A 36. Példabeli  $g(x)$  ahogy a feladatban adott.



(b) A  $g(x)$  páratlan kiterjesztése



(c)  $x = 0.2, t = 1$ -re  $u(0.2, 1) = \frac{1}{2} \cdot$  (zöld box területe – szürke box területe)

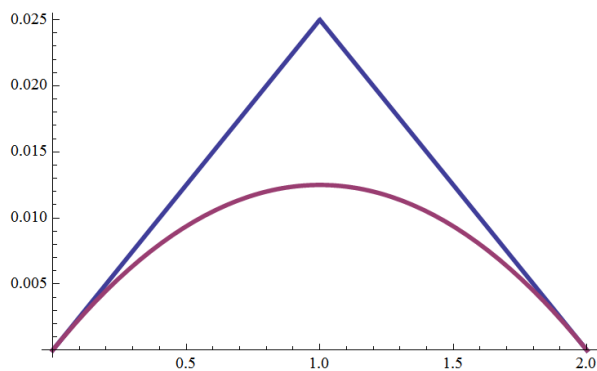


(d) A (b)-beli függvény periódikus kiterjesztése

3.12. ábra. A 36. Példabeli  $g(x)$  függvény.

```
L := 2
c := 3.1

In[47]:= f[x_] := (1 / 40) * (1 - Abs[x - 1])
In[48]:= g[x_] := (1 / 80) * x * (2 - x)
In[49]:= Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, L}, PlotStyle -> Thickness[0.008]]
Out[49]=
```



3.13. ábra. Első lépés a 37. példa megoldásában.

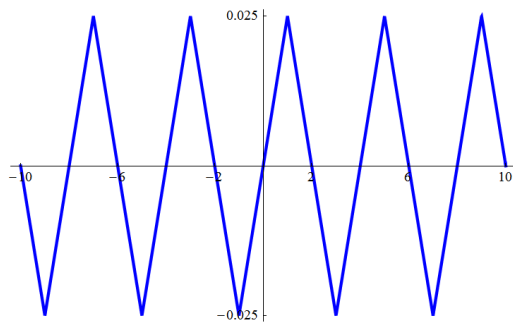
**III. Lépés:**Felírjuk a (3.29) formulát az  $u(x, t)$  kiszámítására, majd kirajzoltatjuk az  $u(x, t)$  függvény grafikonját (ami egy felület) a megfelelő Plot paranccsal (l. 3.15. ábra) Ezután lerajzoltatjuk a húr alakját  $t = 2.2$ -ben.



```
In[50]:= f1[x_ /; 0 ≤ x ≤ L] := f[x]
f1[x_ /; -L ≤ x < 0] := -f1[-x]
f1[x_ /; x < -L] := f1[x + 2 * L]
f1[x_ /; x > L] := f1[x - 2 * L]
```

```
In[68]:= Plot[f1[x], {x, -10, 10},
  Ticks → {{-10, -6, -2, 2, 6, 10}, {-0.025, 0.025}},
  PlotStyle → {Thickness[0.006], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

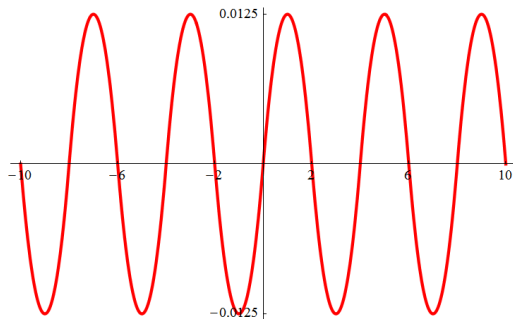
Out[68]=



```
In[55]:= g1[x_ /; 0 ≤ x ≤ L] := g[x]
g1[x_ /; -L ≤ x < 0] := -g1[-x]
g1[x_ /; x < -L] := g1[x + 2 * L]
g1[x_ /; x > L] := g1[x - 2 * L]
```

```
In[66]:= Plot[g1[x], {x, -10, 10},
  Ticks → {{-10, -6, -2, 2, 6, 10}, {-0.025 / 2, 0.025 / 2}},
  PlotStyle → {Thickness[0.006], RGBColor[1, 0, 0]}]
```

Out[66]=

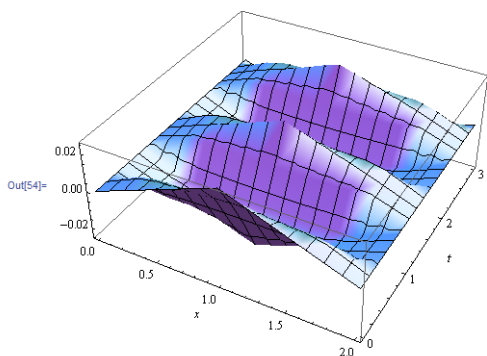


3.14. ábra. Második lépés a 37. példa megoldásában.

```

In[53]= u[x_, t_] = 0.5 * (f1[x + c * t] + f1[x - c * t]) +
(2 * c) ^ (-1) * Integrate[g1[p], {p, x - c * t, x + c * t}]
Out[53]= {0.5 (f1[-3.1 t + x] + f1[3.1 t + x]) + 0.16129  $\int_{-3.1 t + x}^{3.1 t + x} g1[p] dp$ }
In[54]= Plot3D[Evaluate[u[x, t]], {x, 0, 2}, {t, 0, 3}, AxesLabel -> {x, t}, PlotRange -> All]

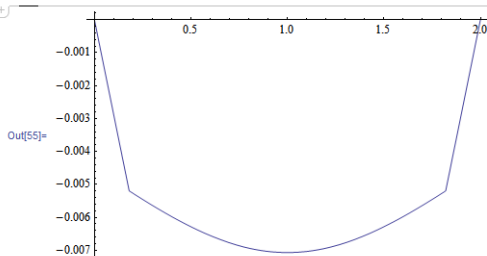
```



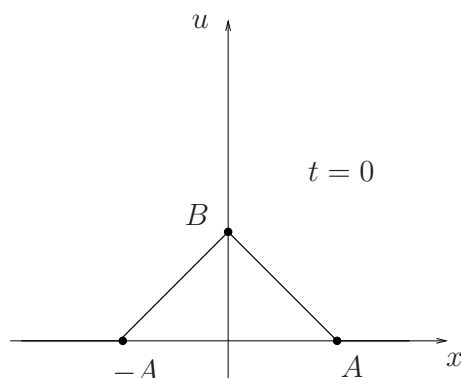
```

In[55]= Plot[Evaluate[u[x, 2.2]], {x, 0, 2}, PlotRange -> All]

```



3.15. ábra. Harmadik lépés a 37. példa megoldásában.

3.16. ábra. A kezdetben három ujjunkkal lefogott végtelen hosszú húr alakja  $t = 0$ -ban

### 3.2.3. Végtelen hosszú húr esete

Mostantól az  $u(0, t) = u(L, t) \equiv 0$  kerületi feltételt eldobjuk, ami marad az a *végtelen hosszú húr esete*, vagy úgy is felfoghatjuk, hogy a hullám egyenlete.  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

Tehát mint korábban a D'Alambert módszernél láttuk, ennek megoldása:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

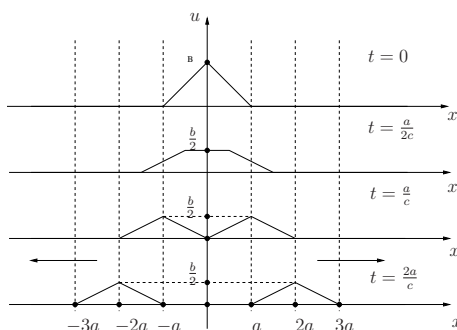
**38. PÉLDA:** Ha  $f(x) \equiv 0$  és  $g(x) = \cos x$ , akkor

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} (\sin(x + ct) - \sin(x - ct)) = \frac{1}{c} \cos x \sin ct.$$

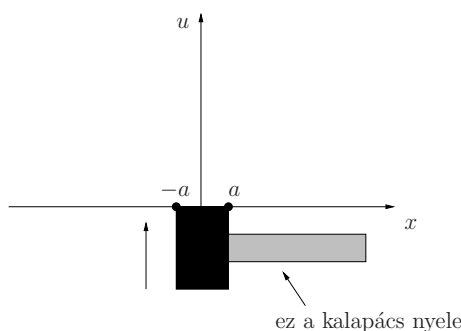
(Itt használtuk a  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$  összefüggést.)

**39. PÉLDA:** Tekintsünk egy végtelen hosszú húrt, amelyet három ujjunkkal lefogunk a  $(-a, 0)$ ;  $(a, 0)$ ;  $(0, b)$  pontokban, majd elengedjük. Írjuk fel a húr mozgását leíró  $u(x, t)$  függvényt.

*Megoldás:* Ekkor  $f(x) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & \text{ha } |x| \leq a \\ 0 & \text{ha } |x| > a \end{cases}$  és  $g(x) \equiv 0$ , hiszen a húrt magára hagytuk.



3.17. ábra. A fenti végtelen hosszú húr mozgása

3.18. ábra. A kalapáccsal megütjük az  $x$ -tengelyen fekvő végtelen hosszú húr.

A keresett  $u(x, t)$  függvény:  $u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)]$ , melyet a következő ábrák szemléltetnek:

#### 40. PÉLDA: Kalapácsütés:

A húr az  $x$  tengelyen fekszik, és rávágunk egyet a kalapáccsal. Az ütés középpontja az  $x = 0$  és a kalapácsütés az  $|x| < a$  pontoknak  $g(x) = 1$  sebességet ad a  $t = 0$ -ban, a többi pontnak nem ad sebességet. írjuk fel a húr alakját leíró  $u(x, t)$  függvényt!

Megoldás:

$$f(x) \equiv 0; g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| < a \\ 0, & \text{ha } |x| \geq a \end{cases}.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \frac{1}{2c} \{\text{hossza az: } (x - ct, x + ct) \cap (-a, a) \text{-nak}\}.$$

Ekkor  $u\left(x, \frac{a}{2c}\right) = \frac{1}{2c} \left\{ \text{hossza az: } \left(x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2}\right) \cap (-a, a) \text{-nak} \right\}$ . Ez különböző  $|x| < \frac{a}{2}$ -re;  $\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$ -re és  $x > \frac{3a}{2}$ .

A rezgő húr egyenlete megoldásának

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

alakjából látszik, hogy az  $(x_0, 0)$  beli kezdeti feltétel hatása  $c$  sebességgel, vagy legfeljebb  $c$  sebességgel terjed. Vagyis a megoldást a kezdeti feltételek az  $(x_0, 0)$ -ban csak a satírozott szektoron belül befolyásolják.

**5. FELADAT:** Végtelen hosszú húr fekszik az  $x$ -tengelyen.  $t = 0$  pillanatban ráütünk egy kalapáccsal alulról felfelé egységnyi sebességgel. Tudjuk, hogy a kalapács feje 2cm széles és a középpontja éppen az  $x = 0$ -ban üti meg a húr. Rajzoljuk le a húr alakját a  $t = 10$  pillanatban.

**6. FELADAT:** Végtelen hosszú rúd rezgését a következőképpen írhatjuk le:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0.2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ 0.2 - 0.2x, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{ha } x \notin [0, 1] \end{cases} \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Állapítsuk meg a rúd alakját  $t = 1$ -ben.

### 3.3. Hővezetés egyenlete

#### 3.3.1. Hővezetés véges hosszúságú rúdban

Képzeljünk el egy rudat melynek mindkét végét  $0^{\circ}\text{C}$ -os vízzel telt hatalmas tartályokba tették. A rúd hossza  $l$  Úgy képzeljük, hogy a rúd az  $x$ -tengelyen van, és bal végpontja a *zérus*. A rúd kezdeti hőmérsékletét az  $f(x)$  függvény írja le. Határozzuk meg az  $u(x, t)$  függvényt, amely a rúd hőmérsékletét írja le az  $x$  pontban  $t$  idő múlva.

Mivel a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb felé, ezért az ábra által szemléltetett állapot az idő múlásával változik. Egy adott  $x$  pontban a rúdnak néha magasabb,

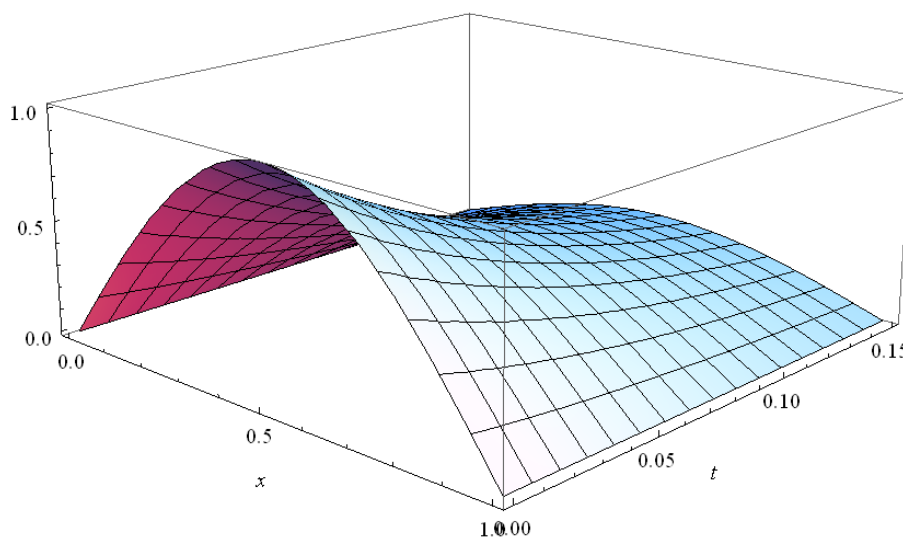
```
In[74]:= sol = NDSolve[{D[u[x, t], t] == D[u[x, t], x, x], u[x, 0] == Sin[Pi * x],
  u[0, t] == 0, u[1, t] == 0}, u, {x, 0, 1}, {t, 0, 0.15}]
```

Out[74]=

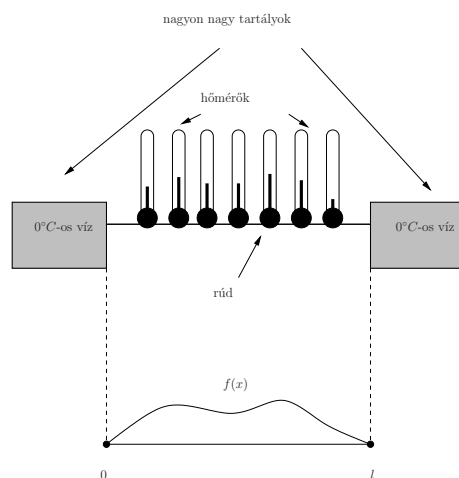
```
{{u -> InterpolatingFunction[{{0., 1.}, {0., 0.15}}, <>]}}
```

```
In[75]:= pl = Plot3D[Evaluate[u[x, t] /. sol[[1]]], {x, 0, 1}, {t, 0, 0.15},
  Axes -> True, AxesLabel -> {x, t}, PlotRange -> All]
```

Out[75]=



3.19. ábra. Az  $u_t = u_{xx}$ ,  $u(0, t) = u(1, t) \equiv 0$ ,  $u(x, 0) = \sin(x)$  egyenlet megoldása a Mathematica **NDSolve** parancsával.

3.20. ábra. Ez az hőmérséklet  $t = 0$ -ban.

néha alacsonyabb a hőmérséklete az idő előrehaladásával. Hogy egy adott  $x$  pontban  $t$  idő múlva mért  $u(x, t)$  hőmérsékletet meghatározhassuk, fel kell használni azt a Fouri-ertől származó észrevételt, hogy a hőterjedést az

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < l; \quad 0 < t \quad (3.32)$$

másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet írja le. (Ennek levezetését megtalálhatjuk Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete című könyvében.) A  $k$  konstans mértékegysége  $\text{cm}^2/\text{sec}$  és angolul thermal diffusivity-nek hívják.

| anyag     | $k$ ( $\text{cm}^2/\text{sec}$ ) |
|-----------|----------------------------------|
| ezüst     | 1.71                             |
| réz       | 1.14                             |
| aluminium | 0.86                             |
| öntöttvas | 0.12                             |
| gránit    | 0.011                            |
| tégla     | 0.0038                           |
| víz       | 0.00144                          |

(A táblázat a [2] könyvből származik.)

A *kezdeti feltétel* a rúd hőmérséklete a  $t = 0$ -ban, vagyis  $u(x, 0) = f(x)$ . A *kerületi feltétel* pedig abból adódik, hogy a rúd két vége olyan nagy  $0^\circ\text{C}$ -os vizet tartalmazó tartályokban van, melyeket a rúdból áramló hő nem tud felmelegíteni. (Ezért kell, hogy

a tartályok nagyon nagyok legyenek.) Tehát a *kerületi feltétel*:  $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ .  
Vagyis:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \\ u(0, t) = u(l, t) \equiv 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.33)$$

Ezt a problémát is a Fourier-sorok alkalmazásával oldjuk meg. (A hővezetés elméletét Fourier alkotta meg, és a róla elnevezett sorokat pontosan ezen probléma megoldása céljából vezette be 1822-ben.)

*Megoldás:* A (3.33) egyenlet megoldását olyan végtelen függvénysor összegeként kereshetjük, amely függvénysor tagjaiban a változókat szét lehet választani:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Ezt (3.33)-be helyettesítve:

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Ez két darab közönséges differenciálegyenletet ad:  $T' = -\lambda kT \Rightarrow T(t) = Ae^{-\lambda kT}$ .

Továbbá:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l \text{ és } X(0) = X(l) = 0.$$

Ez pontosan az a probléma, mint ami a rezgő húr esetén fordult elő. Amint ott láttuk, ennek megoldása:

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Tehát

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (3.34)$$

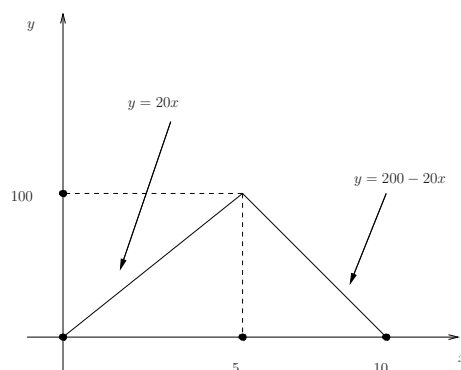
feltéve, hogy  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$  az  $f(x)$  függvény tiszta sinusos Fourier-sora vagyis:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) dt. \quad (3.35)$$

Az  $\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (0 < x < l, 0 < t) \\ u(0, t) = u(l, t) \equiv 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$  problémát tehát úgy oldjuk meg,

hogy az  $f(x)$  függvényt tiszta sinusos Fourier-sorba fejtjük a  $[0, l]$ -en. (Ezt már gyakoroltuk a rezgő húr esetén.) Innen nyerjük az  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  együtthatókat, majd ezek





3.21. ábra. Egy rúd kezdeti hőmérséklete

segítségével felírjuk az  $u(x, t)$  képletét az  $\{A_n\}$ -nek értékeinek behelyettesítésével az

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

összefüggésbe.

**41. PÉLDA:** Oldjuk meg a  $\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & (0 < x < 10, 0 < t) \\ u(t, 0) = u(10, t) \equiv 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$  feladatot,

ha  $l = 10$  és  $f(x) = \begin{cases} 20x & \text{ha } 0 \leq x \leq 5 \\ 200 - 20x & \text{ha } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$

Legyen  $k = 1$ .

Vagyis  $t = 0$ -ban a rúd közepén a hőmérséklet  $100^\circ\text{C}$ -os, és a vége felé lineárisan csökken 0-hoz.

*Megoldás:*

Tiszta sinusos Fourier-sorba kell fejteni az  $f(x)$  függvényt. Vagyis meg kell találni az  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  értékeket, melyekre  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$  ( $0 \leq x \leq l$ ). A korábbi tanulmá-

nyainkból tudjuk, hogy  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$ .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{5} \int_0^5 20x \sin \frac{n\pi}{10} x dx + \frac{1}{5} \int_5^5 (200 - 20x) \sin \frac{n\pi}{10} x dx = \\ &= -200 \frac{-2 \sin(\frac{n\pi}{2}) + n\pi \cos(\frac{n\pi}{2})}{n^2 \pi^2} + 200 \frac{-2 \sin(n\pi) + n\pi \cos(\frac{n\pi}{2}) + 2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2 \pi^2} = \\ &= \frac{800}{n^2 \pi^2} \sin(\frac{n\pi}{2}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\text{Mivel } \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 4k \\ 1, & \text{ha } n = 4k + 1 \\ 0, & \text{ha } n = 4k + 2 \\ -1, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}, \text{ így}$$

$$f(x) = \frac{800}{\pi^2} \left[ \frac{\sin(\frac{x\pi}{10})}{1^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10} \cdot 3)}{3^2} + \frac{\sin(\frac{x\pi}{10} \cdot 5)}{5^2} - \frac{\sin(\frac{x\pi}{10} \cdot 7)}{7^2} + \dots \right].$$

Használva az

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

összefüggést kapjuk:

$$u(x, t) = \frac{800}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{10}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{10}(2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} \quad (3.37)$$

**7. FELADAT:** Határozzuk meg a következő kezdeti érték probléma  $u(x, t)$  megoldását:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ u(x, 0) = 4 \sin(4\pi x) \cos(2\pi x) \\ u(0, t) = u\left(\frac{1}{2}, t\right) \equiv 0 \end{cases} .$$

## 4. fejezet

# Vektoranalízis

### 4.1. Vektorterek

**42. PÉLDA:** Forgassuk a teret a  $z$  tengely körül  $\omega$  szögsebességgel!

(Ez  $\frac{\omega}{2\pi}$  körfordulást jelent másodpercenként.)

Ekkor a tér egy  $P$  pontjának a pályája egy  $xy$ -síkkal párhuzamos kör. Ha  $\vec{F}(P)$  a  $P$  pont sebességvektora, akkor amint a fizikában tanultuk:  $F(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$ , ha  $P(x, y, z)$ . Ez egy úgynevezett *vektorteret* definiál. Vagyis a tér minden egyes  $(x, y, z)$  pontjához hozzárendelünk egy vektort az  $(x, y, z) \rightarrow (-\omega x, \omega y, 0)$  szabállyal.

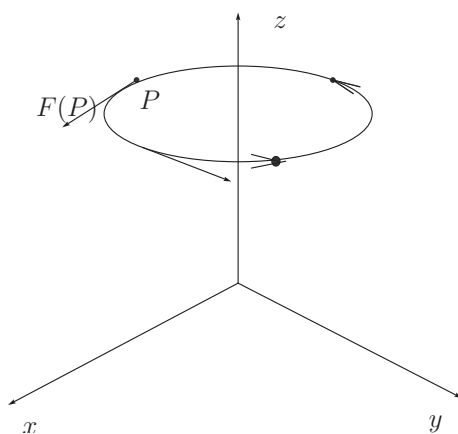
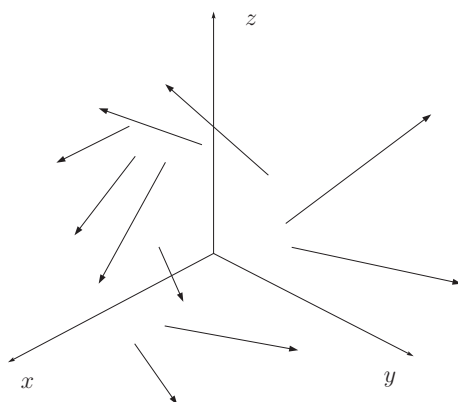
**43. PÉLDA:** Legyen  $f(x, y, z) = xyz$  (vagyis  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ) ez NEM vektortér, hiszen az  $f$  a tér minden pontjának egy számot,  $(xyz)$ -t feleltet meg. Az ilyen függvényeket *skalártérnek* is hívjuk. Azonban a  $grad(f)$  már egy vektortér, hiszen  $grad(f) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Nevezetesen  $grad(f)(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ . Az  $\vec{F} = grad(f)$  (ahol  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ) alakú vektortereket *gradiens vektortereknek* hívjuk.

A továbbiakban gyakran használjuk az

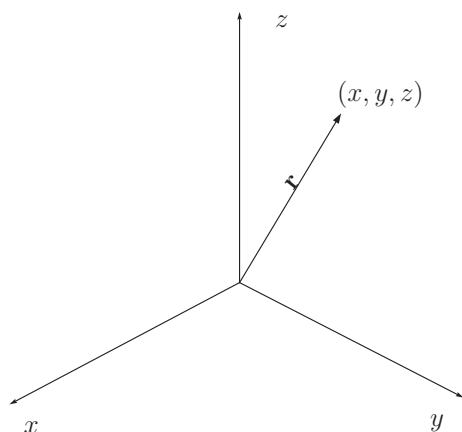
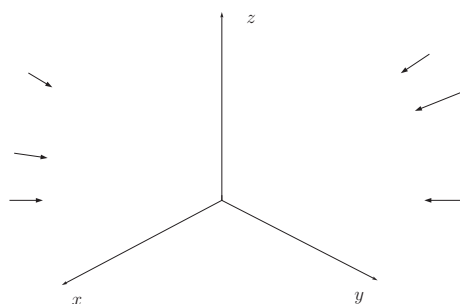
$$\mathbf{r} = (x, y, z) \tag{4.1}$$

jelölést. Vagyis  $\mathbf{r}$  jelenti az általános  $(x, y, z)$  pont helyvektorát. Ezt azért vezetjük be, hogy bizonyos vektorterek felírása egyszerűbb legyen. Az  $\mathbf{r}$  hosszát  $r$ -rel jelöljük. Tehát

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4.1. ábra.  $z$ -tengely körüli forgás.

4.2. ábra. Egy általános vektortér.

4.3. ábra. Az  $\mathbf{r}(x, y, z) := (x, y, z)$  vektortér.

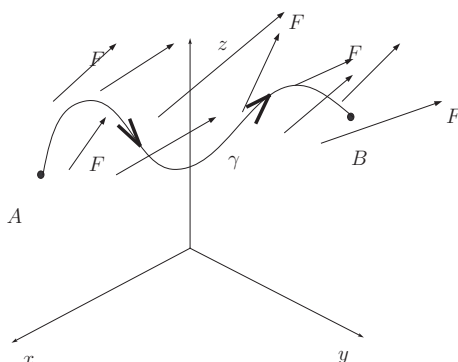
4.4. ábra.

Legyen  $P$  egy egységnyi tömegű pont, melynek koordinátái  $(x, y, z)$  és az origóban a Föld középpontja,  $M$  van. Határozzuk meg azt az  $\vec{F}(P)$  erőt, amellyel az  $M$  vonzza a  $P$ -t.

Newton törvénye szerint  $\vec{F}(P)$  iránya a  $\overrightarrow{PM}$  iránya és az  $\vec{F}(P)$  hossza fordítva arányos  $r^2$ -tel. Ebből:  $\vec{F}(\mathbf{r}) = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , ahol  $k > 0$ . Vagyis

$$\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{-kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Az ilyen vektortereket erőtereknek is hívhatjuk.



4.5. ábra.

*Fordítva:* Ha adott egy  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  vektortér, akkor ezt felfoghatjuk, mint egy térben áramló folyadék sebességterét, vagy mint valamiféle erőteret. Ez segíti a szemléletet, mert ennek a vektoranalízis fejezetnek minden része fizikai indíttatású.

Két alapkérdést fogunk megválaszolni:

*1.Kérdés:* Adott egy  $\gamma$  irányított görbe a térben és egy erőter,  $\vec{F}$ . Hogyan számolhatjuk ki a  $\gamma$ -án futó pontnak az erőter ellenében végzett munkáját? (Vagy a ponton az erőter által végzett munkát?)

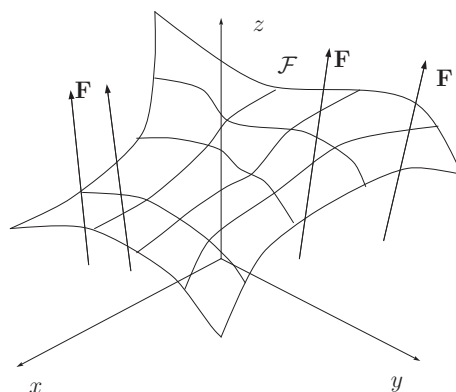
*2.Kérdés:* Adott egy  $\vec{F}$ -sebességtér szerint áramló folyadék (időben állandó). Kérdés: Mekkora egy  $\mathcal{F}$  felületen időegység alatt átáramló folyadék térfogata?

Ezt a térfogatot definíció szerint az  $\vec{F}$ -nek a  $\mathcal{F}$ -re vonatkozó *fluxusának* hívjuk.

A fenti *1. kérdésre* a vonalmenti integrál, míg a *2. kérdésre* a felületmenti integrál segítségével adjuk meg a választ.

## 4.2. Vonalmenti integrál

Adott egy  $\gamma$  irányított görbe, melynek paraméterezése:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  és  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ . (Minden komponens függvény minden parciális deriváltja létezik, és kétszer folytonosan deriválható a  $\gamma$  egy környezetében.) Ezeket a feltételeket a "Vonalmenti integrál" fejezetben mindig használjuk.



4.6. ábra.

**21. DEFINÍCIÓ:** Az  $\vec{F}$  erőter által a  $\gamma$ -án  $A$ -ból  $B$ -be mozgó ponton végzett munkát vonalmenti integrálnak nevezzük (pontosabban az  $\vec{F}$  vonalmenti integráljának a  $\gamma$ -án. Jele:  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$ .

Tehát a matematikában a *vonalmonti integrál* az a mennyiség, ami a fizikában tanult *munka* fogalmának felel meg.

### Hogyan számoljuk ki a munkát?

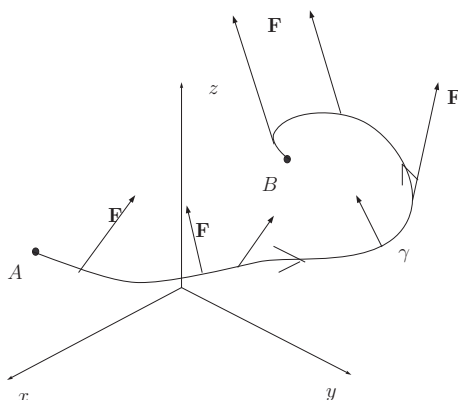
Munka = (elmozdulás irányába eső erő) · (elmozdulás).

*Első lépés:* Tegyük fel először, hogy a  $\gamma$  görbe egy *egyenes*  $AB$  szakasz, az  $\vec{F}$  erőter pedig minden pontban egy *konstans*  $\vec{F}_0$  erő.

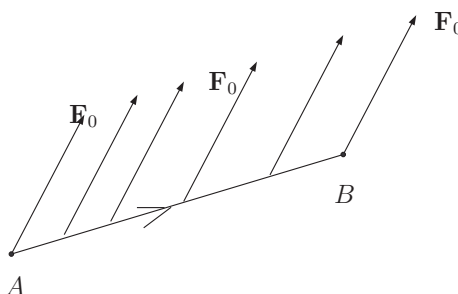
Ekkor az  $\vec{F}_0$ -nak az  $\vec{AB}$  irányába eső merőleges vetületvektora:  $\vec{F}_0 \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$ , ez az elmozdulás irányába eső erő, szorozva az elmozdulással:  $|\vec{AB}|$ , adja a munkát, ami

$$W = \vec{F}_0 \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} |\vec{AB}| = \vec{F}_0 \vec{AB}$$

*Második lépés:* A munka általános  $\gamma$  görbe, és általános  $\vec{F}$  vektortér esetén:

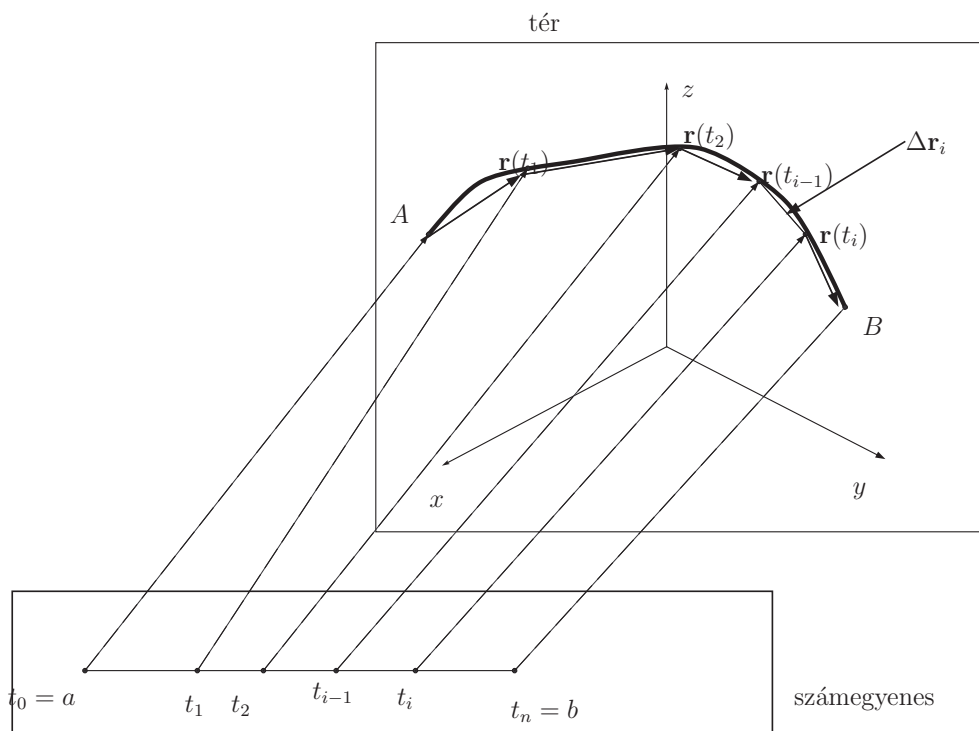


4.7. ábra.



4.8. ábra.



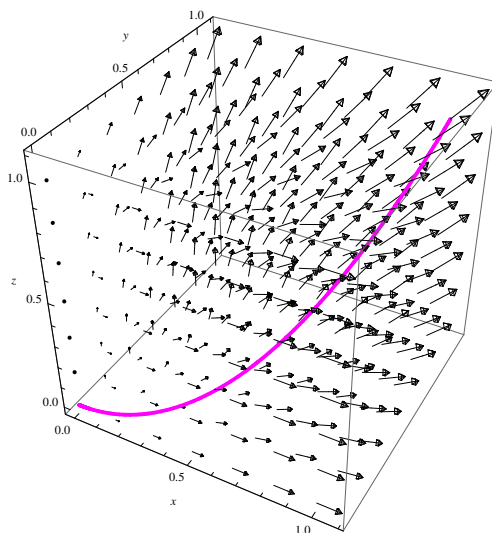


4.9. ábra.

Ezt a problémát az első lépésben tárgyalt esetre visszavezetve oldjuk meg. Beosztjuk a  $\gamma$  görbe  $[a, b]$  paraméter intervallumát  $n$  részre,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  úgy, hogy  $\max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Minden  $1 \leq i \leq n$  -re legyen  $P_i$  az a pont, melynek helyvektora  $\mathbf{r}(t_i)$ . A  $\gamma$  görbének a  $(P_{i-1}, P_i)$  ívét a  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$  vektorral helyettesítjük. Ezen a  $\Delta \mathbf{r}_i$  szakaszon alkalmazva az első pont eredményét  $\Delta \mathbf{r}_i \cdot \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1}))$  a végzett munka közelítőleg, ha az  $\vec{F}$ -et konstansnak tekintjük a  $\Delta \mathbf{r}_i$ -n. Tehát nagy  $n$ -re a  $t_{i-1}, t_i$  paraméterekhez tartozó  $\mathbf{r}(t_{i-1}), \mathbf{r}(t_i)$  íven végzett munka közelítőleg:  $\vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1})) [\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})] \approx \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \dot{\mathbf{r}}(t_{i-1}) (t_i - t_{i-1})$ . Ezeket összegezve a munka:

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{F}(\mathbf{r}(t_{i-1})) \dot{\mathbf{r}}(t_{i-1}) (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$



4.10. ábra. 44. Példa vektortere és görbéje.

Tehát azt kaptuk, hogy az  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  vonalmenti integrált a következőképpen számíthatjuk ki:

**25. TÉTEL:**

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

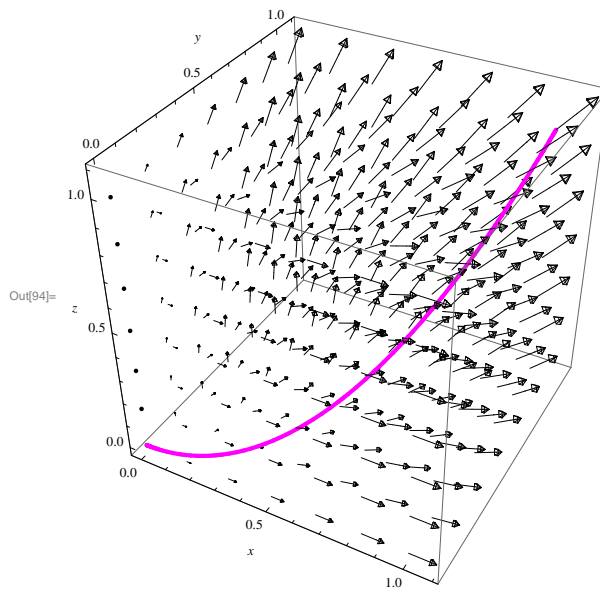
**44. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (x, yz, y)$  és  $\gamma$  paraméterezése:  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$   $0 \leq t \leq 1$  (l. ábra 4.10). Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \int_0^1 \underbrace{(t, t^5, t^2)}_{\vec{F}(\mathbf{r}(t))} \underbrace{(1, 2t, 3t^2)}_{\dot{\mathbf{r}}(t)} dt = \int_0^1 (t + 2t^6 + 3t^4) dt = \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{2}{7}t^7 + \frac{3}{5}t^5 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{97}{70}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

```

In[64]= Needs["VectorAnalysis`"]
In[68]= Needs["VectorFieldPlots`"];
In[54]= F[x_, y_, z_] = {x, y * z, y};
In[48]= ClearAll[t]
In[55]= r[t_] = {t, t^2, t^3};
In[61]= ClearAll[a, u, v, vf1]
In[92]= vf1 = VectorFieldPlot3D[F[x, y, z], {x, 0, 1},
      {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, VectorHeads -> True, AxesLabel -> {x, y, z}];
In[93]= c1 = ParametricPlot3D[r[t], {t, 0, 1},
      PlotStyle -> {Thickness[0.008], RGBColor[1, 0, 1]};
In[94]= Show[vf1, c1, Axes -> True]

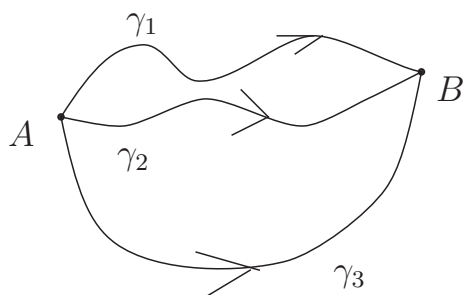
```



```

In[79]= ClearAll[a]; ClearAll[b];
In[84]= a := Apply[F, r[t]]
In[88]= a
Out[88]= {t, t^5, t^2}
In[86]= b := D[r[t], t]
In[87]= b
Out[87]= {1, 2 t, 3 t^2}
In[89]= Integrate[a.b, {t, 0, 1}]
Out[89]= 97/70

```



4.11. ábra.

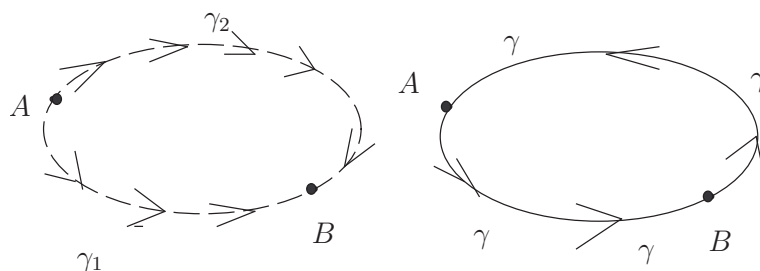
A megoldás folyamán először lokalizáltuk az  $\vec{F}$ -et a  $\gamma$ -ra,  $\vec{F}(\mathbf{r}(t))$ -t kiszámoltuk. Ez úgy történik, hogy az  $\vec{F}(x, y, z) = (x, yz, y)$  képletében a jobb oldalon  $\forall x$  helyébe az  $\mathbf{r}(t)$  első komponens függvényét,  $t$ -t írjuk,  $\forall y$  helyébe az  $\mathbf{r}(t)$  második komponens függvényét,  $t^2$ -t írjuk,  $\forall z$  helyébe az  $\mathbf{r}(t)$  harmadik komponens függvényét,  $t^3$ -t írjuk.

$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (t, t^2 \cdot t^3, t^2)$ , majd az  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ -t kiszámítjuk  $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 2t, 3t^2)$ . Ezután meghatározzuk az  $\vec{F}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$  skaláris szorzatot, ami egy  $t$ -től függő valós értékű függvény, és ezt a szokásos módon kiintegráljuk az  $[a, b]$ -n.

### 4.2.1. Vonalintegrál függetlensége az úttól

A kérdés az, hogy milyen feltételek esetén lesz igaz, hogy rögzített  $A$  és  $B$  pontok esetén az  $A$  és  $B$ -t összekötő bármely két görbére az  $\vec{F}$  vektortér vonalmenti integrálja megegyezik, vagyis a munka független az úttól, csak az erőterétől és az elmozdulás  $A$  és  $B$  végpontjaitól függ?

**22. DEFINÍCIÓ:** Azt mondjuk, hogy egy  $\vec{F}$  vektortér *konzervatív*, ha az  $\vec{F}$  gradiens vektortér. Vagyis  $\vec{F} = \text{grad } f$  valamely  $f : H \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  függvényre, ekkor az  $f$  függvény az  $\vec{F}$  vektortér *potenciál függvénye*.



4.12. ábra.

**23. DEFINÍCIÓ:** Azt mondjuk, hogy az  $\vec{F}$  vektortér vonalmenti integrálja független az úttól, ha bármely  $A$  és  $B$  pontokra és ezeket összekötő bármely két  $\gamma_1, \gamma_2$  irányított egyszerű görbévekre, melyek kezdőpontja  $A$ , és végpontja  $B$

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4.3)$$

teljesül, feltéve, hogy a  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  végig az  $\vec{F}$  értelmezési tartományában halad.

**3. MEGJEGYZÉS:** Vegyük észre, ha az  $\vec{F}$  vonalmenti integrálja független az úttól, akkor  $\forall$  zárt  $\gamma$  görbére  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0$ , hiszen  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0$ .

Ebben a fejezetben az a célunk, hogy találjunk olyan feltételt, amely segít annak eldöntésében, hogy egy adott vektortér vonalintegrálja független-e az úttól. Ehhez nélkülözhetetlen a következő fogalom bevezetése és annak tanulmányozása:

**24. DEFINÍCIÓ:**  $\text{curl}(\vec{F})$  vagy  $\text{rot}(\vec{F})$  definíciója:

- (a) Ha  $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  egy síkbeli vektortér, akkor ha  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ , az  $\vec{F}$  rotációja:  
 $\text{rot}(\vec{F}) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ . Néha azt írjuk, hogy  $\text{curl}(\vec{F})$  a  $\text{rot}(\vec{F})$  helyett. A  $\text{curl}(\vec{F})$  vagy  $\text{rot}(\vec{F})$  (ugyanazt jelentik) értéke tehát síkbeli vektortér esetén egy valós szám.
- (b) Ha  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  egy térbeli vektortér, akkor ha  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  a  $\text{curl}(\vec{F}) = \text{rot}(\vec{F})$  egy vektor:

$$\text{curl}(\vec{F}) = \text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

**45. PÉLDA:** A  $z$  tengely körül  $\omega$  szögsebességgel való forgás sebességtere:  $\vec{F}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$ . Ennek rotációja:

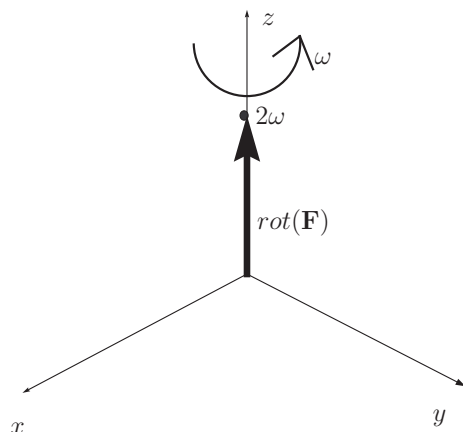
$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2\omega).$$

Tehát a  $z$  tengellyel párhuzamos és felfelé mutató  $2\omega$  hosszú vektor.

**46. PÉLDA:**  $\vec{F}(\mathbf{r}) = \frac{-k\mathbf{r}}{r^3}$  gravitációs vektortér, ahol  $k > 0$  valós szám. Kérdés a  $\text{curl}(\vec{F})$  értéke.

Megoldás:

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= \left( \frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ \text{rot}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-kx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-ky}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-kz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} \\ &= 3 \left( (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \right) k (yz - yz, -xz + zx, xy - xy) \equiv (0, 0, 0) = \mathbf{0} \end{aligned}$$



4.13. ábra.

Diszkutálva a fenti két példát látható, hogy a rotáció az örvényléssel kapcsolatos, hiszen a gravitációs vektortérnél a második példában minden vektor az origó felé mutat. Itt nincs örvénylés, ezért a  $\text{rot}(\vec{F}) = \mathbf{0}$ . Míg a forgómozgást leíró első példabeli vektortér rotációja nem tűnik el sehol sem.

**47. PÉLDA:**  $\vec{F}(x, y) = (-\omega y, \omega x)$ , ez az  $\omega$  szögsebességű origó körüli forgás sebességtére az  $xy$  síkban.  $\text{curl}(\vec{F}) = \omega + \omega = 2\omega$ .

**48. PÉLDA:** Legyen  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  tetszőleges kétszer folytonosan differenciálható függvény és  $\vec{F} = \text{grad}(f)$ . Ekkor

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \left( \underbrace{f''_{zy} - f''_{yz}}_0, \underbrace{f''_{xz} - f''_{zx}}_0, \underbrace{f''_{yx} - f''_{xy}}_0 \right) = \mathbf{0},$$

mivel a vegyes parciális deriváltaknál a deriválás sorrendje felcserélhető. Tehát azt a nagyon fontos megállapítást tettük, hogy konzervatív (gradiens) vektortér rotációja MINDIG azonosan a ZÉRUS VEKTOR!

**26. TÉTEL:** Egy  $\vec{F}$  vektortér vonalmenti integrálja akkor és csak akkor független az úttól, ha  $\vec{F}$  konzervatív.

Tehát a fő problémánk az, hogy megtaláljuk azon vektortereket, melyek vonalmenti integrálja független az úttól. Ez megoldódik, ha megtaláljuk a konzervatív vektortereket. Maradt tehát a következő kérdés:

**Adott egy  $\vec{F}$  vektortér. Hogyan döntjük el, hogy konzervatív-e?**

A választ a curl-teszt adja. A válasz nem "akkor és csak akkor" típusú, hanem elégséges, de nem szükséges feltételt ad. Az itteni curl-tesztnél létezik erősebb állítás, amely viszont egy bonyolultabb fogalmat tartalmaz, nevezetesen az egyszerűen összefüggő halmaz fogalmát.

### 4.2.2. Curl-teszt a síkban

Adott egy  $\vec{F} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  síkbeli vektortér,  $\vec{F} = (F_1, F_2)$ .

**I.** Ha a  $\text{curl}(\vec{F})$  akárcsak egyetlen pontban is zérustól különböző értéket vesz fel, akkor  $\vec{F}$  NEM konzervatív.

**II.** Tegyük fel, hogy  $\text{curl}(\vec{F}) \equiv \mathbf{0}$ .

**A eset:** Az  $\vec{F}$  minden komponens függvényének parciális deriváltja:  $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial y}$  a sík MINDEN pontjában definiálva van. Ekkor az  $\vec{F}$  konzervatív.

**B eset:** Van olyan pont, amelyben legalább az egyik parciális derivált nem definiált. Ekkor a teszt nem mond semmit, tehát ekkor a curl-teszt inconclusive (hatástalan, nem mond semmit). Lehet, hogy az  $\vec{F}$  konzervatív, de az is lehet, hogy nem.

### 4.2.3. Curl-teszt a térben

Adott egy  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  vektortér a térben.  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

**I.** Ha a  $\text{curl}(\vec{F})$  akárcsak egyetlen pontban is zérustól különböző értéket vesz fel, akkor az  $\vec{F}$  NEM konzervatív.

**II.** Tegyük fel, hogy  $\text{curl}(\vec{F}) \equiv \mathbf{0}$ .

**A eset:** Ha mind a kilenc parciális derivált:  $\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial F_3}{\partial z}$  értelmezve van minden pontban, *kivéve esetleg véges sok pontot*, akkor az  $\vec{F}$  konzervatív.



**B eset:** Ha a fenti kilenc parciális derivált közül legalább egy nincs értelmezve végtelen sok pontban, akkor a curl-teszt inconclusive, tehát az is lehet, hogy az  $\vec{F}$  konzervatív, és az is, hogy nem. A curl-teszttel ezt nem tudjuk eldönteni.

**49. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F}(x, y) = \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$ . Ekkor  $\vec{F}$  egy síkbeli vektortér.  $\text{curl}(\vec{F}) = \mathbf{0}$ , de  $\vec{F}$  nincs értelmezve az origóban, így a II/B eset áll fenn, vagyis a curl-teszt inconclusive.

**50. PÉLDA:**  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\vec{F}(\mathbf{r}) = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ . Már beláttuk, hogy  $\text{curl}(\vec{F}) \equiv \mathbf{0}$ . Az egyetlen pont, ahol  $\vec{F}$  nincs értelmezve az origó. Az összes többi pontban mind  $\vec{F}$ , mind a kilenc parciális derivált értelmezve van, így az  $\vec{F}$  konzervatív.

#### 4.2.4. Potenciálfüggvény meghatározása

Ha  $\vec{F}$  egy konzervatív vektortér, akkor van potenciálfüggvénye, vagyis létezik  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , amire  $\vec{F} = \text{grad}(f)$ . A potenciálfüggvény meghatározását egy konkrét példán mutatjuk be.

**51. PÉLDA:**  $\vec{F}(x, y, z) = (1 + 4y + 5z, 2 + 4x, 3 + 5x)$ . Ekkor

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 + 4y + 5z & 2 + 4x & 3 + 5x \end{vmatrix} \equiv (0, 0, 0) \equiv \mathbf{0}.$$

Másrészt az összes parciális derivált mindenütt értelmezett, így az  $\vec{F}$  konzervatív a curl-teszt szerint. Tudjuk, hogy  $f'_x = 1 + 4y + 5z \Rightarrow f(x, y, z) = \int (1 + 4y + 5z) dx + g(y, z) = x + 4xy + 5xz + g(y, z)$ . Másrészt:

$$f'_y = 2 + 4x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (x + 4xy + 5xz + g(y, z)) = 4x + g'_y(x, y).$$

Vagyis

$$4x + g'_y(y, z) = 2 + 4x \Rightarrow g'_y(y, z) = 2 \Rightarrow g(y, z) = 2y + h(z).$$

Tehát

$$f(x, y, z) = x + 4xy + 5xz + 2y + h(z).$$

Így, mivel

$$f'_z = 3 + 5x \Rightarrow 5x + h'(z) = 3 + 5x \Rightarrow h'(z) = 3 \Rightarrow h(z) = 3z + c.$$

Ezért

$$f(x, y, z) = x + 4xy + 5xz + 2y + 3z + c.$$

(Az előző feladatot találgatással is megoldhattuk volna.)

**52. PÉLDA:**  $\vec{F}(x, y, z) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}; -4 \right)$ . A kérdés az, hogy konzervatív-e az  $\vec{F}$ ?

*Megoldás:*  $\text{curl}(\vec{F}) \equiv \mathbf{0}$ , amint azt triviális látni! Azonban az  $\vec{F}$  nem definiált a  $z$  tengely pontjaiban, tehát végtelen sok pontban, így a II/B eset áll fent, a curl-teszt tehát nem segít! Legyen  $\gamma$  az  $x^2 + y^2 = 1$  és  $z = 12$  kör, amely a pozitív irányba irányított. Számítsuk ki  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  értékét! Ha kiderül, hogy  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \neq 0$ , akkor ebből adódik, hogy  $\vec{F}$  nem konzervatív. Tanultuk ugyanis (l. 3. Megjegyzés), hogy konzervatív vektorterek zárt görbén vett vonalmenti integrálja zérus. A  $\gamma$  paraméterezése:  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ ,  $z(t) \equiv 12$  és  $0 \leq t \leq 2\pi$ ; vagyis:  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 12)$ .

Tehát:

$$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = \left( \frac{-\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, -4 \right), \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

$$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1. \quad \int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0.$$

Tehát  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \neq 0$ , így az  $\vec{F}$  nem konzervatív.

A következő tétel azt mutatja, hogy konzervatív vektortér esetén két pont közötti elmozdulás során végzett munka a potenciál függvény ezen pontokban vett értékeinek a különbsége.

**27. TÉTEL:** Legyen  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  egy minden pontban értelmezett gradiens vektor tér. Nevezzük az  $\vec{F}$  potenciál függvényét  $f$ -nek. Tehát:  $\vec{F} = \text{grad}(f)$ . Legyen  $\gamma$  egy görbe, melynek kezdőpontja  $A$  és végpontja  $B$ . Ekkor

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

**Bizonyítás.** Legyen a  $\gamma$  egy paraméterezése  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Tekintsük a

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$$

függvényt. Mivel ez egy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény, alkalmazhatjuk rá a Newton-Leibniz tételt. Használva, hogy

$$g'(t) = \text{grad}(f)(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Tehát

$$f(B) - f(A) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

■

**53. PÉLDA:** Legyen a  $\gamma$  görbe adva az  $\mathbf{r}(t) = (t, 2t^3, 3t^2)$ , ahol  $0 \leq t \leq 1$ , paraméterezéssel. Számítsuk ki az  $\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  értékét, ha

$$\vec{F}(x, y, z) = \text{grad}(e^{x+y+z+1})!$$

*Megoldás:* A  $\gamma$  görbe az origót köti össze az  $A(1, 2, 3)$  ponttal, és az  $\vec{F}$  potenciálfüggvénye:  $f(x, y, z) = e^{x+y+z+1}$ . Tehát

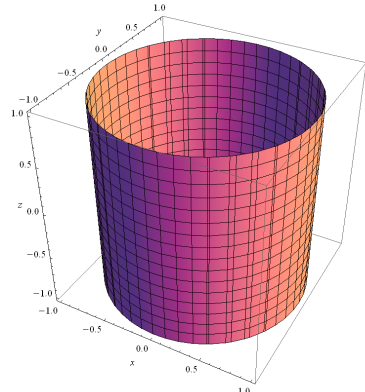
$$\int_{\gamma} \vec{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(1, 2, 3) - f(0, 0, 0) = e^7 - e.$$

**54. PÉLDA:** Adott az  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y, \frac{1}{3}x^3, xy)$  vektortér. Legyen  $\mathcal{F}_1$  az  $x^2 + y^2 = 1$  henger és  $\mathcal{F}_2$  a  $z = y^2 - x^2$  hiperbolikus paraboloid. (l. 4.14. ábra), továbbá legyen  $\gamma$  az  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  felületek metszetként kapott görbe, amit irányítsunk az óramutató járásával ellentétesen. Feladat: Határozzuk meg:  $\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$

*Megoldás:*

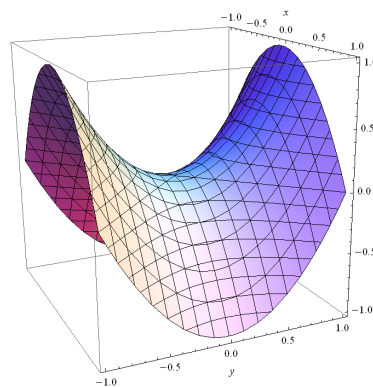
```
In[30]= cyl = ContourPlot3D[x^2+y^2==1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1},
  AxesLabel -> {x, y, z}]
```

Out[30]=

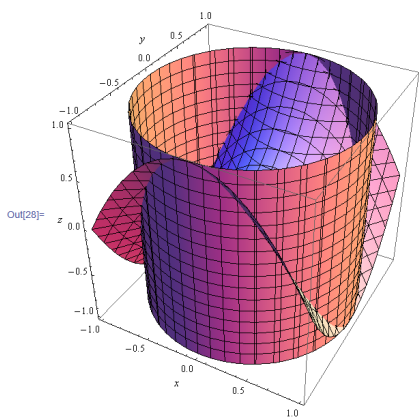
(a) a henger  $x^2 + y^2 = 1$ 

```
In[26]= hyppar = ContourPlot3D[y^2 - x^2 = z, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
  {z, -1, 1}, AxesLabel -> {x, y, z}]
```

Out[26]=

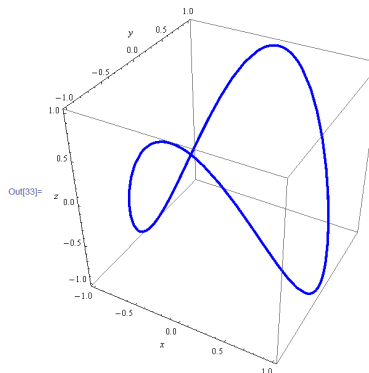
(b) a hiperbolikus paraboloid  $z = y^2 - x^2$ 

```
Show[cyl, hyppar, AxesLabel -> {x, y, z}]
```



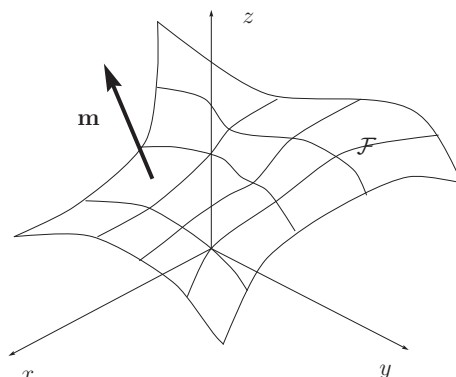
(c) a fenti két felület együtt

```
ParametricPlot3D[{Cos[t], Sin[t], Sin[t]^2 - Cos[t]^2}, {t, 0, 2 Pi},
  AxesLabel -> {x, y, z}, PlotStyle -> {Thickness[0.008], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



(d) A két felület metszete

4.14. ábra. Az 54. Példa görbéjének származtatása.



4.15. ábra.

### 4.3. Felületmenti integrál

Legyen  $\mathcal{F}$  egy elemi felület, és  $\mathbf{r} : T \rightarrow \mathbf{R}^3$  egy paraméterezése  $\mathcal{F}$ -nek. Legyen továbbá  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  egy vektortér, ami legalább kétszer folytonosan differenciálható. Képzünk el, hogy egy folyadék úgy áramlik, hogy a tér bármely  $P$  pontjában  $\vec{F}(P)$  a folyadék sebessége minden időpontban. Az  $\mathcal{F}$  felületet irányíthatjuk vagy az  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ , vagy a  $-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  normálvektorral. Ezáltal a felület irányított felületté válik.

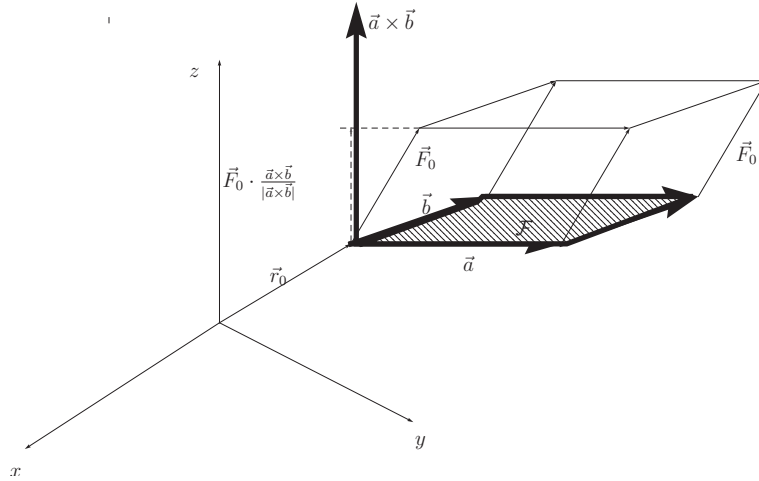
A felület irányítását gyakran úgy adjuk meg, hogy azt mondjuk, hogy a felületet irányítsuk a "felfelé mutató normálissal" (amikor az egyáltalán értelmes). Adott tehát egy irányított  $\mathcal{F}$  felület, és meg akarjuk határozni az  $\mathcal{F}$ -en (az irányítás irányában) időegység alatt átfolyó folyadék előjeles térfogatát.

**25. DEFINÍCIÓ:** Az  $\mathcal{F}$ -en időegység alatt átfolyó, az  $\vec{F}$  sebességtér szerint áramló folyadék térfogatát az  $\vec{F}$  vektortér  $\mathcal{F}$ -re vett *felületmenti integráljának*, vagy *fluxusának* hívjuk, és  $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A}$ -val jelöljük.

Tehát:

- ha a fluxus pozitív, akkor a felület irányításának irányába több folyadék folyik;
- ha a fluxus negatív, akkor az irányítással ellentétes irányba folyik több folyadék;
- ha a fluxus zérus, akkor ugyanannyi folyadék folyik az irányítással egyező és azzal ellentétes irányba időegység alatt.

*Kérdés:* Hogyan számolhatjuk ki a fluxust?



4.16. ábra.

**1. lépés** Tegyük fel, hogy  $\vec{F}$  egy konstans vektortér,  $\vec{F} \equiv \vec{F}_0$  és  $\mathcal{F}$  egy paralelogramma, melyet az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok feszítenek ki, és az  $\vec{a} \times \vec{b}$ -vel irányított:

Az  $\mathcal{F}$  felületen az  $\vec{a} \times \vec{b}$  irányába időegység alatt átfolyó folyadék az ábrán látható paralelepipedont tölti ki. Tehát az  $\vec{F}$ -nek az  $\mathcal{F}$ -re vonatkozó fluxusa ezen paralelepipedon térfogata, ami *alapterület*  $\times$  *magasság*. Az alapterület:  $\mathcal{F}$  területe =  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ , magasság:  $\vec{F}_0$ -nak az  $\vec{a} \times \vec{b}$ -re vett merőleges vetülete, ami  $\vec{F}_0 \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ . Ezekből a paralelepipedon térfogata:  $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \vec{F}_0 \cdot \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ .

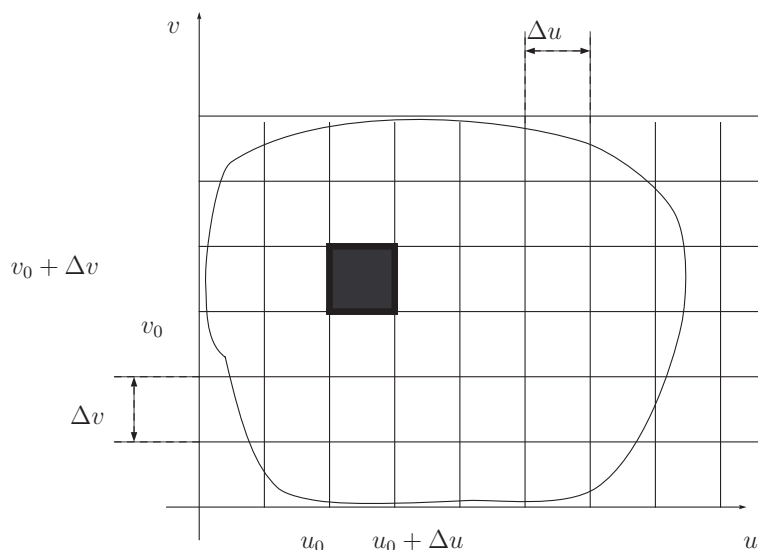
Vagyis, ha  $\vec{F} = \vec{F}_0$  konstans, és  $\mathcal{F}$  egy  $\vec{a}, \vec{b}$  által kifeszített  $\vec{a} \times \vec{b}$ -vel irányított paralelogramma, akkor:  $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ .

**2.lépés:** *Fluxus általános  $\vec{F}$ -re és  $\mathcal{F}$ -re:*

A  $\mathcal{F}$  felület egy paraméterezése:  $\mathbf{r} : T \rightarrow \mathcal{F}$ . Koordináta-vonalak segítségével kicsiny darabokra, elemi részekre particionáljuk a felületet. Két közelítést alkalmazunk, melyek hatása eltűnik, ha a felület ezen felosztását minden határon túl finomítjuk.

Az *első* közelítés az, hogy az ábrán feketével satírozott elemi felületdarab helyett az érintő síkban neki megfelelő paralelogrammát tekintünk.

A *másik* közelítés az, hogy ezen a paralelogrammán az  $\vec{F}$ -et konstansnak,  $\vec{F} \equiv \vec{F}(\mathbf{r}(u_0, v_0))$ -nak vesszük, így alkalmazhatjuk az 1.lépés eredményét. Ha az első ábra elemfelület darabját kinagyítjuk, akkor ezen az elemfelület darabon az 1.lépés ered-



4.17. ábra.

ményét alkalmazva látjuk, hogy közelítőleg:

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u_0, v_0)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \Delta u \Delta v \quad (4.4)$$

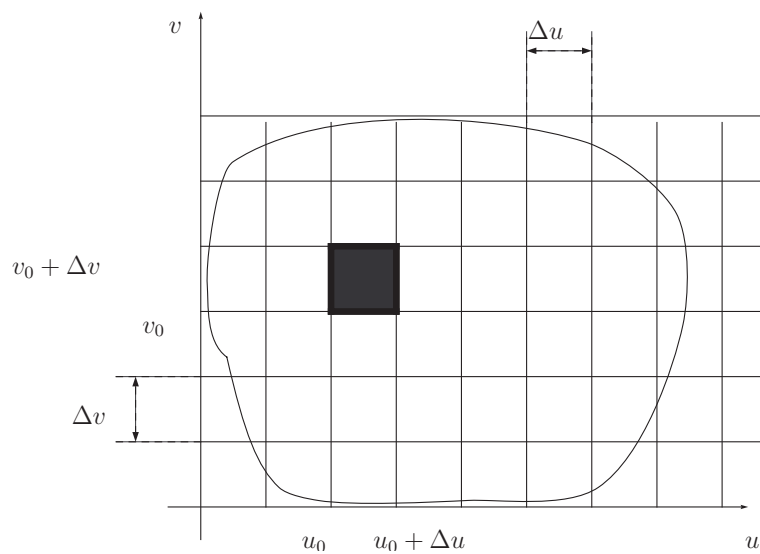
A fluxust az egész felületre úgy kapjuk, ha az elemfelület darabokra vett fluxusokat összegezzük, és  $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$ . Vagyis:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} &= \lim_{\Delta u, \Delta v \rightarrow 0} \sum \vec{F}(\mathbf{r}(u_0, v_0)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) \Delta u \Delta v \\ &= \iint_T \vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv, \end{aligned} \quad (4.5)$$

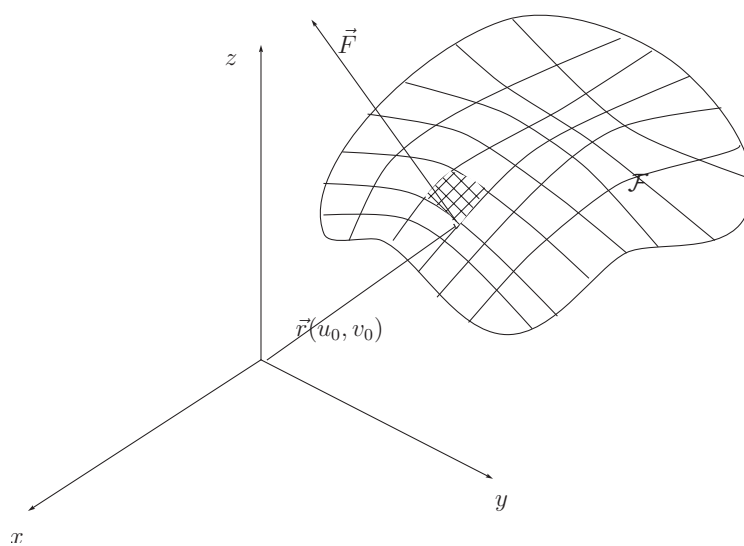
feltéve, hogy az  $\mathcal{F}$  az  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ -vel van irányítva.

Ha az  $\mathcal{F}$ -et a  $-\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ -vel irányítjuk, akkor

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = - \iint_T \vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) dudv.$$



4.18. ábra.



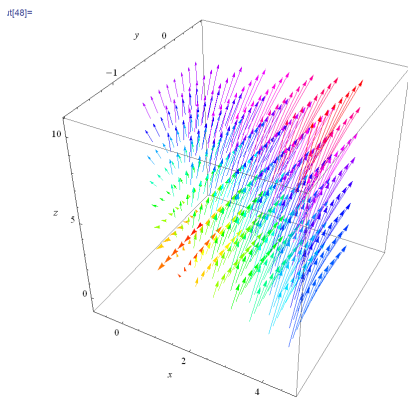
4.19. ábra.



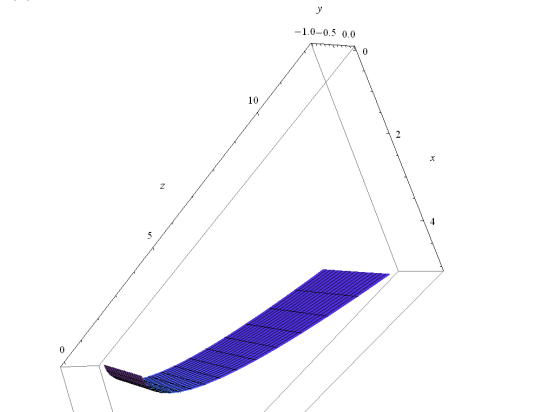
```

In[48]= VectorPlot3D[F[x, y, z], {x, 0, 4}, {y, -1, 0}, {z, 0, 10},
  AxesLabel -> {x, y, z}, VectorStyle -> Arrowheads[0.01],
  VectorColorFunction -> Hue]
In[42]= ParametricPlot3D[r[u, v], {u, 0, 3}, {v, 0, 1}, AxesLabel -> {x, y, z}]
Out[42]=

```



(a) az 55. példa vektortere



(b) az 55. példa felülete

*Fontos speciális eset:* Ha az  $\vec{F}$  vektortérnek a  $\mathcal{F}$  felület minden pontjában a felület normálisára eső merőleges vetülete ugyanaz a szám,

$$\vec{F}(p) \cdot \vec{m}(p) \equiv q,$$

akkor

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = q \cdot \text{felszín}(\mathcal{F}). \quad (4.6)$$

Ez alkalmazható például, ha az  $\mathcal{F}$  egy síkidom, és az  $\vec{F}$  vektortér konstans.

**55. PÉLDA:** Legyen  $\mathcal{F}$  az a felület, melynek egy  $T : 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1$  paraméterezésére  $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v, -v, u^2 + 3v)$  és az  $\mathcal{F}$ -et a felfelé mutató normálissal irányítjuk. Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 2x + y, z)$ .

*Kérdés:*  $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = ?$

**1.lépés:** Az  $\vec{F}$ -et lokalizáljuk az  $\mathcal{F}$  felületre azaz az  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 2x + y, z)$  képlet jobb oldalán található minden  $x$  helyébe  $u + 2v$ -t, minden  $y$  helyébe  $-v$ -t és minden  $z$  helyébe  $u^2 + 3v$ -t írunk. Így kapjuk:

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) = ((u + 2v)(-v), 2(u + 2v) - v, u^2 + 3v).$$

$$\text{Innen } \vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) = (-uv - 2v^2, 2u + 3v, u^2 + 3v).$$

```

In[9]:= Needs["VectorAnalysis`"]

In[8]:= F[x_, y_, z_] = {x*y, 2*x + y, z};

In[10]:= r[u_, v_] = {u + 2*v, -v, u^2 + 3*v};

In[11]:= n = Cross[D[r[u, v], u], D[r[u, v], v]]

Out[11]=
      {2 u, -3 + 4 u, -1}

In[21]:= integrand = Apply[F, r[u, v]].n;

In[13]:= Integrate[integrand, {u, 0, 3}, {v, 0, 1}]

Out[13]=
      30

```

4.20. ábra. Ez csak az  $\iint \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$ -t számítja ki. Lehet, hogy ezt  $-1$ -el meg kell szorozni.

**2.lépés:** Meghatározzuk a normális vektort. Ehhez kiszámítjuk az  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2u\mathbf{i} + (4u - 3)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ . Mivel a  $\mathbf{k}$  együtthatója negatív ezért az  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$  lefelé mutat, tehát a keresett normális  $\mathbf{n} = -\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (-2u, 3 - 4u, 1)$ .

**3.lépés:** Kiszámítjuk az  $\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n}$  skalárszorzatot:  $\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{n} = 6u - 7u^2 + 12v - 12uv + 2u^2v + 4uv^2$

**4.lépés:**  $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = \int_{u=0}^3 \int_{v=0}^1 6u - 7u^2 + 12v - 12uv + 2u^2v + 4uv^2 dv du = \dots = -30$

Ez azt jelenti, hogy időegységenként 30 egységgel több folyadék áramlik az  $\mathcal{F}$ -en keresztül "lefelé", mint "feléle".

Mikor Ugyanezt Mathematica programmal megcsináljuk (l. 4.20. ábra), legyünk óvatosak mert a program nem tudja, hogy mi felfelé vagy lefelé akarjuk irányítani a felületünket. Ezért kiiratjuk az  $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ -t és ha ennek állása nem az amit a feladat megkövetel, akkor a végeredményt  $-1$ -el megszorozzuk:

**56. PÉLDA:** Legyen  $A(1, 0, 1)$ ;  $B(1, 1, 1)$ ;  $C(2, 0, 3)$ . Legyen  $\mathcal{F}$  az  $ABC$  háromszög, és irányítsuk  $\mathcal{F}$ -et a "lefelé" mutató normálissal. Legyen továbbá  $\vec{F} \equiv (5, 4, 3)$ .

*Kérdés:* Mivel egyenlő  $\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A}$ ?

*Megoldás:* Mivel  $\vec{F}$  konstans, és  $\mathcal{F}$  egy síkidom, így a fluxus az  $\vec{F}$ -nek a normálisra eső vetülete szorozva a területével. Legyen  $\vec{b} = \vec{AB} = (0, 1, 0)$ ;  $\vec{c} = \vec{AC} = (1, 0, 2)$

$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, 0, -1)$ , mivel az utolsó komponens negatív, ezért  $\vec{b} \times \vec{c}$  a megfelelő normálvektor.

Az  $\vec{F}$  vetülete a  $\vec{b} \times \vec{c}$ -re:  $\vec{F} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ . A háromszög területe:  $\frac{|\vec{b} \times \vec{c}|}{2}$ . Tehát a fluxus:  $\vec{F} \cdot \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ .

$$\frac{|\vec{b} \times \vec{c}|}{2} = \frac{\vec{F} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{2} = \frac{\vec{F} \vec{b} \vec{c}}{2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{7}{2} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A}.$$

### 4.3.1. Gauss-féle divergencia tétel

**26. DEFINÍCIÓ:** Legyen  $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ . Az  $\vec{F}$  divergenciája az  $(x, y, z)$  pontban:

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

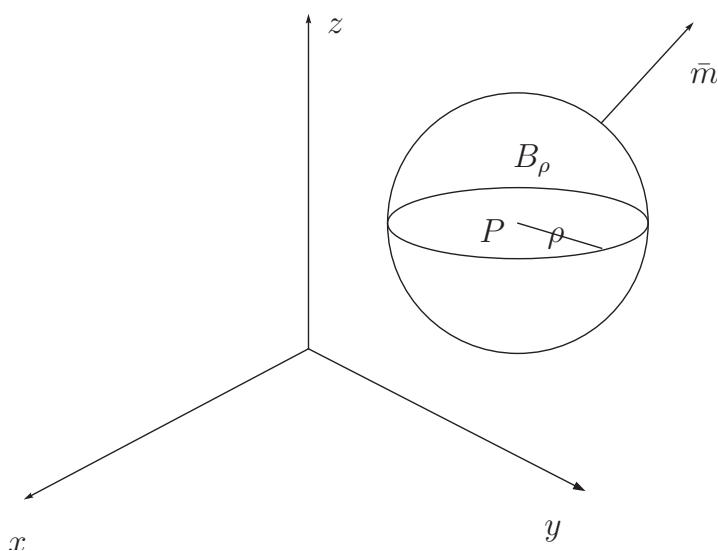
ahol  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ .

**57. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 \sin z, z^2 + y)$ . Ekkor

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 \sin z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + y) = y + 2y \sin z + 2z.$$

A vektortér divergenciája tehát egy valós értékű függvény, vagyis a divergencia egy adott pontban egy szám, (ellentétben a rotációval, ami egy vektor). A divergenciát a forrásrősség mértékeként szokták használni. Hogy miért, azt a következő tétel mutatja.

**27. DEFINÍCIÓ:** Ha  $K$  egy test a térben, akkor  $\partial K$ -val jelöljük a  $K$  határát. Itt mindig feltesszük, hogy  $\partial K$  egy irányított felület a *kifelé mutató normálissal*:



4.21. ábra.

**28. TÉTEL: (Gauss tétel vagy Divergencia tétel)** Legyen  $K$  egy test a térben. A  $\partial K$ -t, a  $K$  határát (felületét) a kifelé mutató normálissal irányítjuk. Ekkor:

$$\iint_{\partial K} \vec{F} d\vec{A} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz,$$

ahol az  $\vec{F}$  a  $K$  minden pontjában értelmezve kell legyen, és  $\operatorname{div} \vec{F}$  egy valós értékű függvény.

Legyen  $K$  egy test a térben. A  $\partial K$ -t, a  $K$  határát (felületét) a kifelé mutató normálissal irányítjuk. Ekkor:

$$\iint_{\partial K} \vec{F} d\vec{A} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz,$$

ahol az  $\vec{F}$  a  $K$  minden pontjában értelmezve kell legyen, és  $\operatorname{div} \vec{F}$  egy valós értékű függvény.

*Alkalmazás:* Legyen  $\rho$  egy nagyon kicsi szám ( majd  $\rho \rightarrow 0$  ), és a tér egy  $P$  pontja körül tekintsük a  $\rho$  sugarú  $B_\rho$  gömböt.

Ezt írjuk  $K$  helyett a fenti tételbe. Irányítsuk a  $B_\rho$ -nak a  $\partial B_\rho$  felületét a kifelé mutató normálissal. Ekkor, ha  $\rho$  nagyon kicsi, feltehető, hogy  $\operatorname{div} \vec{F} \big|_{B_\rho} \equiv \operatorname{div} \vec{F}(P)$ . (Ezzel kicsi hibát vétünk, ami  $\rho \rightarrow 0$ -ra kiesik!)

Ekkor a Gauss tétel jobb oldala:

$$\iiint_{B_\rho} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz \approx \operatorname{div} \vec{F}(P) \cdot \text{térfogat}(B_\rho).$$

Tehát a Gauss tétel szerint:

$$\iint_{\partial B_\rho} \vec{F} d\vec{A} \approx \operatorname{div} \vec{F}(P) \cdot \text{térfogat}(B_\rho)$$

vagyis  $\operatorname{div} \vec{F}(P) \approx \frac{\iint_{\partial B_\rho} \vec{F} d\vec{A}}{\text{térfogat}(B_\rho)}$ . Pontosabban:

$$\operatorname{div} \vec{F}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\iint_{\partial B_\rho} \vec{F} d\vec{A}}{\text{térfogat}(B_\rho)}.$$

Tehát a divergencia a  $P$ -ben éppen egy nagyon kicsi gömb felületén időegység alatt kiáramló folyadék térfogata, osztva ezen kicsi gömb térfogatával.

**A eset:**  $\operatorname{div} \vec{F}(P) < 0$ , ekkor több folyadék folyik be, mint amennyi kifolyik egy  $P$  középpontú kicsike sugarú gömbbe. Ezért a  $P$  pont *elnyelő*.

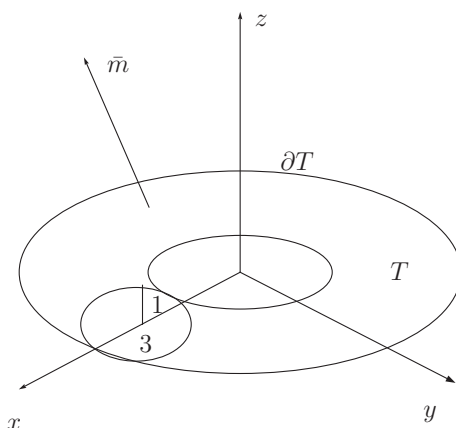
**B eset:**  $\operatorname{div} \vec{F}(P) > 0$ , ekkor egy  $P$  körüli kicsiny gömbből több folyadék folyik ki, mint amennyi befolyik, tehát a  $P$  pont egy *forrás*.

**C eset:**  $\operatorname{div} \vec{F}(P) = 0$ , ekkor ugyanannyi folyadék folyik be, mint amennyi kifolyik egy  $P$  körüli kicsiny gömbből.

**58. PÉLDA:** Legyen  $T$  a 4.22. ábrán látható tömör tórusz, melynek  $\partial T$  felületét a kifelé mutató normálissal irányítottuk. Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$  és  $\vec{G}(x, y, z) = (2x + y^2, y + \sin z, z - x^3)$  Határozzuk meg:

a.)  $\iint_{\partial T} \vec{F} d\vec{A}$  és

b.)  $\iint_{\partial T} \vec{G} d\vec{A}$  értékét!



4.22. ábra.

*Megoldás:*  $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{G} = 2 + 1 + 1 = 4$ . Tehát mivel a divergencia mindkét esetben konstans függvény, ezért a Gauss tételből kapjuk:

$$\iint_{\partial T} \vec{F} d\vec{A} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 0, \quad (\operatorname{div} \vec{F} \text{ azonosan nulla})$$

$$\iint_{\partial T} \vec{G} d\vec{A} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{G} dx dy dz = 4 \cdot \text{térfogat}(T), \quad (\operatorname{div} \vec{G} \equiv 4).$$

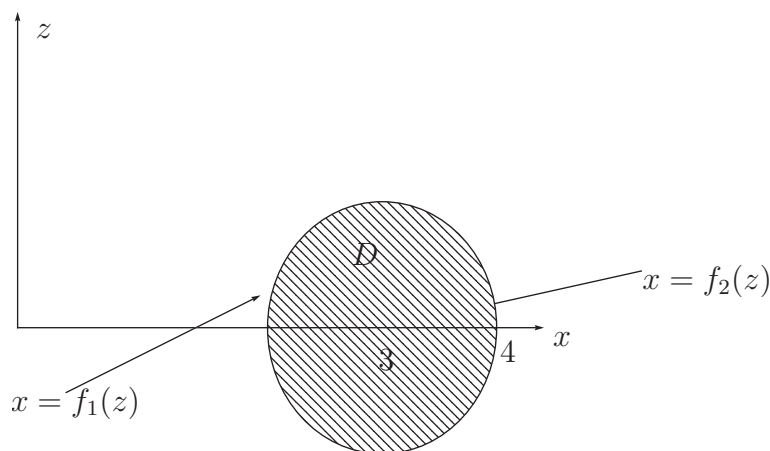
*Kérdés:* Mi a  $T$  tömör tórusz térfogata?

Tudjuk, hogy a  $T$ -t úgy kapjuk, hogy a  $D = \{(x, z) : (x - 3)^2 + z^2 \leq 1\}$  körlemez megforgatjuk a  $z$  tengely körül. A  $D$ -t meghatározó  $(x - 3)^2 + z^2 = 1$  kör  $z$ -hez közelebbi félköríve:  $x = f_1(z) = 3 - \sqrt{1 - z^2}$ , és a távolabbi:  $x = f_2(z) = 3 + \sqrt{1 - z^2}$ .

A tórusz térfogatát úgy kapjuk, ha azon térfogatból, melyet az  $x = f_2(z)$ -nek a  $z$  tengely körüli forgatásából kapunk:  $\pi \int_{-1}^1 f_2^2(z) dz$ , kivonjuk az  $x = f_1(z)$   $z$  tengely

körüli forgatásával kapott térfogatot:  $\pi \int_{-1}^1 f_1^2(z) dz$ .

$$\begin{aligned} \text{Térfogat}(T) &= \pi \int_{-1}^1 f_2^2(z) - f_1^2(z) dz = \\ &= \pi \int_{-1}^1 (9 + 6\sqrt{1 - z^2} + 1 - z^2) - (9 - 6\sqrt{1 - z^2} + 1 - z^2) dz = \\ &= \pi \int_{-1}^1 12\sqrt{1 - z^2} dz = 12\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} dz = 6\pi^2 \end{aligned}$$



4.23. ábra.

**59. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F} = (zy, xz, x^2 + y^2)$ . Az  $\mathcal{F}$  felületet úgy kapjuk, hogy az  $xz$ -síkból a  $z = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$  görbét a  $z$ -tengely körül megforgatjuk és az  $\mathcal{F}$  felületet a lefelé mutató normállal irányítjuk. Feladat: Határozzuk meg az  $\vec{F}$  fluxusát a  $\mathcal{F}$ -en keresztül a Divergencia Tétel felhasználásával!

**Megoldás:** Vegyük észre, hogy  $\mathcal{F}$  majdnem olyan mint egy kehely, amelynek a "fedele" a  $z = 1$  magasságban az  $xy$ -síkkal párhuzamos 1 sugarú körlemez. Nevezzük ezt a körlemezt  $\mathcal{A}$ -nak és irányítsuk a kehelyből kifelé (azaz felfelé) mutató normállal. Nyilván az  $\mathcal{A}$  paraméterezése:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 1), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (4.7)$$

Nevezzük  $K$ -nak azt a testet amit alulról az  $\mathcal{F}$  felülről az  $\mathcal{A}$  határol. Ekkor nyilván  $\partial K = \mathcal{F} \cup \mathcal{A}$ . Innen és a Divergencia Tételből következően

$$\iiint_K \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial K} \vec{F} \, d\vec{A} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{F} \, d\vec{A} + \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} \, d\vec{A} \quad (4.8)$$

Másrészt azt ránézésre látjuk, hogy  $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$ . Tehát a keresett

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} \, d\vec{A} = - \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} \, d\vec{A}. \quad (4.9)$$

Vagyis a képlet jobb oldalán álló fluxust elég meghatározni, ami nyilván sokkal könnyebb kell legyen mint a baloldali fluxus. Az  $\iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A}$  kiszámításához felhasználjuk az  $\mathcal{A}$ -nak a (4.7)-ben adott paraméterezését. Ezzel

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (0, 0, u).$$

Ez felfelé, vagyis az  $\mathcal{A}$  irányításával megegyező irányba mutat.

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) = (u \sin v, u \cos v, u^2).$$

Tehát

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = u^3.$$

Innen

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{A} = - \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} = - \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{2\pi} u^3 dv du = -\pi/2.$$

**8. FELADAT:** Legyen  $\mathcal{A}$  az  $x + y + z = 1$  síkban fekvő egység sugarú kör, melynek középpontja  $O = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , a felfelé mutató normálissal irányítva. Legyen  $K$  egy olyan kúp, melynek alapja  $\mathcal{A}$  és legyen  $\mathcal{N}$  a  $K$  kúp palástja a kútból kifelé mutató normálissal irányítva. Az  $\vec{F}(x, y, z) \equiv (a, b, c)$  konstans vektorterről csak annyit tudunk, hogy  $\iint_{\mathcal{N}} \vec{F} = 3.75$ . Kérdés:  $\iint_{\mathcal{A}} \vec{F} = ?$

**Megoldás:** Alkalmazhatjuk a Divergencia tétel. Konstans vektor tér esetén a divergencia eltűnik:  $\operatorname{div} \vec{F} \equiv 0$ . Tehát a Divergencia tétel szerint

$$0 = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_{\partial K} \vec{F} d\vec{A} = \iint_{\mathcal{N}} \vec{F} d\vec{A} + \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} = 3.75 + \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A}$$

Tehát  $\iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} = -3.75$ .

**9. FELADAT:** Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (3x + z^2, y, x^2 + y^2)$ . Legyen  $G$  az origó középpontú egységsugarú gömbnek az  $xy$ -sík feletti része.  $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ . A  $G$  felületének az  $xy$  síkba eső része az origó középpontú egységsugarú kör  $\mathcal{A} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  amit a lefelé mutató normálissal irányítunk. Legyen  $\mathcal{S}$  a  $G$  felületének az  $xy$ -sík feletti része. Vagyis  $\mathcal{S} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ , a gömbből kifelé mutató irányítással. A Divergencia tétel segítségével határozzuk meg  $\vec{F}$  fluxusát az  $\mathcal{S}$ -en keresztül.



**Megoldás:**  $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) \equiv 4$ . A  $G$  felülete  $\partial G = \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ . Tehát a Divrgencia Tételből:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} d\vec{A} &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz - \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} = \text{térfogat}(G) \cdot 4 - \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} \\ &= \frac{8}{3}\pi - \iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} \end{aligned}$$

Tehát csak  $\iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A}$ -t kell meghatároznunk. Az  $\mathcal{A}$  körlemeznek az egy paraméterezése

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 0), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Ekkor  $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (0, 0, u)$ . Ez felfelé mutató, de az  $\mathcal{A}$  a lefelé mutató normálissal van irányítva ezért majd **-1-el szoroznunk kell**. Most  $\vec{F}$ -et lokalizáljuk az  $\mathcal{A}$  felületre:  $\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) = (3u \cos v, u \sin v, u^2)$ . Tehát

$$\vec{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) = u^3.$$

Innen

$$\iint_{\mathcal{A}} \vec{F} d\vec{A} = - \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{2\pi} u^3 dv du = -2\pi \frac{1}{4} = -\pi/2.$$

Tehát

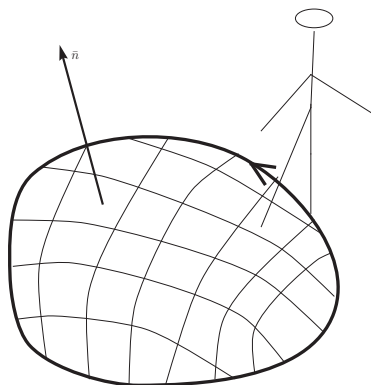
$$\iint_S \vec{F} d\vec{A} = \frac{8}{3}\pi - (-\pi/2) = \pi \left( \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right).$$

### 4.3.2. Stokes tétel

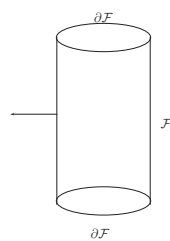
**28. DEFINÍCIÓ:** Azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{F}$  felület, és annak  $\partial\mathcal{F}$  határa koherensen vannak irányítva, ha egy ember végigsétál  $\partial\mathcal{F}$ -en a  $\partial\mathcal{F}$  irányába úgy, hogy a feje a lábához képest az  $\mathcal{F}$  irányításának megfelelően van, és a felület az ember bal kezére esik.

**60. PÉLDA:** Az  $\mathcal{F}$  a 4.25 ábrán látható henger palástja,  $\partial\mathcal{F}$  a henger alap és fedő köre.

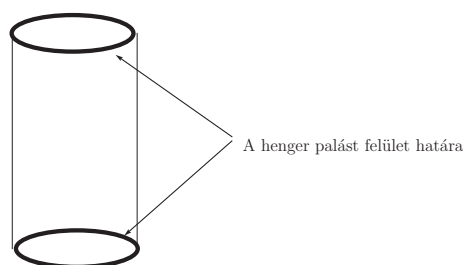
Ha  $\mathcal{F}$  a kifelé mutató normálissal irányított, akkor hogyan kell irányítani a henger határát,  $\partial\mathcal{F}$ -et alkotó alsó és felső köröket ahhoz, hogy az  $\mathcal{F}$  és  $\partial\mathcal{F}$  koherensen legyenek irányítva?



4.24. ábra.



4.25. ábra.



4.26. ábra.

*Megoldás:* Az alsó kör irányítása: az óramutatóval ellentétes  
A felső kör irányítása az óramutatóval egyezik.

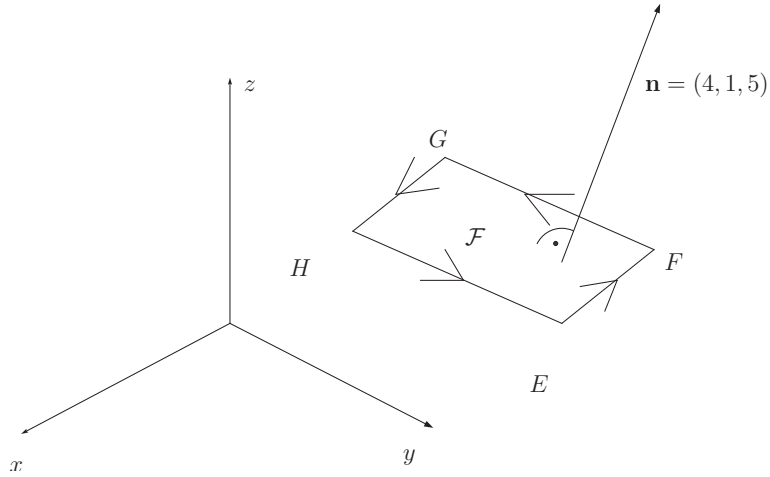
**29. TÉTEL: (Stokes tétel)** Tegyük fel, hogy az  $\mathcal{F}$  felület és annak  $\partial\mathcal{F}$  határa koherensen irányított. Ekkor, ha az  $\vec{F}$  parciális deriváltjai az  $\mathcal{F}$  minden pontjában definiáltak, akkor:

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\mathcal{F}} \text{curl}(\vec{F}) d\vec{A}$$

1. A  $\mathcal{F}$  felület határa a  $\partial\mathcal{F}$ , legtöbbször egy görbe.
2. Az is lehet, hogy a  $\mathcal{F}$  határa,  $\partial\mathcal{F}$  egynél több görbe uniója, mint egy hengerpalást esetén.
3. Az is gyakran előfordul, hogy a  $\mathcal{F}$  határa az üreshalmaz. Például: ha a  $\mathcal{F}$  egy gömb felülete, vagy a  $\mathcal{F}$  egy krumplics felülete. Ebben az esetben  $\partial\mathcal{F} = \emptyset$  vagyis  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = 0$ , így ha  $\mathcal{F}$  egy test felülete, akkor  $\iint_{\mathcal{F}} \text{curl}(\vec{F}) d\vec{A} = 0$ , következik a Stokes tételből.

**61. PÉLDA:** Legyen  $\gamma$  a 4.27. ábrán látható DEFG irányított görbe, és  $\vec{F}(x, y, z) = (x, x, x)$ . Mivel egyenlő  $\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r}$ ?

*Megoldás:* Legyen  $\mathcal{F}$  az a felület, aminek a  $\gamma$  a határa,  $\gamma = \partial\mathcal{F}$ . Irányítsuk  $\mathcal{F}$ -et a  $\gamma$ -val koherensen. Ekkor mivel



4.27. ábra.

$$\operatorname{curl}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \text{ azt kapjuk, hogy } \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{curl}(\vec{F}) d\vec{A} = 0.$$

Használva a Stokes tételt:  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{curl}(\vec{F}) d\vec{A} = 0.$

**62. PÉLDA:** Legyen  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ , vagyis  $\mathcal{F}$  az  $xy$  síkbeli egység sugarú körlemez, a felfelé mutató normálissal irányítva.

Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -x, 3z)$ . Mivel egyenlő  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r}$ ?

*Megoldás:* Számoljuk ki  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r}$ -et a vonalmenti integrál kiszámolására tanult formulával:  $\partial\mathcal{F}$  egy paraméter,  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ , ahol  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  $\vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t, -\cos t, 0)$ ;  $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ . Tehát

$$\vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1.$$

Vagyis

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

Ha valaki a Stokes-tétel alkalmazásával akarná az  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r}$ -et kiszámolni, akkor először

a

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}(\vec{F}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{3z}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} \\ &= \left( -3zy(x^2+y^2)^{-3/2}, 3zx(x^2+y^2)^{-3/2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

értéket határozza meg. Ebből viszont az adódna, hogy  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = 0$ , hiszen az  $xy$  síkban (ahol  $z = 0$ ),  $\operatorname{curl}(\vec{F}) = \mathbf{0}$ . Valahol hiba van, hiszen az előbb  $\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} d\vec{r} = -2\pi$  adódott.

A hiba abból adódik, hogy ebben az esetben NEM alkalmazható a Stokes tétel. Azért nem, mert a Stokes-tétel azon feltétele, hogy az  $\vec{F}$  minden parciális deriváltja létezzon az  $\mathcal{F}$  felület minden pontjában, nem teljesül, mivel az  $\vec{F}$  a  $z$  tengelyen nem értelmezett.

### A $\operatorname{curl}(\vec{F})$ fizikai jelentése

Legyen  $P$  a tér egy pontja, és  $S_\rho$  egy  $P$  középpontú, kicsiny sugarú kör, melynek normálisa  $\vec{n}$ .  $\partial S_\rho$  és  $S_\rho$  koherensen irányítottak.

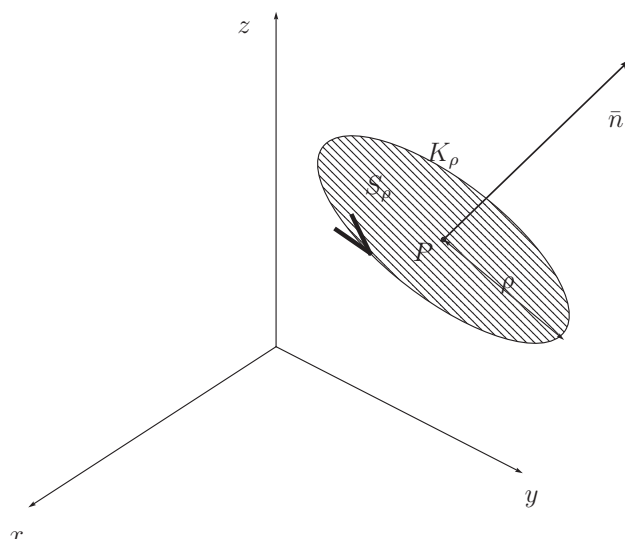
Legyen  $K_\rho = \partial S_\rho$ . Ha  $\rho$  nagyon kicsi, akkor  $\operatorname{curl}(\vec{F})$  közelítőleg egyenlő  $\operatorname{curl}(\vec{F}(P))$  az  $S_\rho$ -n. Tehát  $|\vec{n}| = 1$ .

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{curl}(\vec{F}) d\vec{A} \approx \iint_{S_\rho} \operatorname{curl}(\vec{F}(P)) \cdot \vec{n} d\vec{A} = \operatorname{curl}(\vec{F}(P)) \cdot \vec{n} \cdot \text{terület}(S_\rho).$$

Tehát a Stokes-tételből:  $\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \int_{\partial S_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \iint_{S_\rho} \operatorname{curl}(\vec{F}) d\vec{A} \approx \operatorname{curl}(\vec{F}(P)) \cdot \vec{n} \cdot \text{terület}(S_\rho)$ . Ebből következik, hogy

$$\vec{n} \cdot \operatorname{curl}(\vec{F}(P)) \approx \frac{\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{\text{terület}(S_\rho)}.$$

Pontosabban:  $\frac{\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{\text{terület}(S_\rho)}$ , ahol  $|\vec{n}| = 1$ .



4.28. ábra.

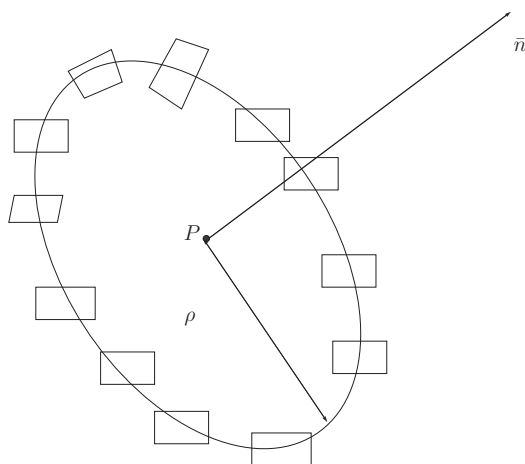
Vagyis a  $\text{curl}(\vec{F})$ -nek az  $\vec{n}$ -re eső merőleges vetülete egyenlő (közelítőleg, ha  $\rho > 0$ , kicsi) az  $\vec{F}$  által a  $K_\rho$ -n való elmozdulás során végzett munka, osztva az  $S_\rho$  területével.

**63. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x + x^2 + z^2, y^2 + x)$  egy folyadék sebességtere, ami időben állandó. Elhelyezünk egy lapátkereket a folyadék áramlásának az útjába. A lapátkerek centruma a  $P(1, 1, 1)$ , síkjának normálvektora  $\vec{n} = (-2, 5, -1)$ . Lenézünk a lapátkerekre  $-\vec{n}$  irányból.

**1. Kérdés:** Forog-e a lapátkerek, és ha igen, az óramutató járásával egyező vagy azzal ellentétes irányba?

Válasz:  $\text{curl}(\vec{F}) = (2y - 2z, 2z - 1, 2x + 1)$ , így  $\text{curl}(\vec{F}(P)) = (0, 1, 3)$ , ahol  $P = (1, 1, 1)$  volt. Ekkor  $\text{curl}(\vec{F})$ -nek az  $\vec{n} = (-2, 5, -1)$ -re való vetülete:  $(0, 1, 3) \cdot$

$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (0, 1, 3) \cdot \frac{(-2, 5, -1)}{\sqrt{4+25+1}} = \frac{2}{\sqrt{30}} > 0$ . Tehát az  $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \text{curl}(\vec{F}(P)) \approx \frac{\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{\text{terület}(S_\rho)}$  összefüggésből az  $\vec{F}$  pozitív munkát végez a  $K_\rho$ -n, tehát a folyadék pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes irányba forgatja a lapátkereket.



4.29. ábra.

**2. Kérdés:** Ha a lapátkerék centruma a  $P(1, 1, 1)$  pontban van rögzítve, akkor hogyan kell választani az  $\vec{n}$  vektort ahhoz, hogy a lapátkerék

a. egyáltalán ne forogjon;

b. a leggyorsabban forogjon az óramutató járásával egyező (negatív) irányba?

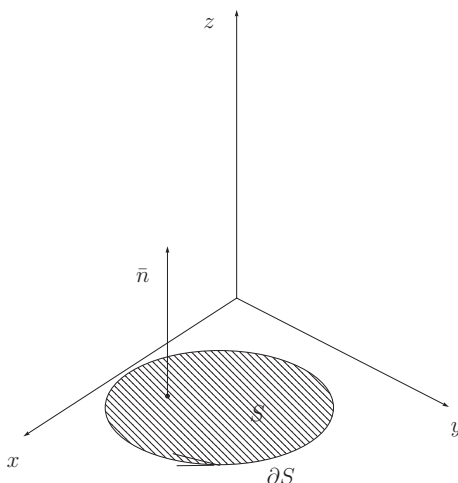
Válasz az "a" kérdésre: A lapátkerék akkor nem forog, ha az  $\vec{F}$  erőter nem végez rajta munkát, vagyis, ha  $\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Használva, hogy

$$\text{curl}(\vec{F}(P)) \cdot \vec{n} \approx \frac{\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{\text{terület}(S_\rho)}$$

ez akkor következik be, ha  $\text{curl}(\vec{F}(P)) \perp \vec{n}$ . Tehát a lapátkerék nem forog, ha  $\vec{n}$  egy tetszőleges olyan vektor, ami merőleges a  $\text{curl}(\vec{F}(P)) = (0, 1, 3)$ -ra.

Például:  $\vec{n} = (0, -3, 1)$  és  $\forall \vec{n} \perp (0, 1, 3)$ .

Válasz a "b" kérdésre: A  $\text{curl}(\vec{F}(P)) \cdot \vec{n} \approx \frac{\int_{K_\rho} \vec{F} d\mathbf{r}}{\text{terület}(S_\rho)}$  formula miatt leggyorsabban forog a kerék az óramutató járásával megegyező irányba, ha legnagyobb



4.30. ábra.

abszolút értékű negatív munkát végez a folyadékáramlás rajta. Ez akkor következik be, ha a  $\text{curl}(\vec{F}(P)) \cdot \vec{n}$  a lehető legnagyobb abszolút értékű negatív szám. Tehát  $\vec{n}$  a  $-\text{curl}(\vec{F}(P))$  irányába mutató egységvektor. Vagyis  $\vec{n} = \frac{(0, -1, -3)}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, -1, -3)$ .

## 4.4. Green-tétel

A Stokes-tétel speciális eseteként kapjuk a Green-tételt!

Legyen  $S$  egy  $xy$  síkbeli tartomány, melynek határa a  $\partial S$  egyszerű zárt görbe, és az  $\vec{F}$  minden parciális deriváltja az  $S$  minden pontjában létezik!

Ekkor ha  $\vec{F}$  egy  $xy$  síkbeli vektortér, vagyis

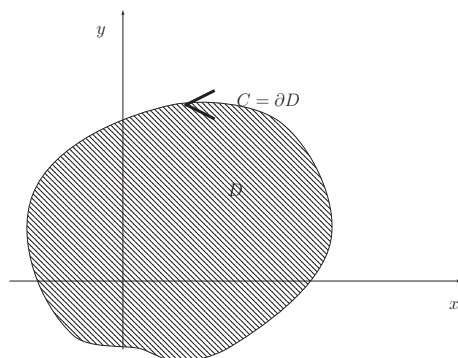
$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0),$$

akkor  $\text{curl}(\vec{F}) = (0, 0, Q'_x - P'_y)$ . Ezért a Stokes-tételből kapjuk, hogy  $\int_{\partial S} \vec{F} d\mathbf{r} =$

$$\iint_S \text{curl}(\vec{F}) d\vec{A} = \iint_S \vec{n} \cdot \text{curl}(\vec{F}) dx dy = \iint_S Q'_x - P'_y dx dy.$$

Mivel a fenti állításban mind az  $\vec{F}$  vektortér, mind az  $S$  tartomány az  $xy$  síkban van, ezért megfogalmazhatjuk egy síkbeli állításként a tételt:





4.31. ábra.

**30. TÉTEL: (Green-tétel)** Legyen  $D$  egy olyan tartomány a síkon, melynek határa a  $C$  egyszerű zárt görbe. ( $D$  nem tartalmaz lyukakat!) Továbbá az  $\vec{F}$  síkbeli vektortér, minden parciális deriváltja a  $D$  minden pontjában értelmezett. Nevezzük az  $F$  komponens függvényeit  $P$ -nek és  $Q$ -nak, vagyis

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

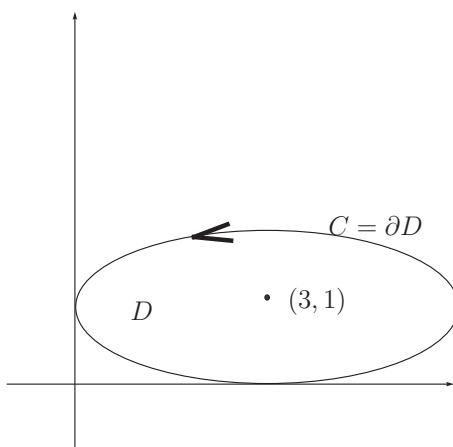
Ekkor,

$$\int_C \vec{F} d\mathbf{r} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy$$

**64. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F}(x, y) = (2y, x)$  és  $C$  az  $(x - 3)^2 + 9(y - 1)^2 = 9$  ellipszis pozitív irányítással. Mivel egyenlő az  $\int_C \vec{F} d\mathbf{r}$ ?

*Megoldás:*  $P(x, y) = 2y$ ,  $Q(x, y) = x$ , így  $Q'_x = 1$  és  $P'_y = 2$ . Tehát  $Q'_x - P'_y = -1$ .  
Vagyis:

$$\int_C \vec{F} d\mathbf{r} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = -\text{terület}(D) = -\pi \cdot 3 \cdot 1 = -3\pi.$$



4.32. ábra.

**Területszámítás** Ha  $P(x, y) \equiv 0$  és  $Q(x, y) = x$ , vagy  $P(x, y) = -y$  és  $Q(x, y) \equiv 0 \Rightarrow Q'_x - P'_y \equiv 1$ .

Tehát a fenti esetben:  $terület(D) = \int_C x dy - \int_C y dx$ . Itt használtuk azt a jelölést, hogy az  $\vec{F} = (F_1, F_2)$  vektortérre:

$$\int_{\gamma} (F_1 dx + F_2 dy) := \int_{\gamma} \vec{F} d\mathbf{r}$$

Innen azonnal adódik, hogy

$$terület(D) = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx. \quad (4.11)$$

Tekintsük azt a speciális esetet amikor a fenti  $C$  görbe

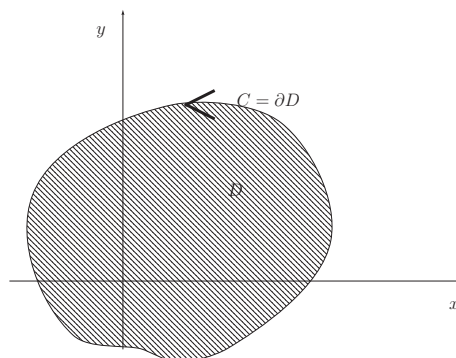
$$r = r(\varphi), \text{ ahol } a \leq \varphi \leq b$$

alakban adott. Ekkor

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Tehát a (4.11) jobb oldalán az integrandusz:

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= (x(\varphi) \cdot \dot{y}(\varphi) - y(\varphi) \cdot \dot{x}(\varphi)) d\varphi \\ &= r^2(\varphi) [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] d\varphi = r^2(\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (4.12)$$



4.33. ábra.

Vagyis a (4.11) alapján

$$\text{Terület}(D) = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) d\varphi.$$

**65. PÉLDA:** Számoljuk ki az  $r = \sin 3\varphi$  úgynevezett "háromlevelű lóhere" (l. 4.34. ábra) területét. (Amikor  $\sin 3\varphi < 0$ , akkor az  $r$  a formula szerint negatív lenne, ami lehetetlen, hiszen  $r$  jelöli az origótól vett távolságot. Ezt úgy oldjuk fel, hogy ekkor az  $(|r|, \varphi + \pi)$  pontot ábrázoljuk.)

*Megoldás:* Elég az első síknegyedbe eső  $R$  területet meghatározni. Itt  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ . A fenti képlet miatt:

$$\text{Terület}(R) = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3\varphi)^2 d\varphi, \text{ elvégezve a következő számításokat:}$$

$$\cos^2 3\varphi + \sin^2 3\varphi = 1 \text{ és}$$

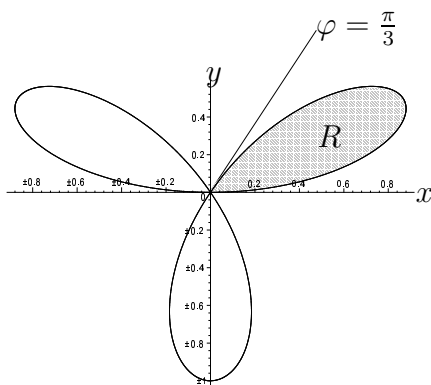
$$\cos^2 3\varphi - \sin^2 3\varphi = \cos 6\varphi$$

$$2 \sin^2 3\varphi = 1 - \cos 6\varphi \Rightarrow \sin^2 3\varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 6\varphi), \text{ adódik:}$$

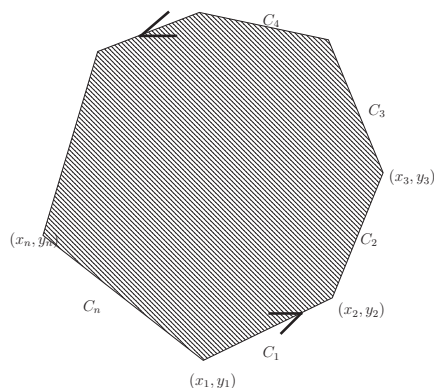
$$\text{Terület}(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \left[ \varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

A háromlevelű lóhere területe:  $3 \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ .

A következő feladat azért került ide mert eredményére szükségünk lesz az eggyel későbbi



4.34. ábra. Három levelű lóhere



4.35. ábra.

feladat megoldásához: Ebben a feladatban az

$$\int_C xdy - ydx$$

vonali integrált kell majd kiszámolni. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy a  $C$  görbén integráljuk az  $F(x, y) = (-y, x)$  vektor teret.

**66. PÉLDA:** Legyen  $C$  az az egyenes szakasz, melynek kezdőpontja  $(a, b)$ , végpontja pedig  $(c, d)$ . Mekkora az  $\int_C xdy - ydx$  értéke?

*Megoldás:*  $C$  egy paraméterezése a következő:

$$0 \leq t \leq 1, \mathbf{r}(t) = (a, b) + t \cdot (c - a, d - b) = (a + t(c - a), b + t(d - b)), \vec{F}(x, y) = (-y, x), \text{ tehát } \vec{F}(\mathbf{r}(t)) = (-b - t(d - b), a + t(c - a)), \dot{\mathbf{r}}(t) = (c - a, d - b). \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = -b(c - a) - t(d - b)(c - a) + a(d - b) + t(c - a)(d - b) = ad - bc. \text{ Vagyis } \int_C \vec{F}d\mathbf{r} = \int_0^1 \vec{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^1 ad - bc dt = ad - bc.$$

**67. PÉLDA:** Számoljuk ki a 4.35. ábrán látható poligon által közrezárt  $T$  területet!

*Megoldás:* Az első feladat eredményét és a Green-tételt használjuk. A Green-tételből tudjuk, hogy ha  $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$  akkor

$$\text{Terület}(t) = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} xdy - ydx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i,$$
 ahol  $x_{n+1} = x_1$ , és  $y_{n+1} = y_1$ . (Felhasználva az előző feladat során kapott eredményt, azt, hogy  $\int_{C_i} xdy - ydx = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$ .)

Vagyis:

$$\begin{aligned} \text{Terület}(t) = & \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots \\ & + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)] \end{aligned}$$

Ez a képlet nemcsak akkor igaz, ha az  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  pontok által meghatározott poligon *konvex*. A poligon lehet *konkáv* is! A képlet egy ciklus segítségével könnyen *programozható*!

## 4.5. Néhány feladat a vektoranalízisből

**68. PÉLDA:** Legyen  $\vec{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  (ahol  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  és  $r = |\mathbf{r}|$ ). Legyen  $S$  az  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  gömbfelülete kifelé mutató normálissal irányítva. Kérdés:  $\iint_S \vec{F} d\vec{A} = ?$

**Megoldás:** Mivel a gömbfelület minden pontjában az  $\vec{F}(\mathbf{r})$  iránya a normálvektor irányával egyezik meg, ezért az  $\vec{F}$ -nek normális irányú vetülete az  $\vec{F}$  hosszával vagyis  $|\vec{F}(\mathbf{r})| = \frac{r}{r^3} = \frac{1}{r^2}$ -el egyenlő. Mivel a  $b$  sugarú gömb felületén vagyunk, itt  $r = b$  tehát a normális irányú vetület  $\frac{1}{b^2}$  minden pontban, tehát konstans. Mint tanultuk (l. (4.6)), ekkor

$$\iint_S \vec{F} d\vec{A} = \frac{1}{b^2} \cdot \text{gömbfelszín} = \frac{1}{b^2} 4b^2 \pi = 4\pi$$

ami független a  $b$ -től.

**69. PÉLDA:** Számoljuk ki a  $\iiint_K \text{div}(\vec{F}) dx dy dz$  integrált, ha  $K$  az origó középpontú,  $b$  sugarú gömb, ahol  $\vec{F}$  ugyanaz mint az előző feladatban!

**Megoldás:** Először kiszámoljuk  $\text{div}(\vec{F})$ -et.

$$\text{Mivel } \vec{F}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \left( \underbrace{\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}}_{F_1}, \underbrace{\frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}}_{F_2}, \underbrace{\frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}}_{F_3} \right)$$

és

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3 - x^{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (y^2 + z^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}. \end{aligned}$$

Ugyanígy:  $\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 + z^2 - 2y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$  és  $\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (y^2 + x^2 - 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ . Innen  $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (y^2 + z^2 - 2x^2 + x^2 + z^2 - 2y^2 + y^2 + x^2 - 2z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = 0$ . Tehát  $\operatorname{div}(\vec{F}) \equiv 0$  és ezért  $\iiint_K \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx dy dz = 0$ .

**4. MEGJEGYZÉS:** A fenti két feladatban szereplő integrálok a divergencia tétel két oldalán álló integrálok. Ezek különbözősége is mutatja, hogy a divergencia tételt csak akkor alkalmazhatjuk, ha az  $\vec{F}$  vektor tér a  $K$  test minden pontjában értelmezve van. (Ez a fenti  $\vec{F} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$  és  $K$  esetén nyilván nem teljesül.)

### Vegyes feladatok

- Ellenőrizzük, hogy létezik-e potenciál függvénye a  $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x + y \cos(xy), 2z + x \cos(xy), 2y)$  vektormezőnek és ha van, akkor számoljuk ki a potenciál függvényt!
- Legyen  $H$  az a háromszög, melynek csúcsai:  $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 0)$  és adott az  $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 2, 3)$  konstans vektormező. Kérdés:  $\iint_D \mathbf{F} d\mathbf{A} = ?$
- Legyen  $\mathbf{F}(x, y) = (xe^x - y^3, \cos(y^2) + x^3)$  és  $\gamma$  az origó középpontú egységsugarú kör az óramutató járásával ellentétesen irányítva. Kérdés:  $\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = ?$
- Legyen  $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2)$  és  $\gamma$  egy olyan görbe, amelynek kezdőpontja  $A = (1, 0, 1)$  és végpontja  $B = (2, 1, -1)$ . Kérdés:  $\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$

5. Az  $S$  felület olyan mint egy lefelé fordított pohár. Két részből áll: egyrészt a pohár aljából:

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ és } z = h\},$$

továbbá a pohár oldalából:

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2 \text{ és } 0 \leq z \leq h\}.$$

Irányítsuk  $S$ -et a kifelé mutató normálissal. Legyen  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x + 2y + z, 3)$ . A **Gauss-divergencia tétel alkalmazásával** számoljuk ki a  $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{A}$  felületmenti integrált!

6. A következő információt tudjuk az  $\mathbf{F}$  vektormezőről a  $B = (3, 2, 5)$  pontban:  $\operatorname{div}\mathbf{F}(B) = -7$  és  $\operatorname{curl}\mathbf{F}(B) = (1, 0, 1)$ . (Nem biztos, hogy mindkettőre szükség lesz!) Legyen  $S$  a  $B$  középpontú  $r = 10^{-3}$  sugarú gömböcske felülete a kifelé mutató normálissal irányítva. Adjuk meg ezen információkon alapuló legjobb becslést az  $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{A}$  felületmenti integrálra!
7. Legyen  $\mathbf{F}(x, y, z) = (6x^2y - 4yz^3, 2x^3 - 4xz^3, -12xyz^2)$ . Ellenőrizzük, hogy konzervatív-e a vektor tér! Ha igen, akkor számítsuk ki a potenciálfüggvényét!
8. Legyen a  $\gamma$  görbe egy paraméterezése  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Továbbá adott az  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + z, \frac{z-y}{x}, xy)$  vektormező. Kérdés:  $\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = ?$
9. Legyen  $\mathcal{F}$  az  $x - 2y + z = 1$  felületnek azon darabja, melynek az  $xy$  síkra eső vetülete az a háromszög, melynek csúcsai:  $A = (1, 0, 0)$ ;  $B = (0, 1, 0)$ ;  $C = (0, 0, 0)$ . Irányítsuk  $\mathcal{F}$ -et a felfelé mutató normálissal. Adott továbbá az  $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x^2)$  vektormező. Kérdés:  $\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{F} d\mathbf{A} = ?$
10. Stokes-tétel segítségével számítsuk ki az  $\int \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  vonalmenti integrált, ahol  $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2, z^2)$  és  $\gamma$  a  $z = x^2 + y^2$  paraboloid és a  $z = y$  sík metszészvonala, az óramutató járásával ellentétesen irányítva.
11. Legyen  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  és legyen  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 = 1 \text{ és } -2 \leq y \leq 1\}$  a kifelé mutató normálvektorral irányítva. Kérdés:  $\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{F} d\mathbf{A} = ?$



12. Gauss-divergencia tétele segítségével számítsuk ki az  $\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{F} d\mathbf{A}$  felületmenti integrált, ahol  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + e^{yz}, y - z \arctg x, x^2 y^3)$  és  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4 \text{ és } 0 \leq z \leq 3\}$  henger a kifelé mutató normálissal irányítva.
13. Green-tétel segítségével határozzuk meg az  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  görbe által határolt tartomány területét!



## 5. fejezet

# Appendix

### 5.1. Forgás felületek paraméterezése

Tegyük fel, hogy adott az  $xz$ -síkbán egy  $\gamma$  görbe, melynek egy paraméterezése:

$$\mathbf{r}(u) = (r_1(u), r_2(u)), \quad u \in I,$$

ahol az  $I$  vagy egy korlátos zárt intervallum vagy egy félegyenes vagy maga a számegegyenes. Amikor a  $\gamma$ -át megforgatjuk a  $z$ -tengely körül, a  $\gamma$  görbének egy tetszőleges  $u_0 \in I$  paraméterhez tartozó  $P_0 = \mathbf{r}(u_0)$  pontjának  $z$  koordinátája:  $r_2(u_0)$  ezen körbe fordulás során állandó marad és a  $P_0$  pont ezen forgatás során befutja a  $z = r_2(u_0)$  síkban a  $z$ -tengelyre eső középpontú,  $r_1(u_0)$ -sugarú kört, ami tehát

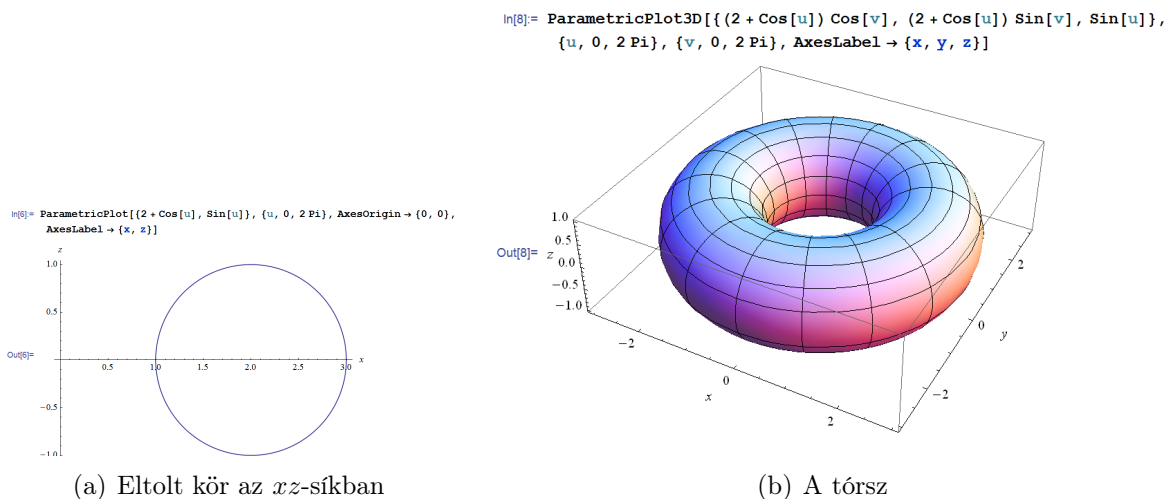
$$(r_1(u_0) \cos v, r_1(u_0) \sin v, r_2(u_0)), \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Ez igaz a  $\gamma$  görbe bármely  $\mathbf{r}(u)$  pontjára, tehát a  $\gamma$ -görbének a  $z$ -tengely körüli forgatásakor kapott felület paraméterezése:

$$\mathbf{r}(u, v) = (r_1(u) \cos v, r_1(u) \sin v, r_2(u)). \quad u \in I, 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (5.1)$$

**Példa:** Legyen  $\gamma$  az  $xz$ -síkbán az  $x = 2, z = 0$  középpontú egységsugarú kör (l. 5.1. ábra). Ennek paraméterezése:  $\mathbf{r}(u) = (2 + \cos u, \sin u)$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ . Forgassuk meg  $\gamma$ -t a  $z$ -tengely körül. Így kapunk egy tóruszt (l. 5.1. ábra). Ennek a fentiek szerint a paraméterezése:

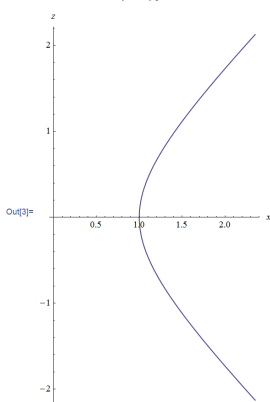
$$\mathbf{r}(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$



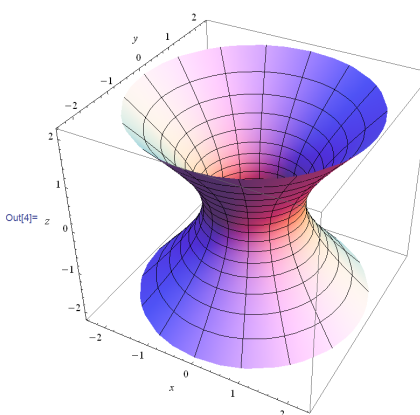
5.1. ábra. A tórsz származtatása mint egy eltolt körből származó forgás felület.

Hasonlóan, ha az  $xz$ -síkbeli  $x^2 - z^2 = 1$  hiperbolának a jobboldali ágát nevezzük  $\gamma$ -nak. (l. 5.1. ábra) Ennek egy paraméterezése:  $\mathbf{r}(u) = (\cosh u, \sinh u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Forgassuk meg  $\gamma$ -at a  $z$ -tengely körül. Eredményül egyköppenyű hiperboloid adódik (l. 5.2. ábra), melynek paraméterezése  $\mathbf{r}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$ ,  $0 \leq u, v \leq 2\pi$ .

```
In[3]= ParametricPlot[{Cosh[u], Sinh[u]}, {u, -1.5, 1.5}, AxesOrigin -> {0, 0},
  AxesLabel -> {x, z}]
```

(a)  $\mathbf{r}(u) = (\cosh u, \sinh u)$ 

```
In[4]= ParametricPlot3D[{Cosh[u] Cos[v], Cosh[u] Sin[v], Sinh[u]},
  {u, -1.5, 1.5}, {v, 0, 2 Pi}, AxesLabel -> {x, y, z}]
```

(b)  $\mathbf{r}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$ 

5.2. ábra. Az  $\mathbf{r}(u) = (\cosh u, \sinh u)$ -nek a  $z$ -tengely körüli forgatásából adódó hiperbola.

## 5.2. Másodrendű felületek

A másodrendű felületek képeit a következő oldalakon láthatják. Itt most át ismételjük hogyan kell ezeket meg paraméterezni. Ebben két azonosságot használunk:

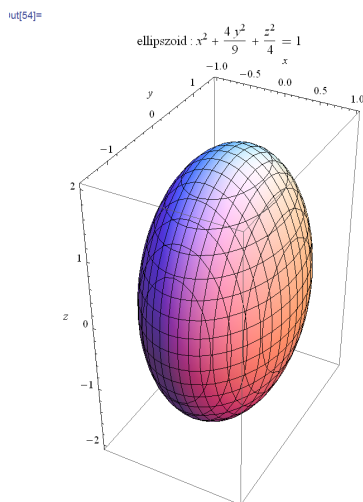
$$\cos^2 x + \sin^2 x \equiv 1, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1. \quad (5.2)$$

(a) **Ellipszoid:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Ennek paraméterezése a gömb paraméterezésének értelemszerű módosításaából adódik:

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (5.3)$$

Ugyanis, tekintsük az  $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, \sin u)$ ,  $0 \leq u \leq \pi$  görbét az  $xz$  síkon. Ez az  $xz$ -síkon az origó középpontú egy sugarú körnek az a fele ami az  $x$ -tengely pozitív fele oldalára esik. Ha ezt megforgatjuk a  $z$ -tengely körül, kapjuk az egységsugarú gömböt aminek a paraméterezése úgy adódik, hogy a fenti  $\mathbf{r}(u, v)$ -bei  $\cos u$ -ból a forgatás hatására  $(\cos u \cos v, \cos u \sin v)$  lesz, a  $z$  koordináta:  $\sin u$  nem változik. Ezután az  $a, b, c$ -vek való szorzás azt fejezi ki, hogy nem gömbről hanem ellipsziszről van szó.

```
In[54]:= ContourPlot3D[x^2 + y^2 / (3/2)^2 + z^2 / 4 = 1, {x, -1, 1},
          {y, -3/2, 3/2}, {z, -2, 2}, BoxRatios -> Automatic, AxesLabel -> {x, y, z},
          PlotLabel -> ellipszoid: x^2 + y^2 / (3/2)^2 + z^2 / 4 = 1]
```



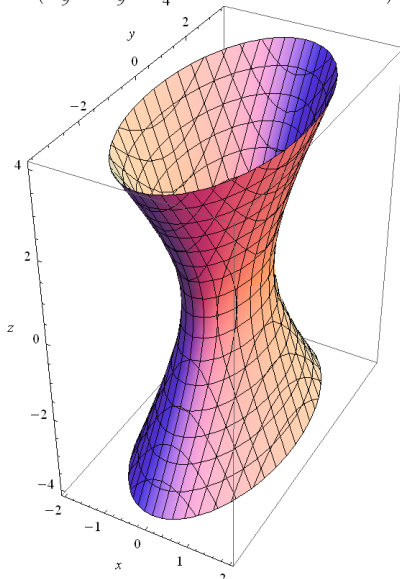
5.3. ábra. Ellipszoid. Általános formula:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(b) **Egy köpenyű hiperboloid:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  Ennek paraméterezése abból adódik, hogy bevezetésként az  $x, z$  síkon tekintjük az  $\mathbf{r}(u) = (\cosh u, \sinh u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$  görbét. Ez az (5.2) jobb oldala miatt az  $x^2 - z^2 = 1$  hiperbola baloldali ágának a paraméterezése. Ezért követve az előző feladat gondolatát, az egy köpenyű hiperboloid egy paraméterezése:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (a \cosh u \cdot \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u), \quad 0 \leq v \leq 2\pi, u \in \mathbb{R}.$$

```
[64]= ContourPlot3D[x^2 / (9 / 16) + y^2 / (3 / 2)^2 - z^2 / 4 = 1, {x, -2, 2},
{y, -3.5, 3.5}, {z, -4, 4}, BoxRatios -> Automatic, AxesLabel -> {x, y, z},
PlotLabel -> {x^2 / (9 / 16) + y^2 / (3 / 2)^2 - z^2 / 4 = 1,
Egyköpenyű hiperboloid}]
```

```
4]= {
{16 x^2 / 9 + 4 y^2 / 9 - z^2 / 4 = 1, Egyköpenyű hiperboloid}}
```



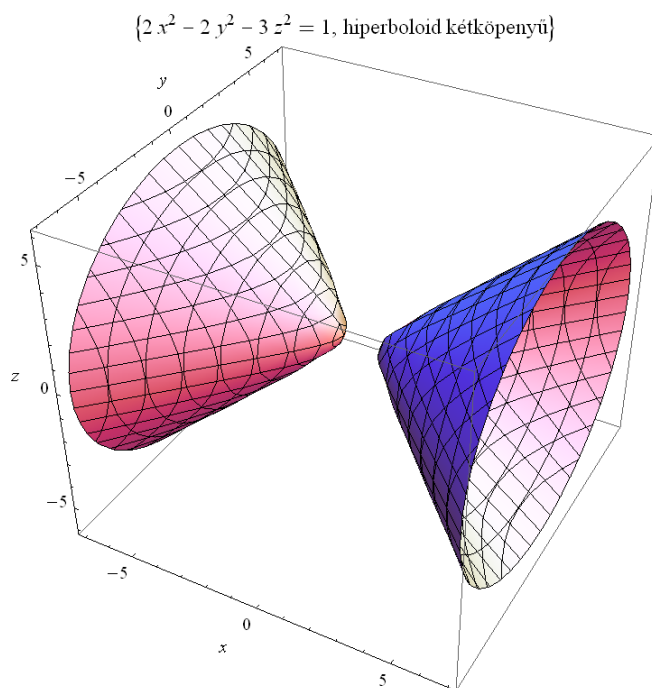
5.4. ábra. Egy köpenyű hiperboloid. Általános formula:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(c) **Két köpenyű hiperboloid:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Itt a paraméterezés a fentivel teljesen analóg módon:

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cosh u, b \sinh u \cos v, c \sinh u \sin v), \quad 0 \leq v \leq 2\pi, u \in \mathbb{R}.$$

```
[69]= ContourPlot3D[x^2 / (1 / 2) - y^2 / (1 / 2) - z^2 / (1 / 3) == 1, {x, -7, 7},
      {y, -7, 7}, {z, -6, 6}, BoxRatios -> Automatic, AxesLabel -> {x, y, z},
      PlotLabel -> { x^2 / (1 / 2) - y^2 / (1 / 2) - z^2 / (1 / 3) == 1,
      kétköpenyű hiperboloid}]
```

```
]=
```



5.5. ábra. Két köpenyű hiperboloid. Általános formula:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

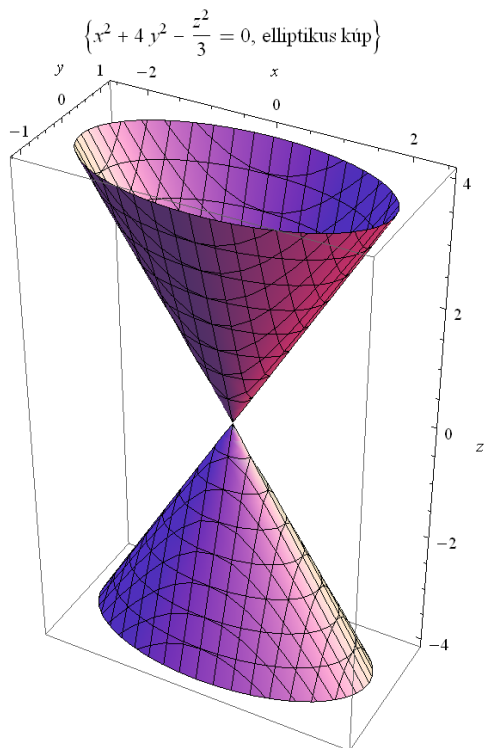


- (d) **Elliptikus kúp:**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ . Paraméterezése abból adódik, hogy az  $x, z$ -síkban tekintjük az  $\mathbf{r}(u) = (u, u)$  egyenest. Ha ezt megforgatnánk a  $z$ -tengely körül az  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cdot \cos v, u \sin v, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$  kúpot kapnánk. Mivel itt elliptikus kúpról van szó, az előbbi példákhoz hasonlóan korrigáljuk az  $a, b, c$ -vel szorozva a megfelelő koordinátákat. Kapjuk, hogy az elliptikus kúp paraméterezése:

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cdot u \cdot \cos v, b \cdot u \cdot \sin v, c \cdot u), \quad u \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq 2\pi$$

```
In[71]= ContourPlot3D[x^2 + y^2 / (1 / 4) - z^2 / 3 = 0, {x, -2.5, 2.5},
        {y, -1.2, 1.2}, {z, -4, 4}, BoxRatios -> Automatic, AxesLabel -> {x, y, z},
        PlotLabel -> {x^2 + y^2 / (1 / 4) - z^2 / 3 = 0, elliptikus kúp}]
```

```
[71]=
```



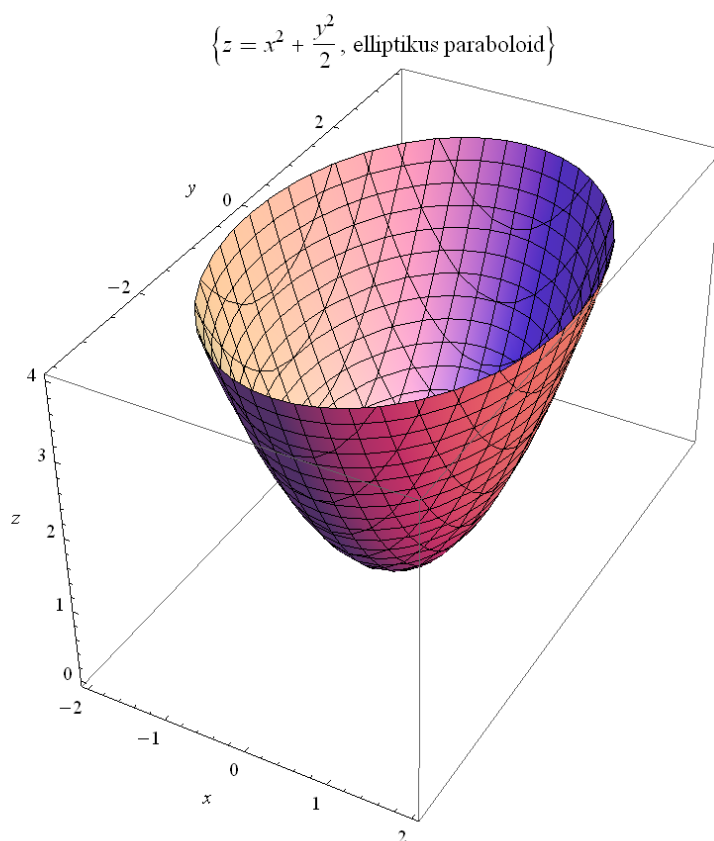
5.6. ábra. Elliptikus kúp. Általános formula:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

(e) Elliptikus paraboloid:  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ . Paraméterezése triviális:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)$$

```
In[72]= ContourPlot3D[z == x^2 + y^2 / 2, {x, -2, 2}, {y, -3.5, 3.5}, {z, 0, 4},
  BoxRatios -> Automatic, AxesLabel -> {x, y, z}, AxesLabel -> {x, y, z},
  PlotLabel -> {z == x^2 + y^2 / 2, elliptikus paraboloid}]
```

```
72]=
```



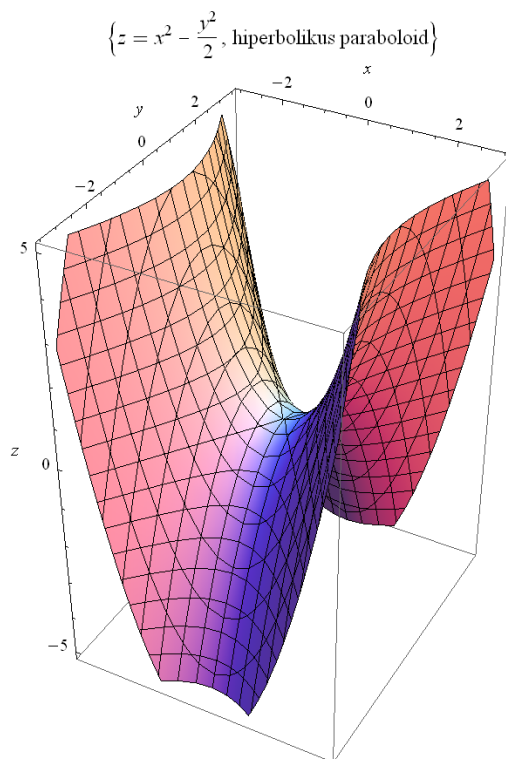
5.7. ábra. Elliptikus paraboloid. Általános formula:  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

(f) **Hiperbolikus paraboloid:**  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ . Paraméterezése triviális:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)$$

```
In[73]:= ContourPlot3D[z == x^2 - y^2 / 2, {x, -3, 3}, {y, -3.5, 3.5},
  {z, -5, 5}, BoxRatios -> Automatic, AxesLabel -> {x, y, z},
  AxesLabel -> {x, y, z},
  PlotLabel -> {z == x^2 - y^2 / 2, hiperbolikus paraboloid}]
```

73]=



5.8. ábra. Hiperbolikus paraboloid. Általános formula:  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



# Irodalomjegyzék

- [1] H. Anthon, R.C: Busby: Contemporary Linear Algebra. Wiley, 2003
- [2] W.E. Boyce, R.C. DiPrima: Elelemntary Differential Equations and Boundary Value Problems, 8. edition. Eighth edition Wiley, 2005, .
- [3] A.N.Kolmogorov, Sz.V. Fomin, A függvényelmélet és Funkcionálanalízis elemei. Műszaki Könyvkiadó, 1981.
- [4] Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenleek Példatár, Műszaki Könyvkiadó, Bolyai könyvek.
- [5] Thomas-féle Kalkulus