# 1. sorozat, Beadási határidő: Február 19 csütörtök 08:15

1. Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel, valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

   (a) Ésszerű-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát.

   (b) Vasárnap este üres volt az újságkupac. Mekkora valószínűséggel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban? Számítsa ki esetszétválasztással és mátrix hatványozással is.

2. Írjuk le egy olyan elágazó folyamat átmenet mátrixát, amelyben az egyes egyedek leszármazottainak száma geometriai eloszlású.

3. Tekintsünk egy Markov láncot a $\{0, 1\}$ kételemű állapottéren, melynek átmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

   Feltéve, hogy a lánc a kezdeti $n = 0$ időpontban a 0 állapotból indul, mennyi annak a valószínűsége, hogy $n = 3$ időpontban az 1 állapotban lesz?

4. *Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre*
   Két urnában vannak golyóink: $N$ darab mindkettőben. A golyók közül $N$ kék és $N$ piros. A golyókat a következő képpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek eloszlása igen.) Írjuk le a folyamat $S$ állapotterét és $P$ átmenet mátrixát.

5. *Markov-lánc kontrakció*

   (a) Az $X_t$ diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetmátrixa pedig

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 7/11 \end{pmatrix}.$$

   A kezdeti $t = 0$ időpillanatban a lánc állapotainak eloszlása tetszőleges $\mu_0$. Legyen

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad X_t = 1 \\ 2 & \text{ha} \quad X_t \neq 1. \end{cases}$$

   Mutassuk meg, hogy az $Y_t$ folyamat szintén Markov láncot alkot és számítsuk ki az átmenetmátrixát.

   (b) Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov-lánc az $S$ véges állapottéren, $P$ átmenetmátrixszal. Legyen $\varphi : S \to \hat{S}$, nem feltétlenül injektív leképezés. Fogalmazzon meg egyszerű feltételt $P$-re, hogy $Y_1, Y_2, \ldots$ is Markov-lánc legyen, ahol $Y_i := \varphi(X_i)$. Adja meg az új Markov-lánc átmenetmátrixát.

   (c) Legyen $S$ az a $\binom{2n}{n}$-elemű halmaz, aminek az elemei a Bernoulli-Laplace urna lehetséges konfigurációi. Tekinsük ezen az állapottéren a B-L modell keverési modell dinamikáját. Legyen $\varphi$ az a függvény, ami megmondja az első urnában levő piros golyók számát. Mutassuk meg, hogy teljesülnek a Markov-lánc kontrakció feltételei.

6. Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_n$ homogén, véges állapotterű Markov-lánc $\mu_0$ kezdeti eloszlással es $P$ átmenetmátrixszal. Mutassuk meg, hogy a $Y_i = X_{n-i}$ megfordított folyamat is egy (nem feltétlenül homogén) Markov-lánc! Adjuk meg a kezdeti eloszlását és az átmenetmátrixokat (mátrixműveletek segítségével). Mutassuk meg, hogy az átmenetmátrixok valóban sztochasztikusak, azaz a sorösszegeik 1-et adnak.

7. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ egy nem feltétlenül homogén Markov lánc az $S$ véges állapottéren. Legyen $x_{n+1} \in S$ az állapottér valamelyik állapota. Tegyük továbbá fel, hogy $\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}) > 0$. Igaz-e, hogy az az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sztochasztikus folyamat is Markov lánc, aminek állapottere $S$, és aminek az eloszlását a következőképp definiáljuk: tetszőleges $A \subseteq S^n$-re

$$\mathbf{P}\big((Y_1, \ldots, Y_n) \in A\big) := \mathbf{P}\big((X_1, \ldots, X_n) \in A | X_{n+1} = x_{n+1}\big)$$

8. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_j = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_j = 0)$. Legyen $X_n := \xi_n + \xi_{n+1} + \xi_{n+2}$. Markov lánc-e az $X_n$, $n \in \mathrm{N}$, valószínűségi változó sorozat?

9. A $\xi_t$, $t = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:
   (a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);
   (b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_t$;
   (c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1,-1) = 1$, $\Phi(-1,1) = 2$, $\Phi(1,-1) = 3$, $\Phi(1,1) = 4$.
   A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.