

A derivált alkalmazásai II.

Függvényvizsgálat

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.10.28. és 2015.11.02.

- 1 Monotonitás
- 2 Konvexitás
- 3 Függvényvizsgálat

Monotonitás

Tétel

Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$ -n és diffható (a, b) -n.

- $f' \geq 0$ az (a, b) -n pontosan akkor, ha f monoton növekvő $[a, b]$ -n.
- $f' \leq 0$ az (a, b) -n pontosan akkor, ha f monoton csökkenő $[a, b]$ -n.

Bizonyítás

Csak az $f' \geq 0$ esetet bizonyítjuk, a másik eset ugyanígy működik.

Először tegyük fel, hogy $f' \geq 0$ az (a, b) -n és legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra.

\implies Van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.

$x_2 - x_1 > 0$ és $f'(c) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1)$, azaz f monoton növekvő $[a, b]$ -n.

Bizonyítás (folytatás)

A másik irányhoz tegyük fel, hogy f monoton növekvő $[a, b]$ -n, és legyen $c \in (a, b)$.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Mivel f monoton növekvő $[a, b]$ -n, ezért az $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ hányados minden $x \in [a, b]$ esetén nemnegatív \implies a határérték sem lehet negatív $\implies f' \geq 0$.

Tétel

Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$ -n és diffható (a, b) -n.

- Ha $f' > 0$ az (a, b) -n, akkor f szigorúan monoton növekvő $[a, b]$ -n.
- Ha $f' < 0$ az (a, b) -n, akkor f szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$ -n.

Bizonyítás

Legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra.

\implies van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$

\implies

ha $f' > 0$, akkor $f(x_2) > f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton növekvő

ha $f' < 0$, akkor $f(x_2) < f(x_1)$, azaz f szigorúan monoton csökkenő

Megjegyzés

Az állítás megfordítása nem igaz, például az $f(x) = x^3$ függvény szigorúan monoton növekvő, de 0-ban a deriváltja 0, azaz $f' > 0$ nem teljesül minden pontban.

Következmény

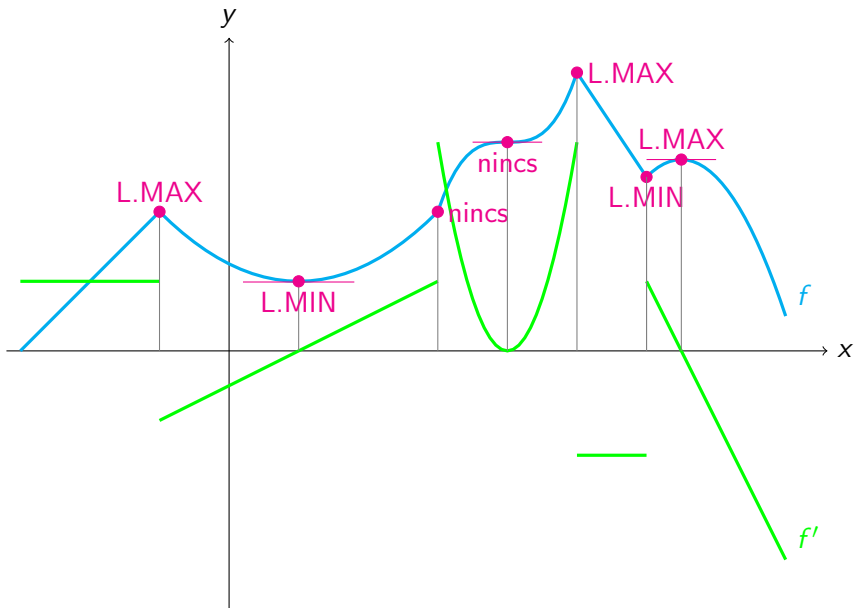
Tegyük fel, hogy f folytonos az (a, b) -n és diffható az (a, c) és (c, b) intervallumokon, és c az f kritikus pontja.

- Ha f' az (a, c) -n pozitív, a (c, b) -n negatív, akkor f -nek c -ben **lokális maximuma** van.
- Ha f' az (a, c) -n negatív, a (c, b) -n pozitív, akkor f -nek c -ben **lokális minimuma** van.
- Ha f' azonos előjelű (pozitív vagy negatív) az (a, c) és (c, b) intervallumokon, akkor nincs lokális szélsőértéke c -ben.

Bizonyítás

Ha f' az (a, c) -n pozitív, akkor minden $x \in (a, c)$ elemre $f(x) < f(c)$. Hasonlóképp, ha f' a (c, b) -n negatív, akkor minden $x \in (c, b)$ elemre $f(x) < f(c)$. Tehát c maximumhely.

A másik két állítás hasonlóan bizonyítható.



Példa

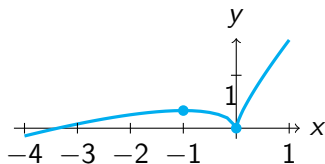
Határozzuk meg az $f(x) = x^{2/3} + \frac{2}{3}x$ függvény lokális szélsőérték helyeit!

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}$, ez nincs értelmezve az $x = 0$ helyen.

$f'(x) = 0$, ha $x = -1$.

A kritikus pontok $x = -1$, $x = 0$.

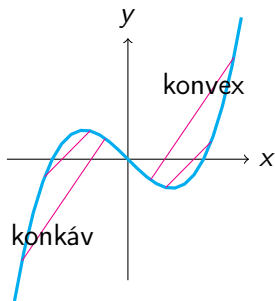
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	+	0	-	nincs ért.	+
f	↗	lok.max (1/3)	↘	lok.min (0)	↗



Konvexitás

Definíció

Az I intervallumon értelmezett f függvény **konvex (konkáv)**, ha a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő húr, a grafikon fölött (alatt) halad (beleértve, hogy a két grafikon egybeesik).



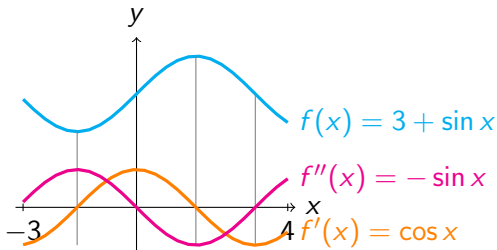
Tétel

Ha az I intervallumon értelmezett f függvény differenciálható, és f' monoton növekvő (csökkenő) I -n, akkor f konvex (konkáv) az I -n.

Tétel

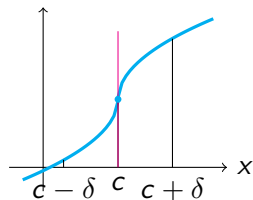
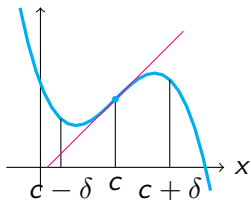
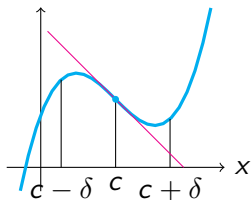
Ha az I intervallumon értelmezett f függvény kétszer differenciálható, és $f'' > 0$ ($f'' < 0$) az I -n, akkor f konvex (konkáv) az I -n.

Példa



Definíció

Az f függvénynek a c pontban **inflexiós pontja** van, ha f -nek létezik a deriváltja (véges vagy végtelen) a c pontban, és van olyan $\delta > 0$, hogy a $(c - \delta, c)$ intervallumon f konvex, és a $(c, c + \delta)$ intervallumon f konkáv, vagy fordítva. .



Tétel

Ha f kétszer diffható (a, b) -n, és $c \in (a, b)$ -ben f -nek inflexiós pontja van, akkor $f''(c) = 0$.

Azaz az $f''(c) = 0$ szükséges, (de nem elégséges) feltétele annak, hogy egy kétszer diffható függvénynek inflexiós pontja legyen c -ben.

Tétel

Ha f kétszer diffható az (a, b) -n, és valamely $\delta > 0$ -ra $f'' > 0$ a $(c - \delta, c)$ -n és $f'' < 0$ a $(c, c + \delta)$ -n, vagy fordítva, akkor ott inflexiós pontja van.

Tétel

Ha f diffható (a, b) -n, és valamely $c \in (a, b)$ -re f' az (a, c) -n szigorúan monoton növekvő, (c, b) -n szigorúan monoton csökkenő (vagy fordítva), akkor f -nek c -ben inflexiós pontja van.

Példa

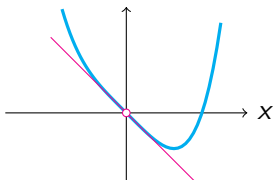
(Ahol a második derivált 0, nem biztos, hogy inflexiós pont van.)

Határozzuk meg az $f(x) = x^4 - x$ függvény konvex és konkáv tartományait és inflexiós pontjait!

$$f'(x) = 4x^3 - 1$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Bár $f''(0) = 0$, itt nincs inflexiós pontja f -nek, mert f'' előtte és utána is pozitív, azaz az f előtte és utána is konvex (így az egész számegyenesen konvex).



Példa

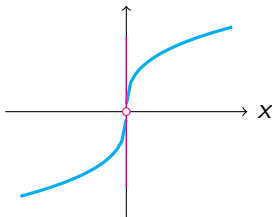
(Inflexiós pont lehet ott, ahol f'' nincs értelmezve.)

Határozzuk meg az $f(x) = x^{1/3}$ függvény konvex és konkáv tartományait és inflexiós pontjait!

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Bár f'' nincs értelmezve a 0-ban, itt mégis inflexiós pontja f -nek, mert f'' előtte pozitív, utána negatív, azaz az f előtte konvex, utána konkáv.



Tétel (Második derivált és a lokális szélsőérték)

Legyen f'' folytonos egy, a c pontot tartalmazó, nyílt intervallumon.

- $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ -nek c -ben lokális minimuma van.
- $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ -nek c -ben lokális maximuma van.
- $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$, akkor további vizsgálat szükséges.

Bizonyítás

Ha $f''(c) > 0$, akkor f'' folytonossága miatt c egy környezetében $f''(x) > 0$, így f' szigorúan monoton növekvő. Ugyanakkor $f'(c) = 0$, így $f'(x)$ előjele $x < c$ esetén negatív, $x > c$ esetén pozitív. $\implies f$ -nek c -ben lokális minimuma van.

A másik eset hasonlóan bizonyítható

Következmény

Ha f''' folytonos a c pontot tartalmazó nyílt intervallumon, $f''(c) = 0$, $f'''(c) \neq 0$, akkor f -nek c -ben inflexiós pontja van.

Példa

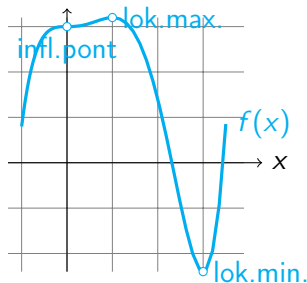
Keressük meg az $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 3$ függvény lokális szélsőérték helyeit és inflexiós pontjait!

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 \implies \text{krit. pontok: } x_{1,2} = 0, x_3 = 1, x_4 = 3$$

$$f''(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x,$$

$$f''(1) = -2 \text{ lok. max.}, f''(3) = 18 \text{ lok. min.}, f''(0) = 0 \implies$$

$$f'''(x) = 12x^2 - 24x + 6, f'''(0) \neq 0 \text{ miatt } 0\text{-ban inflexiós pont van.}$$



Teljes függvényvizsgálat

- 1 $D(f)$, f szakadási pontjai, szimmetriája (páros/páratlan), periodikussága
- 2 f' , f'' (esetleg f''') meghatározása
- 3 kritikus pontok (f' -ből)
- 4 monotonitás, szélsőérték helyek
- 5 konvexitás, inflexiós pontok
- 6 aszimptoták (határértékek az ÉT széléin)
- 7 függvényértékek kiszámítása (a fenti kiszámolt pontokban, $x = 0$ -ban, zérushelyek, . . .)
- 8 grafikon megrajzolása
- 9 értékkészlet

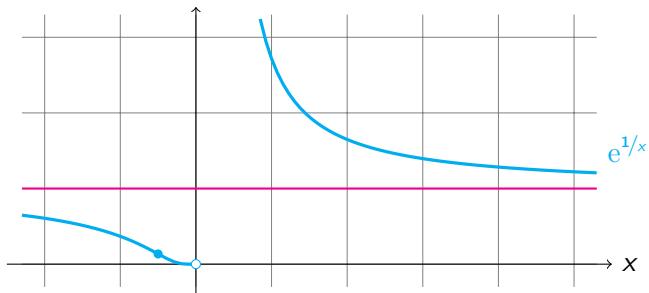
Példa

Végezzünk függvényvizsgálatot az $e^{1/x}$ függvényen!

- 1 ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (nem páros, nem páratlan, nem periodikus)
- 2 $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^3} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}$
- 3 nincs kritikus pont
- 4 $f' < 0$ mindenütt, f mindenütt szigorúan monoton csökkenő,
- 5 $f''(x) = 0$ az $x = -1/2$ helyen, f'' előtte negatív (f konkáv), utána pozitív (f konvex), tehát f -nek $x = -1/2$ -ben inflexiós pontja van
- 6 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$, $\implies x = 0$ függőleges aszimptota
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} = 1 \implies y = 1$ vízszintes aszimptota
- 7 $f(-1/2) = e^{-2} \approx 0.135$, $f(1) = e$

Példa

8 Grafikon:

9 $R(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Összefoglalás

- (szigorú) monotonitás és a derivált kapcsolata
- a derivált előjelváltása és a szélsőérték kapcsolata
- f konvexitása és f' szigorú monotonitásának kapcsolata
- f konvexitása és f'' előjele közti kapcsolat
- inflexiós pont létezése és f'' nulla volta közti kapcsolat
- második derivált és a lokális szélsőérték kapcsolata
- teljes függvényvizsgálat