A derivált alkalmazásai I.

Wettl Ferenc előadása alapján

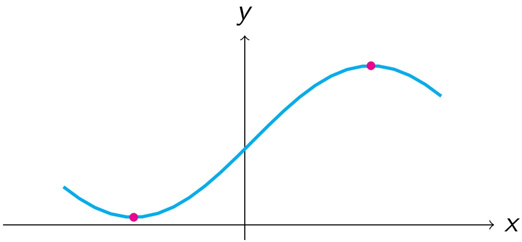
2015.10.26. és 2015.10.28.

Lokális szélsőértékek

Definíció

Az f függvénynek a $D(f)$ valamely c belső pontjában lokális maximuma (lokális minimuma) van,ha van olyan c-t tartalmazó nyílt $I \subseteq D(f)$ intervallum, melynek minden x elemére

$$f(x) \leqslant f(c) \qquad (f(x) \geqslant f(c))$$



Tétel

Ha f-nek c-ben lokális szélsőértéke van, és f diffható c-ben $\Longrightarrow f'(c) = 0$.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f-nek lokális maximuma van c-ben. Ekkor

$$f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

$\Longrightarrow f'(c)$ csak 0 lehet. Minimumhelyre a bizonyítás ugyanígy működik.

Definíció

A $c \in D(f)$ pont az f függvény kritikus pontja ha f' nem létezik c-ben vagy ha létezik és $f'(c) = 0$.

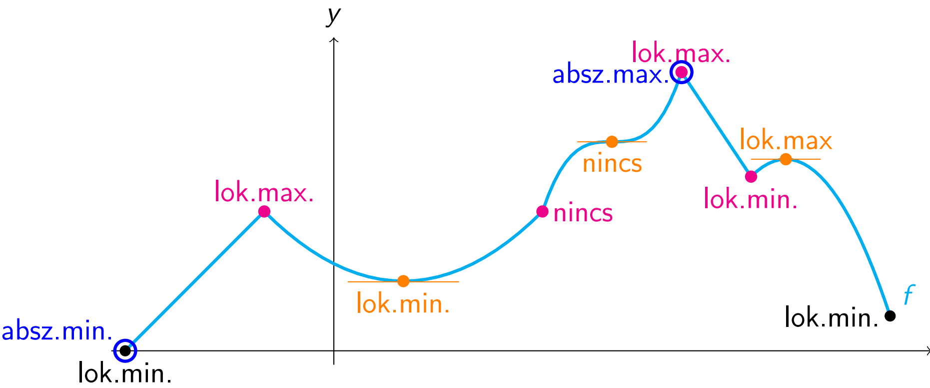
Abszolút szélsőértékek

Definíció

Az f függvénynek a $c \in I \subseteq D(f)$ pontban abszolút (globális) maximuma (abszolút minimuma) van az I intervallumra nézve, ha minden $x \in I$ esetén

$$f(x) \leq f(c) \qquad (f(x) \geq f(c))$$

- A Weierstrass-tétel értelmében, ha f folytonos az $[a, b]$ (korlátos és zárt) intervallumon, akkor van minimuma és maximuma.
- Következésképpen a folytonos f-nek abszolút szélsőértéke a kritikus pontokban vagy az intervallum a, b végpontjaiban lehet, és ezek közül a legnagyobb fv.-értékűben van a maximuma, a legkisebb fv.értékűben a minimuma.



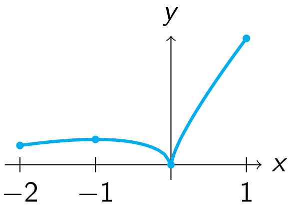
- kritikus pont: f nem differenciálható
- kritikus pont: f deriváltja 0
- intervallum végpontja
- abszolút (globális) szélsőérték

Példa

Határozzuk meg az $f(x) = x^{2/3} + \dfrac{2}{3}x$ függvény abszolút szélsőértékhelyeit a $[-2, 1]$ intervallumon!

$f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} + \dfrac{2}{3} \implies$ ez nincs értelmezve az $x = 0$ helyen
$f'(x) = 0 \implies x = -1$
A kritikus pontok $x = -1$, $x = 0$, a végpontok $x = -2$, $x = 1$:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$\sqrt[3]{4} - \frac{4}{3} \approx 0.254$	$\frac{1}{3}$	0 *MIN*	$\frac{5}{3}$ *MAX*



Középértéktételek

Tétel (Rolle-tétel)

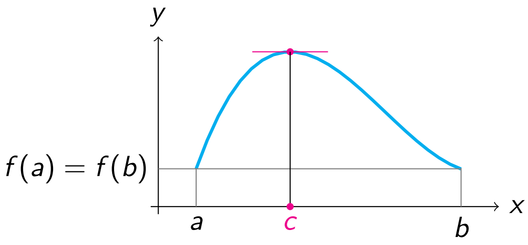
Ha f folytonos $[a, b]$-n, diffható (a, b)-n és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = 0$.

Bizonyítás

f folytonos $[a, b]$-n, ezért van abszolút maximuma és minimuma.
Mivel f diffható (a, b)-n, ezért ezeket értékként

- vagy a végpontokban
- vagy olyan c belső pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$.

Ha f a minimum és a maximum legalább egyikét (a, b)-ben veszi fel, akkor ott $f'(c) = 0$.
Ha a maximumot és a minimumot is a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény konstans, így mindenütt 0 a derivált.



Példa

Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3x + 1$ függvénynek pontosan 1 valós gyöke van!

$f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
f minden valós helyen differenciálható (és így folytonos is). $\Longrightarrow$ Ha volna f-nek két zérushelye, akkor a Rolle-tétel értelmében köztük valahol 0 lenne a derivált. $\Longrightarrow$ Legfeljebb egy zérushelye lehet.
Ugyanakkor f folytonos és $f(-1) = -7$, $f(1) = 9$, tehát a Bolzano-tétel szerint a $(-1, 1)$ intervallumon f-nek van zérushelye.

Tétel (Lagrange-tétel)

Ha f folytonos $[a, b]$-n és diffható (a, b)-n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bizonyítás

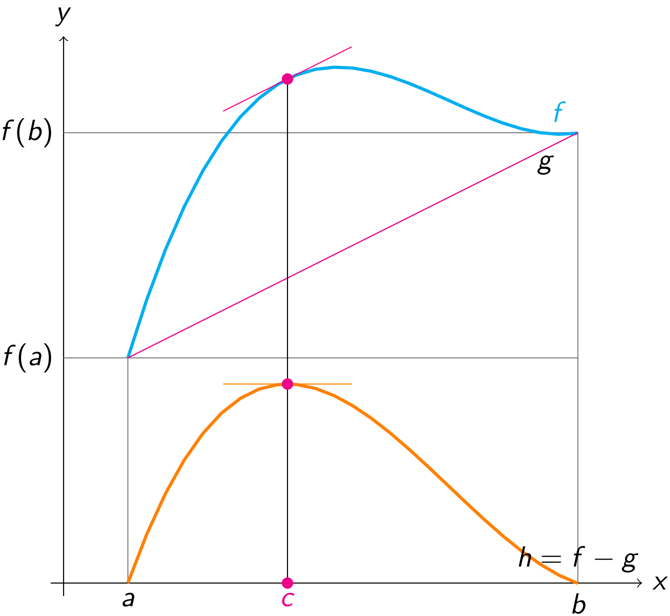
Legyen g az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokra fektetett szelőegyenes:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Alkalmazzuk a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvényre a Rolle-tételt:

- $h(a) = h(b) = 0$,
- $h'(x) = \left(f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$\Longrightarrow \exists\ c \in (a, b)$, ahol $h'(c) = 0 \Longrightarrow h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$


y
$f(b)$
$f(a)$
f
g
$h = f - g$
x
a
c
b

Következmény

Ha minden $x \in (a, b)$ pontban $f'(x) = 0$, akkor f konstans az (a, b) intervallumon (valamely C számra $f(x) = C$).

Bizonyítás

Kontrapozícióval bizonyítunk: ha f nem konstans, akkor nem lehet a deriváltja mindenütt 0.
Ha f nem konstans, van olyan $p, q \in (a, b)$, hogy $f(p) \neq f(q)$.
Ezekre alkalmazva a Lagrange-tételt, kapunk egy olyan $c \in (p, q)$ értéket, hogy

$$f'(c) = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} \neq 0,$$

tehát ezen a $c \in (p, q) \subseteq (a, b)$ helyen $f'(c) \neq 0$.

Következmény

Ha $f'(x) = g'(x)$ az (a, b) intervallumon, akkor van olyan C szám, hogy az (a, b) intervallumon $f(x) = g(x) + C$, azaz $f - g$ konstans.

Bizonyítás

A $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény deriváltja $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, így $h(x) = C$, azaz $f(x) = g(x) + C$.

Példa

Melyik az a függvény, amelyiknek $\cos x$ a deriváltja?

Minden $\sin x + C$ alakú függvény, ahol C tetszőleges konstans.

Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)

Ha f és g folytonosak $[a, b]$-n, diffhatóak (a, b)-n és g'-nek nincs zérushelye (a, b)-n, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Bizonyítás

$g(a) \neq g(b)$, mert egyébként a Rolle-tétel szerint létezne olyan $c \in (a, b)$, hogy $g'(c) = 0$, de ezt a feltételek közt kizártuk.

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

h folytonos és diffható, $h(a) = h(b) = 0$, $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$

Alkalmazzuk a h függvényre a Rolle-tételt $\Longrightarrow$

$\exists\ c \in (a, b)$, ahol $h'(c) = 0 \Longrightarrow \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

L'Hospital- vagy l'Hôpital-szabály

Ha az f és g függvény határértékét ismerjük c-ben, abból még nem mindig tudjuk meghatározni pl. az $f \pm g$, fg, $f^g, \dots$ függvények határértékét c-ben.

Határozatlan alakok: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Tétel (l'Hospital-szabály)

Legyen f és g két olyan valós függvény, melyek

- diffhatóak egy I nyílt intervallumon (kivéve esetleg egy a pontot)
- $g'(x) \neq 0$, ha $a \neq x \in I$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ vagy $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ mindegyike $\pm\infty$
- és létezik az $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték.

Ekkor $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Megjegyzés

Az előző tételben a és L lehet $\pm\infty$ is, sőt a tétel féloldali határértékekre is igaz.

Bizonyítás (l'Hospital-szabály)

Az $x \to a^+$, $f(a) = g(a) = 0$ esetet igazoljuk.
Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumra: létezik olyan $c_x \in (a, x)$, hogy

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Mivel $f(a) = g(a) = 0$, ezért $\dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Ha $x \to a^+$, akkor $c_x \to a^+$ is fönnáll, ezért

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Példa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+3}{e^{2x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{2e^{2x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0$$

Példa

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Példa

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

Példa

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

A kitevőben: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = 1$

Tehát: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e.$

Általánosan: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k \ (k \in \mathbb{R})$

$k = 0$ esetén $\lim\limits_{x\to 0} 1^x = 1 = e^0$, egyébként

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k = \lim_{\frac{k}{x}\to 0}\left(\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^k = \mathrm{e}^k$$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha f és g olyan függvények, melyekre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, akkor f kisebb nagyságrendű mint g ($f \ll g$), ha $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Példa

log. függvény $\ll$ hatvány (polinom), ugyanis, ha $k > 0$, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{k} x^{-k} = 0$$

Példa

hatvány (polinom) $\ll$ exp. függvény, ugyanis ha $n > 0$ egész, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \overset{L'H}{=} \cdots \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

Amire figyelni kell a l'Hospital-szabály alkalmazásánál

1. Csak határozatlan alakokra használható ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$)!

Példa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+x}=0, \text{ miközben } \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(1+x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

2. Fontos, hogy létezzen a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték!

Példa

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x}=1, \text{ miközben a } \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1} \text{ határérték nem létezik.}$$

Taylor-polinom

Definíció

Legyen f egy valós függvény, mely n-szer differenciálható a c pontban. Ekkor a

$$T_{f,c,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k =$$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

polinomot az f függvény c körüli n-edrendű Taylor-polinomjának nevezzük.

Példa

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ c &= 0 \\ n &= 3 \end{aligned} \implies \begin{aligned} \sin 0 &= 0 \\ \sin' 0 &= \cos 0 = 1 \\ \sin'' 0 &= -\sin 0 = 0 \\ \sin''' 0 &= -\cos 0 = -1 \end{aligned} \implies T_{\sin x,0,3}(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

Tétel

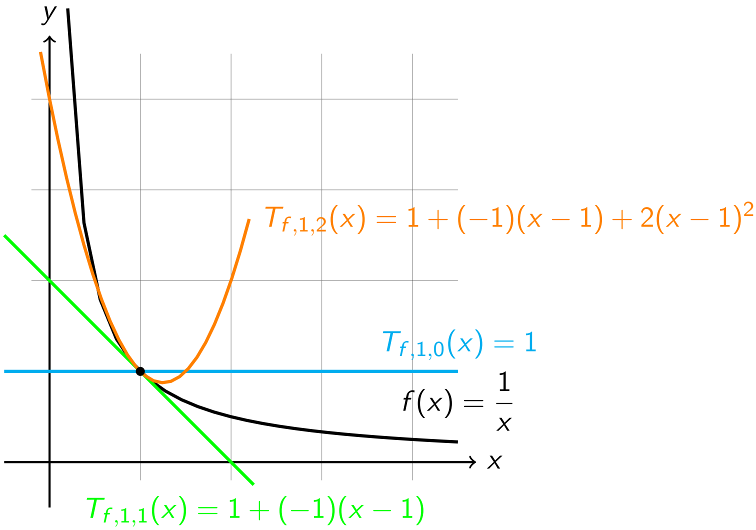
Ha f egy valós függvény, amely n-szer differenciálható a c pontban, és $T(x) := T_{f,c,n}(x)$ az f függvény c körüli n-edfokú Taylor-polinomja, akkor $T^{(k)}(c) = f^{(k)}(c)$ minden $0 \leq k \leq n$-re.

Bizonyítás

A $T(x)$ k-szoros deriválásánál a k-nál kisebb fokú tagok eltűnnek (minden deriválással eggyel csökken a polinom foka), a k-nál nagyobb fokú tagok k-adik deriváltja pedig $(x - c)$ többszöröse, tehát a c-beli helyettesítési értékük 0. Így

$$T^{(k)}(c) = \left(\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right)^{(k)} \Bigg|_{x=c} =$$

$$\frac{f^{(k)}(c)}{k!} k(k-1)\cdots 1 \cdot (x-c)^0|_{x=c} = f^{(k)}(c).$$



y
$T_{f,1,2}(x) = 1 + (-1)(x-1) + 2(x-1)^2$
$T_{f,1,0}(x) = 1$
$f(x) = \frac{1}{x}$
x
$T_{f,1,1}(x) = 1 + (-1)(x-1)$

Tétel (Taylor-tétel)

Ha f egy valós függvény, mely n-szer differenciálható a c pontban, akkor létezik egy olyan $h_n(x)$ valós függvény, hogy

$$f(x) = T_{f,c,n}(x) + h_n(x)(x-c)^n \text{ és } \lim_{x \to c} h_n(x) = 0.$$

A fenti formulában a $h_n(x)(x-c)^n$ tagot az n-edrendű Taylor-polinom Peano-féle maradéktagjának nevezzük.

Bizonyítás

Legyen $T(x) := T_{f,c,n}$. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\lim_{x \to c} h_n(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - T(x)}{(x-c)^n} = 0$$

Bizonyítás (folytatás)

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-T(x)}{(x-c)^n}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-T'(x)}{n(x-c)^{n-1}}\overset{L'H}{=}\dots\overset{L'H}{=}$$

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f^{(n-1)}(x)-T^{(n-1)}(x)}{n!(x-c)}$, ahol azért alkalmazhattuk minden lépésben a l'Hospital-szabályt, mert $f^{(k)}$ differenciálhatósága miatt $f^{(k)}$ folytonos is c-ben, és $f^{(k)}(c)=T^{(k)}(c)$ minden $k\leq n-1$-re, tehát mindegyik limesz $\frac{0}{0}$ alakú.

Az utolsó limesz (az $\dfrac{1}{n!}$ szorzó nélkül):

$$\lim_{x\to c}\frac{f^{(n-1)}(x)-\left(f^{(n-1)}(c)+f^{(n)}(c)(x-c)\right)}{x-c}=$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(c)}{x-c}-f^{(n)}(c)=f^{(n)}(c)-f^{(n)}(c)=0.$$

Összefoglalás

- Lokális és abszolút szélsőértékek
- Lokális szélsőérték és a derivált kapcsolata
- Rolle-,Lagrange- és Cauchy-féle középértéktétel és következményeik
- L'Hospital-szabály
- Függvények nagyságrendje
- Taylor-polinom és Taylor-tétel