

# Analitikus térgeometria

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.09.21.

- 1 Egyenes és sík egyenlete
  - Egyenes
  - Sík
- 2 Alakzatok közös pontjai
- 3 Alakzatok távolsága
- 4 Síkok és egyenesek távolsága és szögei
- 5 Összefoglalás

## Definíció

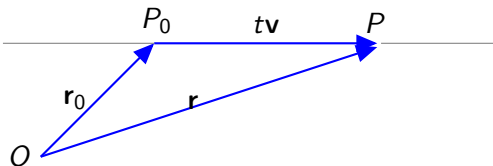
Az adott  $P_0$  ponton áthaladó  $e$  egyenes **irányvektor**ának nevezünk minden olyan  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ) vektort, amely párhuzamos az  $e$  egyenessel.

## Tétel (Egyenes paraméteres vektoregyenlete)

A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó,  $\mathbf{v}$  irányvektorú  $e$  egyenes **paraméteres (explicit) vektoregyenlete**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty$$

ahol  $\mathbf{r}$  az  $e$  egyenes egy  $P(x, y, z)$  pontjának helyvektora, míg  $\mathbf{r}_0$  a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponté.



## Megjegyzés

Az előző egyenlet vektorait koordinátás alakba írva:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct).$$

## Tétel (Egyenes paraméteres egyenletrendszere)

Ha a  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pont egy egyenes egyik pontja, irányvektora pedig  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ , akkor az egyenes **paraméteres (explicit) egyenletrendszere**

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

ahol a  $t$  paraméter az összes valós számon végigfut.

Példa (Egy ponton átmenő, adott vektorral párhuzamos egyenes)

Legyen  $P_0(2, -1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (4, 3, 0)$ .

Megoldás

$$x = 2 + 4t, \quad y = -1 + 3t, \quad z = 3.$$

Példa (Két ponton átmenő egyenes)

Legyen  $P_0(2, -1, 3)$ ,  $P_1(6, 2, 3)$ .

Megoldás

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (4, 3, 0).$$

$$x = 2 + 4t, \quad y = -1 + 3t, \quad z = 3.$$

Az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből a  $t$  paramétert kiküszöbölhetjük:

$$\begin{array}{l}
 x = x_0 + at \\
 y = y_0 + bt \\
 z = z_0 + ct
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 t = \frac{x - x_0}{a} \\
 \xrightarrow{a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0} \\
 t = \frac{y - y_0}{b} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \\
 t = \frac{z - z_0}{c}
 \end{array}$$

Ez az egyenes **paramétermentes (implicit) egyenletrendszere**.

### Megjegyzés

Ha az irányvektor valamelyik koordinátája 0 (vagyis az irányvektor párhuzamos valamelyik koordinátasíkkal), akkor a megfelelő egyenlet a paraméteres egyenletrendszerben eleve nem tartalmazza a  $t$  paramétert, nem kell kiküszöbölni.

## Példa (Egyenes mentén egyenletesen mozgó pont mozgásának leírása)

A  $P_0(2, -1, 3)$  pontból 10 távolságegység/időegység sebességgel az  $\mathbf{b} = (4, 3, 0)$  irányban haladva, hová jutunk 6 időegység alatt?

### Megoldás

Átírva a vektoregyenletet, annak fizikai értelmezés adható:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t |\mathbf{v}| \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor}).$$

Most a sebesség = 10, egységvektor =  $(4/5, 3/5, 0)$ , hisz  $|\mathbf{b}| = 5$ .

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\text{sebesség})(\text{mozgásirányú egységvektor})$$

$$\mathbf{r}(6) = (2, -1, 3) + 6 \cdot 10 \cdot (4/5, 3/5, 0) = (50, 35, 3).$$

(E példában a sebességvektor  $\mathbf{v} = (8, 6, 0)$  az az irányvektor, mely a vektoregyenlet képletében szereplő  $\mathbf{v}$  vektorral egybeesik.)

## Tétel (Sík paraméteres egyenlete)

A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó ( $\mathbf{r}_0$  helyvektorú), az  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektorok által kifeszített sík **paraméteres (explicit)**

**vektoregyenlete:**

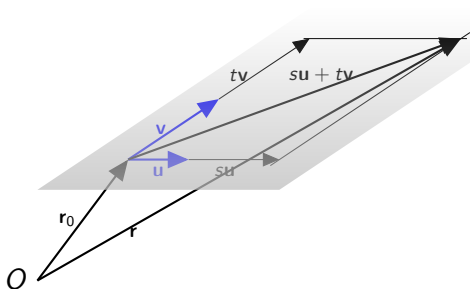
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}.$$

**egyenletrendszere:**

$$x = x_0 + su_1 + tv_1$$

$$y = y_0 + su_2 + tv_2$$

$$z = z_0 + su_3 + tv_3$$





## Definíció

Egy  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  vektort az  $S$  sík normálvektorának nevezzük, ha merőleges rá.

## Tétel (Sík paramétermentes egyenlete)

A  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  ponton áthaladó ( $\mathbf{r}_0$  helyvektorú),  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  ( $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ ) normálvektorú sík **paramétermentes (implicit)**

vektoregyenlete:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

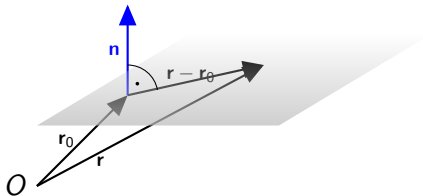
koordinátás alak:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

árendezve:

$$Ax + By + Cz = D,$$

ahol  $P(x, y, z)$  a sík egy tetszőleges pontja ( $\mathbf{r}$  helyvektorral), és  $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ .



## Példa (Sík egyenletének felírása)

$$P_0(1, -2, 3), \mathbf{u} = (3, 0, 2), \mathbf{v} = (1, -3, 0).$$

## Megoldás

Paraméteres vektoregyenlet és egyenletrendszer:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + s(3, 0, 2) + t(1, -3, 0)$$

$$x = 1 + 3s + t$$

$$y = -2 - 3t$$

$$z = 3 + 2s$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (6, 2, -9).$$

implicit vektoregyenlet:  $(6, 2, -9) \cdot (x - 1, y + 2, z - 3) = 0,$

koordinátás alak:  $6(x - 1) + 2(y + 2) - 9(z - 3) = 0,$

$$\implies 6x + 2y - 9z = -25.$$

Példa (Három ponton átmenő sík egyenlete)

$P(1, 0, 0)$ ,  $Q(0, 2, 0)$ ,  $R(0, 0, 3)$ .

Megoldás

A paraméteres egyenletrendszerhez  $\vec{PQ} = (-1, 2, 0)$ ,  $\vec{PR} = (-1, 0, 3)$ :

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + s(-1, 2, 0) + t(-1, 0, 3)$$

$$x = 1 - s - t$$

$$y = 2s$$

$$z = 3t$$

A normálvektor  $\vec{PQ} \times \vec{PR} = (6, 3, 2)$ ,

így az koordinátás egyenlet  $6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \implies$   
 $6x + 3y + 2z = 6$

Két egyenes kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - a két egyenes kitérő vagy párhuzamos, de nem azonos
- 1 közös pont - a két egyenes metsző
- végtelen sok közös pont - a két egyenes azonos

Példa (Két egyenes metszéspontja)

$$e_1: x = 1 + 2t, y = 1 + 3t, z = 1 + t$$

$$e_2: x = 2 + t, y = -t, z = 2 + t$$

Megoldás

Az második egyenletrendszerben a paramétert  $s$ -re cseréljük, majd az egyes koordinátákat egyenlővé tesszük:

$$1 + 2t = 2 + s$$

$$1 + 3t = -s$$

$$1 + t = 2 + s$$

Az egyenletrendszert megoldva  $t = 0, s = -1$  (Ellenőrzés!), majd behelyettesítve  $t = 0$ -t  $e_1$ -be (vagy  $s = -1$ -et  $e_2$ -be), a metszéspont  $(1, 1, 1)$ .

Sík és egyenes kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - az egyenes párhuzamos a síkkal
- 1 közös pont - az egyenes dőfi a síkot
- végtelen sok közös pont - az egyenes része a síknak

Példa (Sík és egyenes metszéspontja)

S:  $x + 2y + 2z = 3$ , e:  $x = 3 - t$ ,  $y = 2 + 2t$ ,  $z = 1$ .

Megoldás

Behelyettesítjük az egyenes egy pontjának koordinátáit a sík egyenletébe.

Az egyenes egy pontja:  $(3 - t, 2 + 2t, 1)$ , behelyettesítve:

$(3 - t) + 2(2 + 2t) + 2 \cdot 1 = 3$ , azaz  $t = -2$ . Innen a közös pont:

$(5, -2, 1)$ . Ellenőrzés!

Két sík kölcsönös helyzete:

- 0 közös pont - a két sík párhuzamos
- a két sík egy közös egyenesben metszi egymást
- a két sík azonos

Példa (Két sík metszésvonalának egyenletrendszere)

$$S_1: 2x + z = 3, S_2: 3y + z = 5$$

Megoldás

$S_1$  normálvektora:  $\mathbf{n}_1 = (2, 0, 1)$ ,  $S_2$  normálvektora:  $\mathbf{n}_2 = (0, 3, 1)$ ,  
 A metszésvonal irányvektora  $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-3, -2, 6)$ . Kell keresni még  
 egy közös pontot, azaz a két egyenletből álló egyenletrendszer egy  
 megoldását, ami biztosan létezik, ha a két sík nem párhuzamos. Legyen  
 például  $x = -1$ , ekkor  $z = 5$  és  $y = 0$ . Az egyenes egyenletrendszere:  
 $x = -1 - 3t$ ,  $y = -2t$ ,  $z = 5 + 6t$ .

## Definíció (Alakzatok távolsága)

Ha két alakzat pontjai páronkénti távolságának létezik a minimuma, akkor ezt hívjuk a két alakzat **távolságának**, vagyis ha  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  két alakzat a térben, akkor

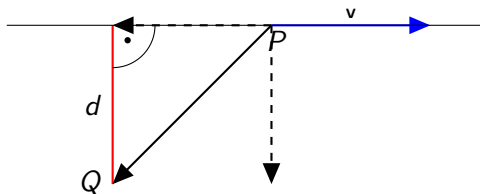
$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \min\{d(x, y) \mid x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{B}\}.$$

## Megjegyzés

Amennyiben a szóban forgó alakzatok pontok, egyenesek és síkok, akkor a fenti módon definiált távolság mindig létezik.

## Tétel (Pont és egyenes távolsága)

A  $Q$  pont és a  $P$  ponton átmenő  $\mathbf{v}$  irányvektorú egyenes távolsága megegyezik a  $\overrightarrow{PQ}$  vektor  $\mathbf{v}$  vektorra merőleges komponensének hosszával.



$$d = \left| \overrightarrow{PQ} - \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right|$$



## Példa

Mennyi a  $Q(-3, 4, -3)$  pont és az  $e: x = 1 - 4t, y = 2, z = -3t$  egyenes távolsága?

## Megoldás

$\mathbf{v} = (-4, 0, -3), P(1, 2, 0), Q(-3, 4, -3) \implies \overrightarrow{PQ} = (-4, 2, -3)$ ,  
 $\mathbf{v}$ -vel párhuzamos komponens:

$$\frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{(-4, 2, -3) \cdot (-4, 0, -3)}{(-4, 0, -3) \cdot (-4, 0, -3)} (-4, 0, -3) = \frac{25}{25} (-4, 0, -3)$$

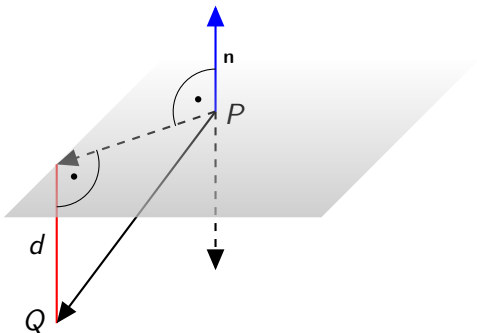
$\mathbf{v}$ -re merőleges komponens

$$\overrightarrow{PQ} - (-4, 0, -3) = (0, 2, 0)$$

Ennek hossza a távolság, vagyis  $d = 2$ .

## Tétel (Pont és sík távolsága)

A  $Q$  pont és a  $P$  ponton átmenő  $\mathbf{n}$  normálvektorú sík távolsága megegyezik a  $\overrightarrow{PQ}$  vektor  $\mathbf{n}$  vektorral párhuzamos komponensének hosszával.



$$d = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \right| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

## Példa (Pont és sík távolsága)

 $Q(0, -1, 1)$ ,  $\mathcal{S}: x + 2y + 2z = 3$ .

## Megoldás

A sík normálvektora  $\mathbf{n} = (1, 2, 2)$ . Legyen  $P$  az  $\mathcal{S}$  sík egy tetszőleges pontja, pl.  $P(-1, 1, 1)$ . Ekkor  $\overrightarrow{PQ} = (1, -2, 0)$ , vagyis a  $Q$  pont távolsága a síktól

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(1, -2, 0) \cdot (1, 2, 2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 1.$$

## Definíció

Az  $Ax + By + Cz = D$  egyenletű sík **normálegyenlete**:

$$\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

Normálegyenlet esetén a normálvektor egységvektor.

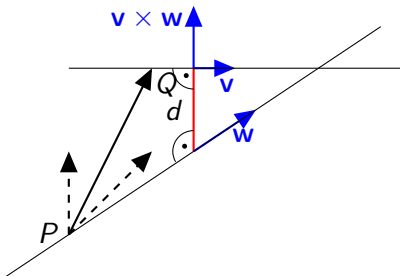
Egy  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  pont és az  $S : Ax + By + Cz - D = 0$  sík (előjeles) távolságát úgy is megkaphatjuk, ha a  $P_0$  pont koordinátáit behelyettesítjük a sík normálegyenletének bal oldalába, vagyis:

$$d(P_0, S) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Az előjel azt jelzi, hogy a pont a sík melyik oldalán van.

## Tétel (Két nem párhuzamos egyenes távolsága)

A  $Q$  ponton átmenő  $\mathbf{v}$  irányvektorú és a  $P$  ponton átmenő  $\mathbf{w}$  irányvektorú egyenes távolsága megegyezik a  $\overrightarrow{PQ}$  vektor  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  vektorral párhuzamos komponensének hosszával.



$$d = \left| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \right| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}$$

## Tétel (Párhuzamos síkok és egyenesek távolsága)

- Egy  $e$  egyenes távolsága egy vele párhuzamos egyenestől vagy síktól megegyezik az  $e$  egyenes egy tetszőleges pontjának az adott egyenestől vagy síktól vett távolságával.
- Két párhuzamos sík távolsága megegyezik az egyik sík tetszőleges pontjának a másik síktól vett távolságával.

## Tétel (Síkok és egyenesek egymással bezárt szögei)

- Két egyenes egymással bezárt szöge megegyezik az irányvektoraik szögével.
- Két sík egymással bezárt szöge megegyezik a normálvektoraik szögével.
- Egy egyenes és egy sík szöge  $|\frac{\pi}{2} - \alpha|$ , ahol  $\alpha$  az egyenes irányvektorának és a sík normálvektorának a szöge.

# Összefoglalás

- Egyenes és sík különböző egyenletei
- térbeli alakzatok közös pontjai
  - két egyenes metszete
  - egyenes és sík metszete
  - két sík metszete
- térbeli alakzatok egymástól vett távolsága
  - pont távolsága egyenestől és síktól
  - két kitérő egyenes távolsága
  - párhuzamos egyenesek és síkok közötti távolságok
- síkok és egyenesek egymással bezárt szögei