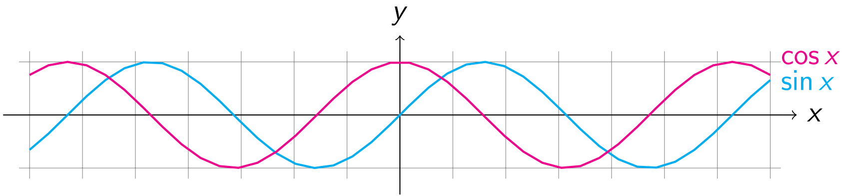
Elemi függvények

2015.10.07. és 2015.10.12.

Függvények tulajdonságai

- f periodikus p periódussal, ha $f(x) = f(x+p)$ minden x értékre
- Paritás
  - f páros függvény, ha $f(-x) = f(x)$ minden x értékre - grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre
  - f páratlan függvény, ha $f(-x) = -f(x)$ minden x értékre - grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra
- Monotonitás
  - f monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$
  - f szigorúan monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$
  - f monoton csökkenő, ha $x < y$ esetén $f(x) \geq f(y)$
  - f szigorúan monoton csökkenő, ha $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$

A szinusz és a koszinusz függvény



- ÉT=$\mathbb{R}$, ÉK=$[-1, 1]$ mindkét függvény esetében (x-et mindig radiánban mérjük)
- Periodikusság: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$, $\cos x = \cos(x + 2\pi)$
- Paritás:
  - $\sin x$ páratlan: $\sin(-x) = -\sin x$
  - $\cos x$ páros: $\cos(-x) = -\cos x$

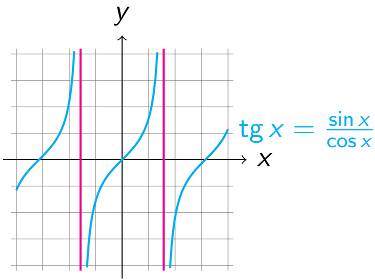
Állítás

A $\sin x$ és $\cos x$ függvény minden $c \in \mathbb{R}$ pontban folytonos.

Bizonyítás

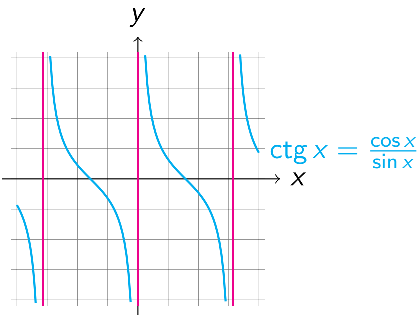
$\lim\limits_{x\to c} \sin x = \lim\limits_{h\to 0} \sin(c+h) = \lim\limits_{h\to 0} \sin c \cos h + \cos c \sin h =$
$(\sin c) \cdot 1 + (\cos c) \cdot 0 = \sin c$
$\lim\limits_{x\to c} \cos x = \lim\limits_{h\to 0} \cos(c+h) = \lim\limits_{h\to 0} \cos c \cos h - \sin c \sin h =$
$(\cos c) \cdot 1 - (\sin c) \cdot 0 = \cos c$

A tg és ctg függvények



- ÉT$=\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ÉK$=\mathbb{R}$
- Periodikusság: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi)$
- Paritás: páratlan: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
- Szig. mon. növekedő a $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ intervallumon $(k \in \mathbb{Z})$
- Aszimptoták: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$-ben, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty \text{ és } \lim_{x\to(2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$



- ÉT=$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ÉK=$\mathbb{R}$
- Periodikusság: $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x+\pi)$
- Paritás: páratlan: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
- Szig. mon. csökkenő a $(k\pi, (k+1)\pi)$ intervallumon $(k \in \mathbb{Z})$
- Aszimptoták: $x = k\pi$-ben, $k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x\to k\pi^-} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ és } \lim_{x\to k\pi^+} \operatorname{tg} x = \infty$$

Polinomok

Definíció

A $P(x)$ valós függvényt polinomnak nevezzük, ha alkalmas $a_0, \ldots, a_n$ valós számokkal $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ alakba írható. Az a_i értékeket a polinom együtthatóinak nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom foka n, vagyis $\deg P = n$.

- Volt: ha P egy polinom, akkor minden $c \in \mathbb{R}$-ben folytonos
- Határértékek $\pm\infty$-ben
  Tegyük fel, hogy a $P(x)$ polinom n foka legalább 1. Ekkor
  $$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$
  vagyis a végtelenekben vett határérték csak a legnagyobb kitevőjű tagtól függ.

Polinomok maradékos osztása

Állítás

Minden $f(x)$ és $g(x) \neq 0$ polinomokhoz léteznek egyértelmű $h(x)$ és $m(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = h(x)g(x) + m(x) \text{ és } \deg m < \deg g \text{ vagy } m = 0.$$

$h(x)$-et az f polinom g-vel vett maradékos osztása során kapott hányadosnak hívjuk,míg $m(x)$ az osztási maradék.

Kiszámítása: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, $g(x) = b_k x^k + \cdots + b_0$
Ekkor $h(x)$ első tagja $\frac{a_n}{b_k} x^{n-k}$ lesz,és f-et helyettesítjük az

$$f^*(x) = f(x) - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} g(x)$$

polinommal. Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg az osztandó polinom foka kisebb nem lesz mint az osztó polinom foka.

Példa

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 + 3$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & (x^3 & + & x^2 & - & 3x & + & 1) & : & (x^2 & + & 3) & = & x & + & 1 \\
- & (x^3 & & & + & 3x) & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & x^2 & - & 6x & + & 1 & & & & & & & & \\
 & & - & (x^2 & & & + & 3) & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & - & 6x & - & 2 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Tehát:

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2+3) + (-6x - 2)$$

Polinomok gyöktényezői

Tétel

Ha $f(x)$ egy polinom és c gyöke $f(x)$-nek (azaz $f(c) = 0$), akkor létezik egy $h(x)$ polinom, hogy $f(x) = (x - c)h(x)$.

Bizonyítás

Maradékos osztás $\Longrightarrow$ léteznek $h(x)$, $m(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = h(x)(x - c) + m(x),$$

ahol $\deg m(x) < \deg(x - c) = 1$ vagy $m = 0$. Ekkor viszont $m(x)$ csak egy m konstans lehet. Behelyettesítve c-t:

$$0 = f(c) = h(c)(c - c) + m = m,$$

vagyis valóban $f(x) = (x - c)h(x)$.

Horner-módszer

$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ maradékos osztása $(x - c)$-vel
A maradék éppen $m = f(c)$.

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
	$\downarrow$	$\downarrow +$		$\downarrow +$	$\downarrow +$
c	$b_{n-1} = a_n$	$\to \cdot c \quad b_{n-2} = a_{n-1} + c \cdot a_n$	$\cdots$	$\to \cdot c \quad b_0 = a_1 + c \cdot *$	$\to \cdot c \quad f(c) = a_0 + c \cdot b_0$

Ekkor $f(x) = (x - c)(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) + f(c)$, hiszen

beszorozva, és összehasonlítva x^i együtthatóját a két oldalon

$$a_i = b_{i-1} - c \cdot b_i \implies b_{i-1} = a_i + c \cdot b_i,$$

valamint x^0 együtthatóját

$$a_0 = -c \cdot b_0 + f(c) \implies f(c) = a_0 + c \cdot b_0.$$

Példa

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ és $c = 2$.

$f(2) = 0 \Longrightarrow$ kiemelhető belőle $(x-2)$
Horner-módszerrel:

	1	-3	0	4
$c=2$	1	-1	-2	0

Ennek megfelelően:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)(x^2 - x - 2).$$

Racionális gyökteszt

Állítás

Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ egy egész együtthatós polinom (vagyis $a_i \in \mathbb{Z}$ minden i-re), és tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke f-nek. Ekkor p osztója a_0-nak és q osztója a_n-nek.

Bizonyítás

$(p, q) = 1$ (relatív prímek, nincs közös osztójuk)

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \qquad / \cdot q^n$$

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

Bizonyítás (folytatás)

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

$p \mid 0$ és $p \mid a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} \implies p \mid a_0 q^n$
$q \mid 0$ és $q \mid a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \implies q \mid a_n p^n$
Mivel $(p, q) = 1$, ezért szükségképpen $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

Példa

Van-e racionális gyöke az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ polinomnak?

Ha $\frac{p}{q}$ gyök $((p, q) = 1)$, akkor $p \mid 4$ és $q \mid 1$
$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ és $q = \pm 1$, vagyis a lehetséges racionális gyökök $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ezeket kipróbálva azt kapjuk, hogy 2 és -1 a racionális gyökök.

Racionális törtfüggvények

Definíció

$f(x)$-et racionális törtfüggvénynek nevezzük, ha alkalmas $p(x)$ és $q(x)$ polinomokkal $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

- Mindenhol folytonos, ahol értelmezve van (ahol a nevező nem 0).
- Ha $\deg p \geq degq$, akkor léteznek $h(x)$ és $m(x)$ polinomok, hogy

$$p(x) = h(x)q(x) + m(x) \text{ és } \deg m < \deg q.$$

Ekkor:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{m(x)}{q(x)},$$

ahol a második tag már egy olyan racionális törtfüggvény, ahol a számláló foka kisebb mint a nevező foka.

Az exponenciális függvény

Állítás

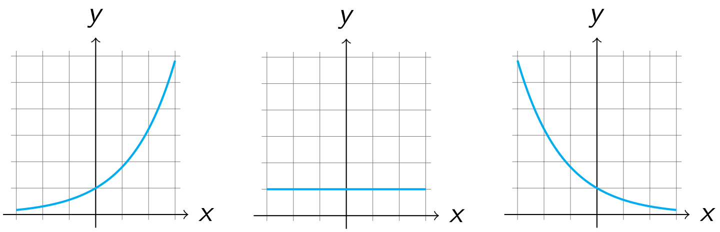
Ha $a > 0$ valós szám, akkor egyértelműen létezik egy mindenhol folytonos valós f függvény, hogy minden racionális r pontra $f(r) = a^r$.

Definíció

A fenti állítás által garantált f függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük, és $f(x) = a^x$-szel jelöljük.

Bizonyítás (Csak egyértelműség, a létezést később bizonyítjuk.)

Tegyük fel, hogy a feltételeket 2 folytonos függvény is teljesíti, legyenek ezek f_1 és f_2. Ekkor a $g = f_1 - f_2$ függvényre igaz, hogy folytonos és minden racionális r helyen $g(r) = 0$. A folytonosság miatt minden c értékre létezik a $\lim_{x \to c} g(x)$ határérték, és $g(c)$-vel egyenlő. De bármely $(c - \delta, c + \delta)$ intervallumban van racionális szám, és ott a függvény értéke 0, így a határérték csak 0 lehet.Vagyis $g(c) = 0$ minden c értékre, tehát $f_1 = f_2$.



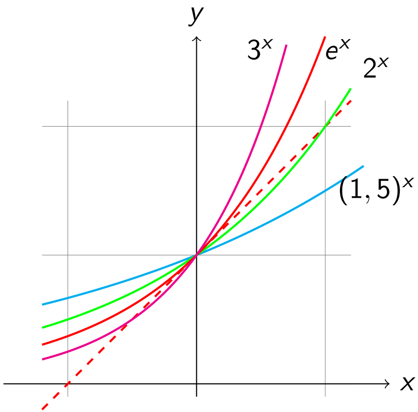
$a > 1$ $a = 1$ $0 < a < 1$

- Ha $a > 1$, akkor a^x szig. mon. növekedő $\mathbb{R}$-en; $-\infty$-ben 0-ba, ∞-ben ∞-be tart.
- Ha $0 < a < 1$, akkor a^x szig. mon. csökkenő $\mathbb{R}$-en; $-\infty$-ben ∞-be, ∞-ben 0-ba tart.
- $a^x > 0$ minden $a > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén
- Hatványazonosságok:
  - $a^x a^y = a^{x+y}$
  - $(a^x)^y = a^{xy}$
  - $(ab)^x = a^x b^x$

Definíció

Kitüntetett szerepe van annak a hatványalapnak, amikor az a^x grafikonjának az érintője a 0-ban 45°-os szögben áll. Ennek az a alapnak a neve Euler-szám, és e-vel jelöljük.

Az e értéke közelítőleg $2,71828\ldots$.



Az sh és ch függvények

Definíció

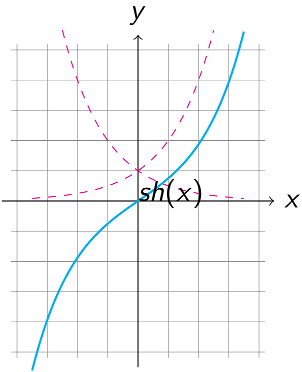
Szinusz hiperbolikusz: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

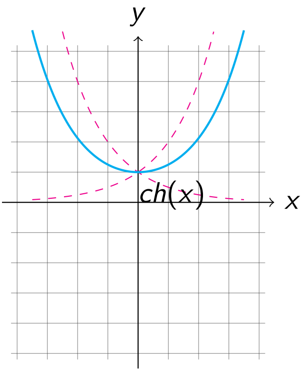
Koszinusz hiperbolikusz: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

- Folytonosak az egész $\mathbb{R}$-en.
- Paritás:
  - $\operatorname{sh} x$ páratlan: $\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{sh} x$
  - $\operatorname{ch} x$ páros: $\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch} x$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty,$

  $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sh} x = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty \Longrightarrow$ ÉK$= \mathbb{R}$
- $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 + 2}{2} \geq 1, \operatorname{ch} 0 = 1,$

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{ch} x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty \Longrightarrow$ ÉK$= [1, \infty)$





Monotonitás:

- sh x szig. mon. növő $\mathbb{R}$-en
- ch x szig. mon. csökkenő $(-\infty, 0]$-n és szig. mon. növő $[0, \infty)$-en

Állítás (Hiperbolikus azonosságok)

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
2. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
3. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

Bizonyítás (Csak (1)-et)

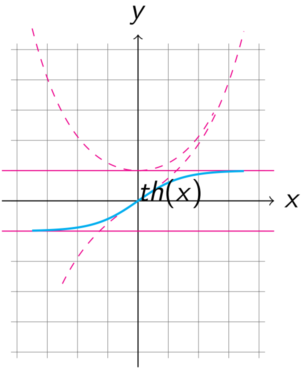
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} - \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

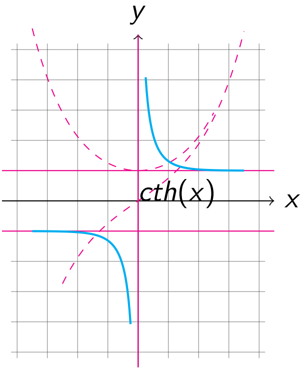
A th és cth függvények

Definíció

Tangens hiperbolikusz: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$
Kotangens hiperbolikusz: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

- ÉT: $D(\operatorname{th} x) = \mathbb{R}$, $D(\operatorname{cth} x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Mindkét függvény folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.
- Mindkét függvény páratlan: $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x = 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{cth} x = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{cth} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{cth} x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{cth} x = 1$





Monotonitás:

- th x szig. mon. növő $\mathbb{R}$-en
- cth x szig. mon. nővő $(-\infty, 0)$-n és $(0, \infty)$-en

th x értékkészlete $(-1, 1)$, cth x értékkészlete $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Összefoglalás

- Elemi függvények ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x, e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$) és tulajdonságaik (ÉT, ÉK, folytonosság, paritás, monotonitás, határértékek)
- Polinomok
  - Polinomok maradékos osztása
  - Polinomok gyöktényezői, Horner-módszer
  - Racionális gyökteszt
  - Racionális törtfüggvények