

Határérték

Wettl Ferenc előadása alapján

2015.09.28. és 2015.09.30.

- 1 A valós függvény fogalma
- 2 A határérték fogalma
 - Határérték a végtelenben
 - Határérték véges pontban
 - Végtelen határértékek
- 3 A határértékek kiszámítása
 - A rendőrelv
- 4 Jobb és bal oldali határértékek
- 5 Nevezetes határértékek
- 6 Aszimptoták
- 7 Összefoglalás

Definíció (Egyváltozós valós függvény)

f -et valós függvénynek nevezzük, amennyiben a valós számok egy részhalmazához (értelmezési tartomány - $D(f)$) rendel valós számokat oly módon, hogy az értelmezési tartomány minden eleméhez pontosan egy értéket rendel. Az értelmezési tartomány egy x értékéhez rendelt értéket $f(x)$ jelöli.

Definíció (Valós függvény grafikonja)

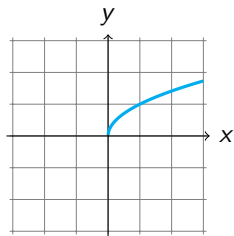
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f), y = f(x)\}$$

\mathbb{R}^2 egy részhalmaza akkor és csak akkor grafikonja egy függvénynek, ha minden függőleges egyenes legfeljebb egy pontban metszi.

Példa

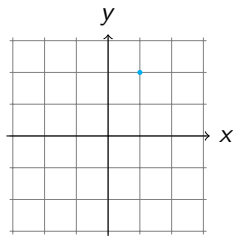
$$f_1(x) = \sqrt{x}$$

függvény

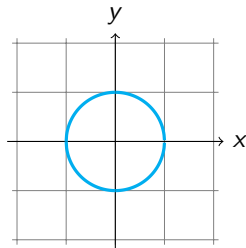


$$f_2: D(f) = \{1\} \quad f(1) = 2$$

függvény



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
nem grafikonja függvénynek



- függvény: f minden irracionális x értékhez 1-et rendel hozzá

Definíció (Függvény határértéke a végtelenben)

1. Legyen f egy olyan függvény, amelyre $[N, \infty) \subseteq D(f)$ valamely alkalmas $N \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor az f függvény **határértéke a végtelenben L** (jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$), ha

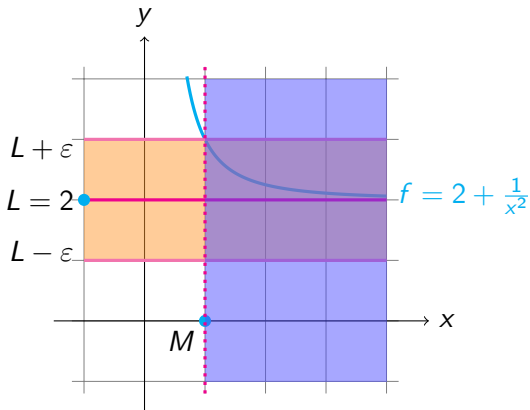
$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall x [x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

2. Legyen f egy olyan függvény, amelyre $(-\infty, N] \subseteq D(f)$ valamely alkalmas $N \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor az f függvény **határértéke a mínusz végtelenben L** (jelölés: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \forall x [x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

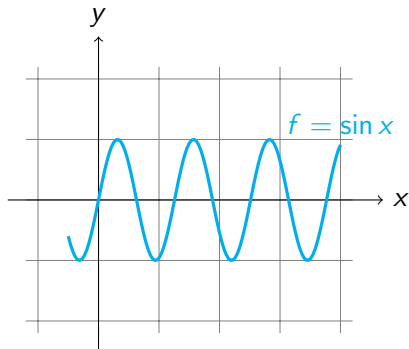
Példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2, \text{ adott } \varepsilon > 0 \text{ értékhez } M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ megfelelő}$$



Példa

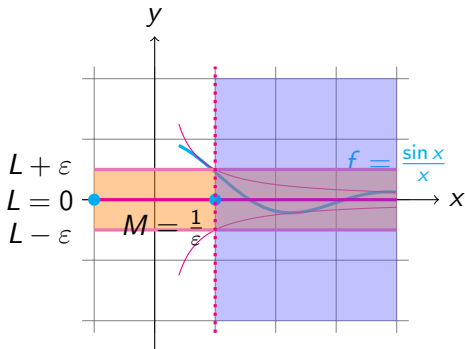
$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ nem létezik, hiszen minden M érték fölött felveszi az 1 és a -1 értékeket is, így bármilyen L értéket is vennénk, már pl. $\varepsilon = 1$ -re sem lenne megfelelő M



Példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \text{ hisz adott } \varepsilon > 0\text{-hoz } M = \frac{1}{\varepsilon} \text{ megfelelő: ha } x > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ akkor}$$

$$\left| \frac{1}{x} \sin x \right| \leq \frac{1}{|x|} < \varepsilon.$$



Definíció (Függvény határértéke véges pontban)

Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van valamely, a c -t tartalmazó nyílt intervallum – esetleg c kivételével – minden pontjában. Azt mondjuk, hogy $f(x)$ tart L -hez, amint x tart c -hez (f határértéke a c helyen L), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L,$$

ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden x esetén, ha $0 < |x - c| < \delta$, akkor $|f(x) - L| < \varepsilon$. Formulával:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Intuitívan: az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek az L számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelítik c -t.

Példa (Az identikus és az abszolút érték függvény határértéke)

- Ha f az **identikus leképezés**, azaz minden x -re $f(x) = x$, akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = c.$$

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő.

- Ha f az **abszolút érték függvény**, azaz minden x -re $f(x) = |x|$, akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} |x| = |c|.$$

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = \varepsilon$ megfelelő.

Például

$$\lim_{x \rightarrow 3} x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -7} |x| = 7.$$

Példa (A konstans függvény határértéke)

- Ha f **konstans függvény**, azaz minden x -re $f(x) = k$ valamely k számra, akkor tetszőleges c esetén

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} k = k.$$

Adott $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = 1$ megfelelő (vagy bármilyen pozitív δ).

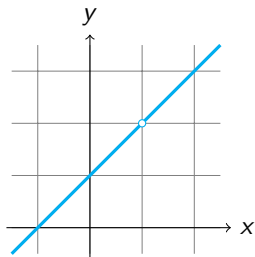
Például

$$\lim_{x \rightarrow -7} (4) = \lim_{x \rightarrow 2} (4) = 4.$$

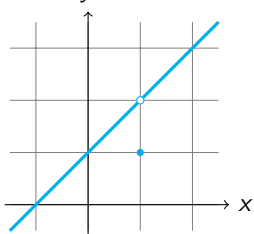
Példa

Vessük össze az alábbi három függvény viselkedését az $x = 1$ pont környezetében.

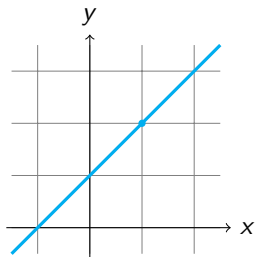
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{ha } x \neq 1 \\ 1 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$



$$h(x) = x + 1$$

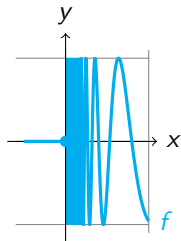
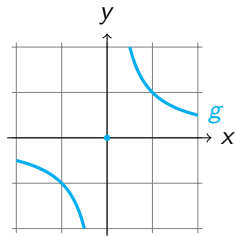
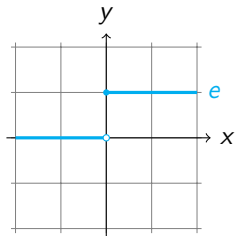


Az $c = 1$ -ben vett határérték mindhárom függvény esetében 1.

Példa (Amikor nem létezik határérték)

Hogyan viselkednek az alábbi függvények, amikor $x \rightarrow 0$?

$$e(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



Definíció (Végtelen határértékek véges helyen)

1. Az f határértéke a c helyen végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty,$$

ha

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az f határértéke a c helyen mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty,$$

ha

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < B]$$

Példa (A definíció alkalmazása)

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy

$$\forall B \exists \delta > 0 \forall x [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > B]$$

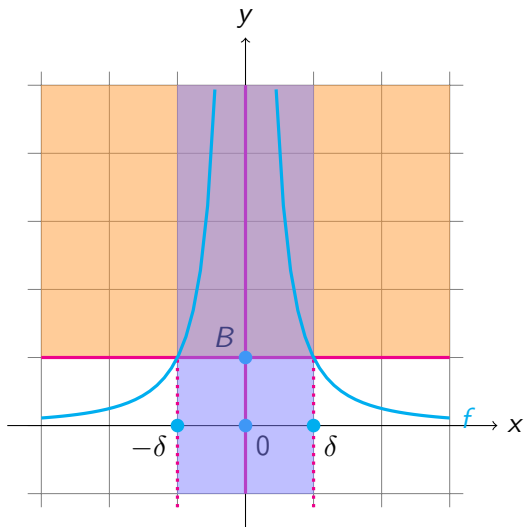
$B > 0$ esetén $\frac{1}{x^2} > B$ pontosan akkor, ha $x^2 < \frac{1}{B}$, azaz ha $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$.

Legyen $\delta \leq 1/\sqrt{B}$, akkor minden x -re

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} \geq B.$$

$B \leq 0$ -ra pedig mindenképpen teljesül az $\frac{1}{x^2} > B$ egyenlőtlenség, tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$



Definíció (Végtelen határértékek a végtelenben)

1. Az f függvény határértéke a végtelenben végtelen (∞), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

ha

$$\forall B \exists M \forall x [x > M \Rightarrow f(x) > B].$$

2. Az f függvény határértéke a végtelenben mínusz végtelen ($-\infty$), szimbolikusan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$$

ha

$$\forall B \exists M \forall x [x > M \Rightarrow f(x) < B].$$

Megjegyzés

A $-\infty$ -beli határértékeket hasonlóan definiáljuk.

Tétel (Határértékek és algebrai műveletek)

Legyenek L , M , k valós számok, és $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = M.$$

Ekkor léteznek az alábbi határértékek és fennállnak a következők:

- (1) **Összeg, különbség:** $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \pm g) = L \pm M$,
- (2) **Szorzat:** $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f \cdot g) = L \cdot M$,
- (3) **Konstanssal való szorzás:** $\lim_{x \rightarrow \alpha} (k \cdot f) = k \cdot L$,
- (4) **Hányados:** $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f}{g} = \frac{L}{M}$ (amennyiben $M \neq 0$),
- (5) **Hatványozás:** $\lim_{x \rightarrow \alpha} f^n = L^n$, $n \in \mathbb{Z}$, feltéve, hogy L^n értelmezve van (működik racionális a kitevőre is, ha L^a értelmezve van).

Bizonyítás (csak (1)-et $\alpha = c \in \mathbb{R}$ -re)

Legyen adva az $\varepsilon > 0$ szám. Meg kell adnunk egy pozitív δ -t, amelyre teljesül, hogy minden x esetén

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon.$$

A tagokat átrendezve és a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Bizonyítás (folytatás)

A megadott ε -hoz létezik olyan $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 0$, hogy minden x -re

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2,$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Ha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor $0 < |x - c| < \delta$ esetén $|f(x) - L| < \varepsilon/2$, és $|g(x) - M| < \varepsilon/2$. Tehát

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt bizonyítja, hogy valóban: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$.

A tételben L és M lehet $\pm\infty$ is, de ilyenkor nem mindig tudjuk csupán a két függvény limeszéből meghatározni az összeg, szorzat, stb. limeszét:

+	$-\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$?
a	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$?	$+\infty$	$+\infty$

β	$-\infty$	$b < 0$	0^-	0^\pm	0^+	$b > 0$	$+\infty$
$\frac{1}{\beta}$	0	$\frac{1}{b}$	$-\infty$	nincs	$+\infty$	$\frac{1}{b}$	0

\cdot	$-\infty$	$b < 0$	0	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$?	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	ab	0	ab	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$a > 0$	$-\infty$	ab	0	ab	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$?	$+\infty$	$+\infty$

0^+ : pozitívan tart 0-hoz
 0^- : negatívan tart 0-hoz

Az “eldönthetetlen” $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ limeszeknél a függvényt próbáljuk meg úgy átalakítani, hogy az új kifejezés limesze már eldönthető legyen.

Példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x + 2 = \infty - \infty + 2 = \infty - \infty = ?, \text{ de}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = \infty \cdot (1 - 0 + 0) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Példa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3} = \frac{\infty}{\infty} = ?, \text{ de}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Definíció

A $P(x)$ függvényt polinomnak nevezzük, ha alkalmas a_0, \dots, a_n valós számokkal $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ alakba írható. Az a_i értékeket a polinom együtthatóinak nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a $P(x)$ polinom foka n .

Tétel (Polinomok határértéke)

Ha $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow c} P = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

Következmény

Ha $P(x)$ és $Q(x)$ polinomfüggvények és $Q(c) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Tétel (Rendőrelv (Szendvicstétel))

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére teljesül, hogy $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, és

$$\lim_{x \rightarrow c} g = \lim_{x \rightarrow c} h = L,$$

akkor fennáll $\lim_{x \rightarrow c} f = L$ is.

Tétel

Ha a c pontot tartalmazó nyílt intervallum (esetleg c kivételével) minden x elemére $f(x) \leq g(x)$, és léteznek a $\lim_{x \rightarrow c} f$ és $\lim_{x \rightarrow c} g$ határértékek, akkor

$$\lim_{x \rightarrow c} f \leq \lim_{x \rightarrow c} g.$$

A fenti két tétel $\pm\infty$ -beli limeszekre és végtelen határértékre is teljesül.

Példa (A rendőrelv alkalmazása)

Mennyi a következő határérték?

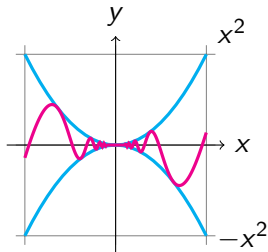
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

Megoldás

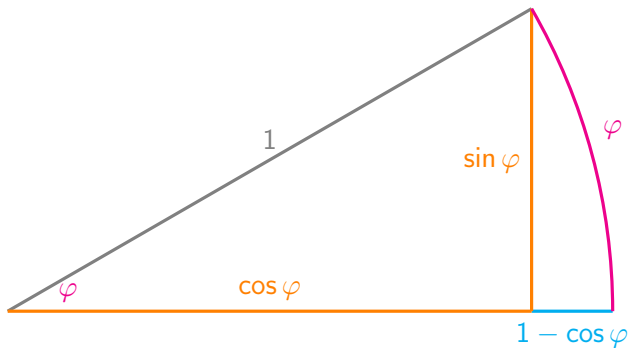
$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ így}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$



Példa (A rendőrelv további alkalmazásai)



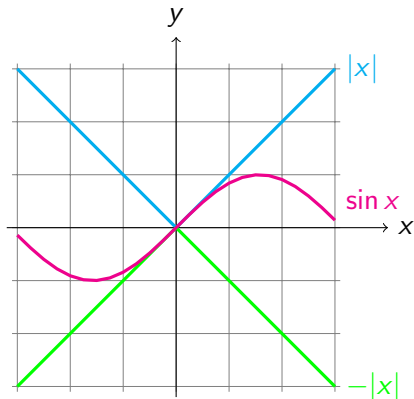
Radiánban írva:

$$|\sin \varphi| \leq |\varphi|$$

$$0 \leq 1 - \cos \varphi \leq |\varphi|$$

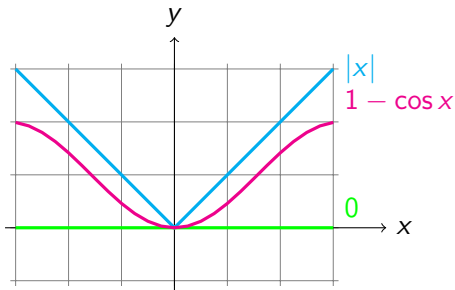
$-|\varphi| \leq \sin \varphi \leq |\varphi|$, és $\lim_{\varphi \rightarrow 0} (-|\varphi|) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (|\varphi|) = 0$, ezért

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = 0.$$



$0 \leq 1 - \cos \varphi \leq |\varphi|$, így

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} (1 - \cos \varphi) = 0, \text{ azaz } \lim_{\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1$$



Definíció (Jobb és bal oldali határérték)

Az f függvény **jobb oldali határértéke** a c helyen az L szám (jelölése:

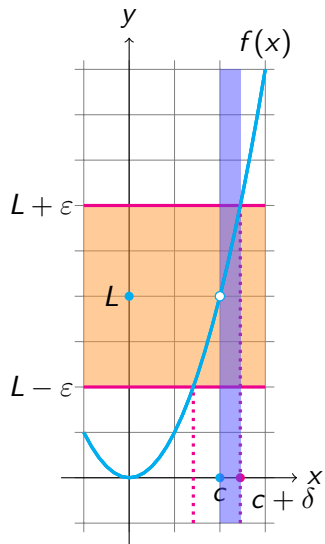
$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = L), \text{ ha}$$

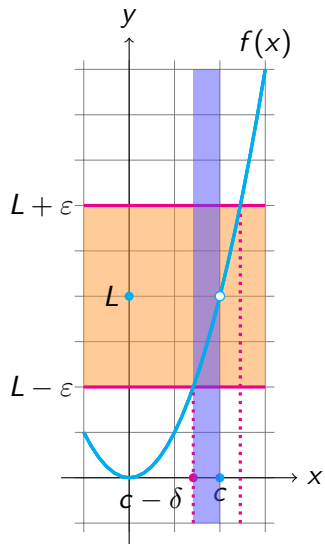
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$

Az f függvény **bal oldali határértéke** a c helyen az L szám (jelölése:

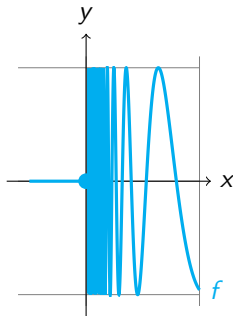
$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = L), \text{ ha}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon].$$





$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{NEM LÉTEZIK}$$

Tétel (Jobb és bal oldali határérték és határérték kapcsolata)

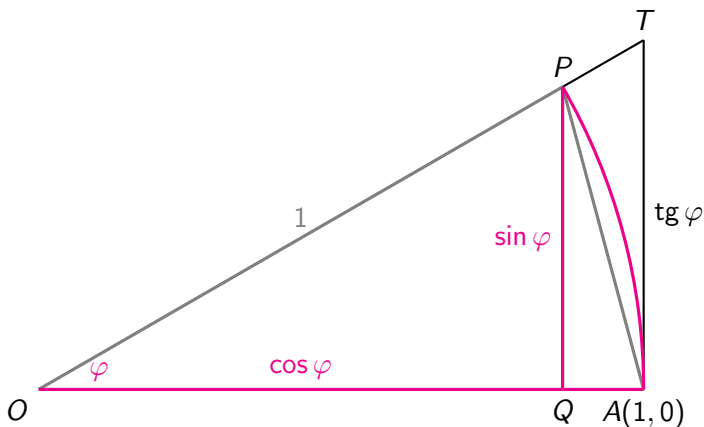
f -nek pontosan akkor létezik a c helyen határértéke, ha ugyanitt létezik mind a jobb, mind a bal oldali határértéke és ezek egyenlők:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L \text{ és } \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L.$$

Tétel (A $\sin(\varphi)/\varphi$ függvény határértéke)

Ha a φ szöveget radiánban adjuk meg, akkor

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1.$$



$OAP \triangle$ területe $<$ OAP körcikk területe $<$ $OAT \triangle$ területe.

Bizonyítás

Belátjuk: a jobb és a bal oldali határérték $1 \rightsquigarrow$ kétoldali határérték is 1.

1. A jobb oldali határérték 1 ($0 < \varphi < \pi/2$):

$OAP \triangle$ területe $<$ OAP körcikk területe $<$ $OAT \triangle$ területe.

A területek:

$$T_{OAP\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi$$

$$T_{OAP \text{ körcikk}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ív hossz} \cdot \text{sugár} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1)^2 \cdot \varphi = \frac{\varphi}{2}$$

$$T_{OAT\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \text{alap} \cdot \text{magasság} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg } \varphi = \frac{1}{2} \text{tg } \varphi$$

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{2} \sin \varphi < \frac{1}{2} \varphi < \frac{1}{2} \text{tg } \varphi$$

$\frac{1}{2} \sin \varphi$ -val osztva ($\sin \varphi > 0$):

$$1 < \frac{\varphi}{\sin \varphi} < \frac{1}{\cos \varphi}$$

A reciprokot véve:

$$1 > \frac{\sin \varphi}{\varphi} > \frac{\cos \varphi}{1}$$

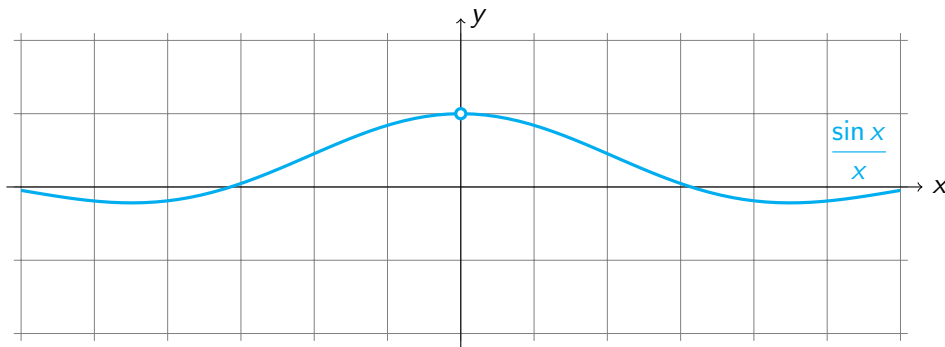
a redőrelv alapján

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$$

2. $\sin \varphi$ és φ páratlan függvények $\rightarrow (\sin \varphi)/\varphi$ páros \rightarrow

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1,$$

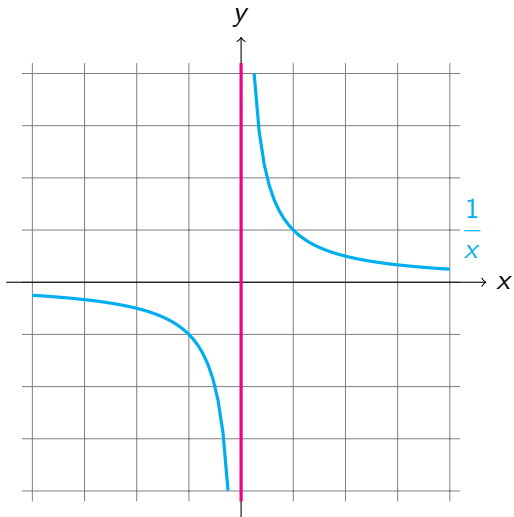
így $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$.

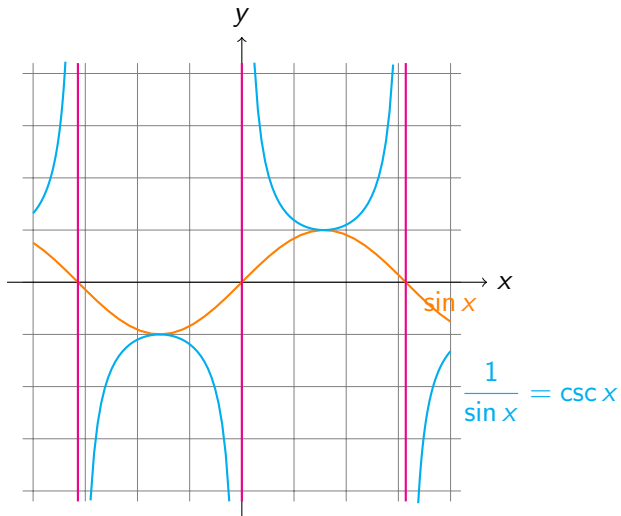


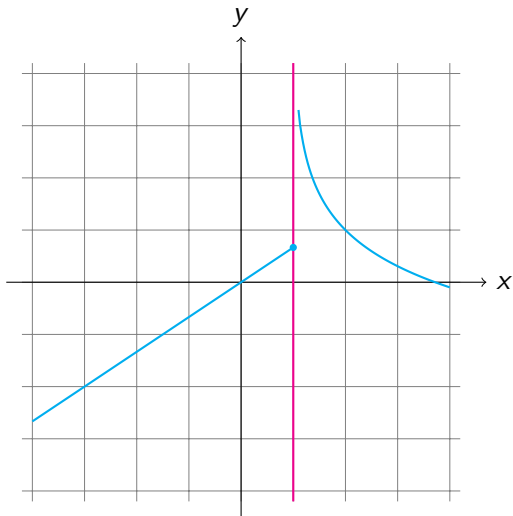
Definíció (Függőleges aszimptota)

Az $x = a$ egyenletű egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonjának függőleges aszimptotája, ha az alábbiak közül legalább egy teljesül:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



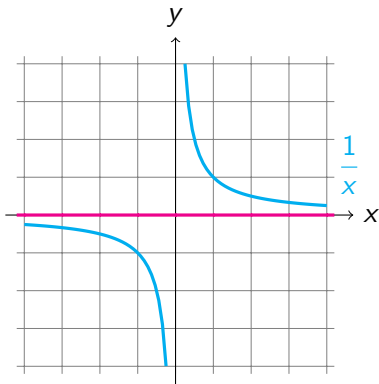


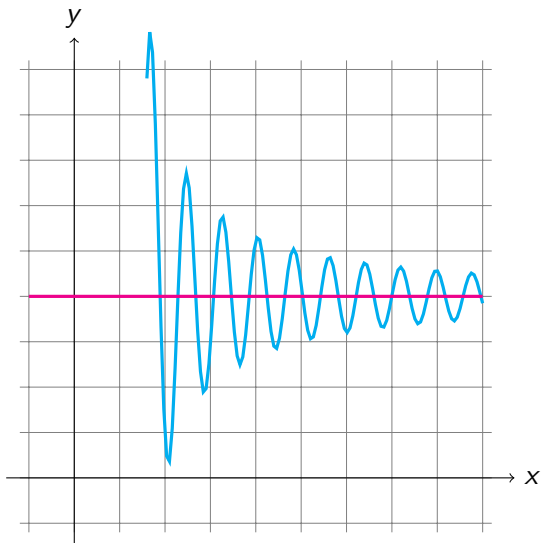


Definíció (Vízszintes aszimptota)

Az $y = b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja vízszintes aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \text{ vagy } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$





Definíció (Ferde aszimptota (tartalmazza a vízszintest is))

Az $y = ax + b$ egyenletű egyenest az $y = f(x)$ függvény grafikonja ferde aszimptotájának nevezzük, ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Megjegyzés

Az a és b meghatározható az

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \text{és a } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

határértékek segítségével, ugyanis $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ miatt

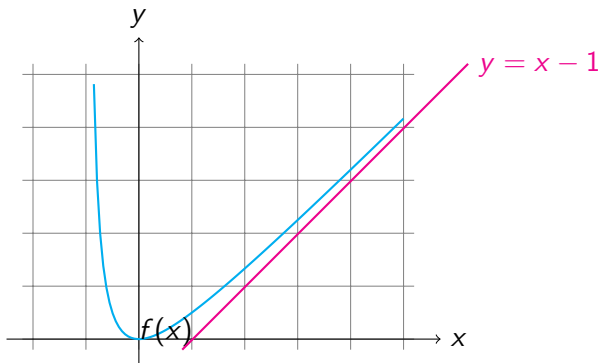
$$\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \rightarrow 0, \quad \text{azaz } \frac{f(x)}{x} \rightarrow a.$$

Példa

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$



Összefoglalás

- Határértékek definíciói példákkal
- Függvények összegének, szorzatának, hányadosának, skalárszorosának, hatványának határértéke
- Rendőrelv
- $\frac{\sin x}{x}$ határértéke
- Aszimptoták