Határozatlan integrál

2015.11.04.

Primitív függvény

Definíció

$F(x)$ az $f(x)$ primitív függvénye a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon, ha $F'(x) = f(x)$ minden $x \in H$ esetén.

Megjegyzés

Ha $F(x)$ primitív függvény, akkor $F(x) + c$ is az tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén.

Korábban már bizonyítottuk:

Állítás

Ha F és G is primitív függvénye f-nek egy nyílt I intervallumon, akkor létezik $c \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + c$ minden $x \in I$ esetén.

Példa

$f(x) = \cos x$-nek $F(x) = \sin x$ primitív függvénye a teljes $\mathbb{R}$-en

Definíció

Az f függvény határozatlan integrálja f primitív függvényeinek összessége.

$$\int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + C,$$

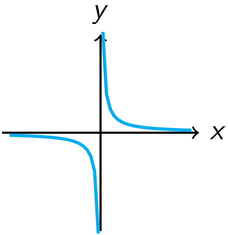
ahol F az f függvény egy primitív függvénye, és $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Megjegyzés

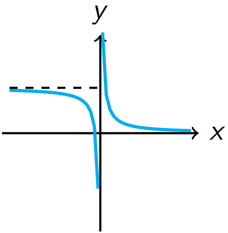
Itt feltesszük, hogy $F'(x) = f(x)$ egy intervallumon, és hogy ott vesszük a többi primitív függvényt is.

Példa

Ha nem egy intervallumon vennénk a primitív függvényeket:
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \implies -\frac{1}{x^2}$-nek primitív függvénye az $\frac{1}{x}$:



de akkor ez is:



Viszont e két függvény különbsége nem konstans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$-on.

Példa

Ha $x > 0$, akkor

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln x + C \text{ a } (0,\infty)\text{-en}$$

Ha $x < 0$, akkor

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(-x) + C \text{ a } (-\infty,0)\text{-n}$$

Összefoglalva azt is szoktuk írni, hogy

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln|x| + C,$$

de egyszerre csak az $x > 0$ vagy az $x < 0$ esetre alkalmazuk.

Alapintegrálok

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$	$a\in\mathbb{R},\ a\neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x<0$ vagy $x>0$
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$x\in\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$x\in\left(k\pi, (k+1)\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}$
e^x	$e^x + C$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$	

Alapintegrálok (folytatás)

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x + C$	
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\operatorname{cth} x + C$	$x < 0$ vagy $x > 0$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arth} x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcth} x + C$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$x \in (-1, 1)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsh} x + C$	
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arch} x + C$	$x \in (1, \infty)$

Az integrálás általános szabályai

Állítás

- $\displaystyle\int f(x) + g(x)\ \mathrm{dx} = \int f(x)\ \mathrm{dx} + \int g(x)\ \mathrm{dx}$
- $\displaystyle\int c \cdot f(x)\ \mathrm{dx} = c \cdot \int f(x)\ \mathrm{dx}$
- $\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{dx} = F(g(x)) + C$, ahol F az f egy primitív függvénye

Bizonyítás

Az összegre és skalárszorosra vontakozó deriválási szabályból, illetve a láncszabályból következik.

Példa

$$\int 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\ \mathrm{dx} = \int 2x^{1/2} + 3x^{-2}\ \mathrm{dx} = 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{x} + C$$

A fordított láncszabály néhány speciális esete

Állítás

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \text{ ha } F'(x)=f(x)$$

Bizonyítás

A láncszabály megfordítása $f(x)$, $g(x) \to ax+b$ szereposztással.

Példa

$$\int e^{2x+3}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}e^{2x+3}+C$$

Állítás

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$$

Bizonyítás

A láncszabály megfordítása $f(x) \to \frac{1}{x}$, $g(x) \to f(x)$ szereposztással.

Példa

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} \,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \mathrm{arctg} x + C$$

Állítás

$$\int f^a(x)f'(x)\ \mathrm{dx} = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + C$$

Bizonyítás

A láncszabály megfordítása $f(x) \to x^a$, $g(x) \to f(x)$ szereposztással.

Példa

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\ \mathrm{dx} = -\int (\cos x)^{-3}(-\sin x)\ \mathrm{dx} = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{\cos^2 x} + C$$

$\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{dx}$ alakú integrálok $(n, m \in \mathbb{N})$

Példa

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{dx} = \int (1-\cos^2 x)\sin x \,\mathrm{dx} = \int \sin x + \cos^2 x(-\sin x) \,\mathrm{dx} = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$-ből:

Állítás (Linearizáló formulák)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Példa

$$\int \cos^2 x \,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin 2x)+C = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

Általánosan

Ha n páratlan $\Longrightarrow n = 2k + 1$:

$$\sin^{2k+1} x \cos^m x = \sin x (\sin^2 x)^k \cos^m x =$$

$$\sin x (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x = p(\cos x) \sin x,$$

ahol p egy megfelelő polinom. Ha P a p egy primitív függvénye, akkor

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x = -\int p(\cos x)(-\sin x) \, \mathrm{d}x = -P(\cos x) + C$$

Ha m páratlan, akkor hasonlóan lehet eljárni.
Ha m és n is páros, akkor a $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ és $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ linearizáló formulákat lehet alkalmazni. Ezeket behelyettesítve kisebb hatványokat tartalmazó kifejezést kapunk.

Helyettesítéses integrál

Az $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{dx} = F(g(x)) + C$ szabály felírható

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{dx} \overset{g(x)=u}{=} \int f(u)du$$

alakban is, mert $\int f(u)du = F(u) + C$. Formálisan a

$$g(x) = u, \quad g'(x)\,\mathrm{dx} = du$$

helyettesítést hajtjuk végre.

Akkor érdemes alkalmazni, ha f primitív függvényének kiszámítása nem megy egy lépésben.

Példa

$$\int \frac{e^{3x}}{2+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{(e^x)^3}{2+(e^x)^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{(e^x)^2}{2+(e^x)^2}e^x\,\mathrm{dx} \overset{e^x=u}{=}$$

$$\int \frac{u^2}{2+u^2}du = \int 1-\frac{2}{2+u^2}du = \int 1-\frac{1}{1+(\frac{1}{\sqrt{2}}u)^2}du =$$

$$u-\frac{\mathrm{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}}{1/\sqrt{2}}+C \overset{u=e^x}{=} e^x-\sqrt{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{2}}+C$$

A szorzatszabály megfordítása - parciális integrálás

Állítás

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{dx} = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{dx}, \text{ vagy másképpen}$$

$$\int f(x)g(x)\ \mathrm{dx} = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\ \mathrm{dx}, \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

Szorzat integrálja helyett egy másik szorzat integrálját kell kiszámítani.

Bizonyítás

A szorzatra vonatkozó deriválási szabály:

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ebből: $\int f'(x)g(x)\ \mathrm{dx} + \int f(x)g'(x)\ \mathrm{dx} = f(x)g(x) + C$

$$\Longrightarrow \int f'(x)g(x)\ \mathrm{dx} = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{dx}$$

Akkor célszerű használni az $f(x)g(x)$ szorzat integrálására, ha

- $g'(x)$ lényegesen egyszerűbb mint $g(x)$
- $F(x)$ nem sokkal bonyolultabb $f(x)$-nél

Függvénytípusok	derivált	primitív függvény
x^n	kicsit egyszerűbb (főleg ha $n = 1$)	kicsit bonyolultabb
$\frac{1}{x^n}$	kicsit bonyolultabb	kicsit egyszerűbb (kivéve $n = 1$)
e^x $\sin x, \cos x$ $\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x$	ugyanolyan	ugyanolyan
$\ln x$ arc függvények area függvények	egyszerűbb	bonyolultabb

Példa

- $\int xe^{2x}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$
- $\int \frac{1}{x^3}\ln x\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}\ln x - \int \frac{1}{-2x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\ln x + \int \frac{1}{2}x^{-3}\,dx = -\frac{1}{2x^2}\ln x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4x^2} + C$
- $\int \mathrm{arctg}x\,dx = \int 1\cdot\mathrm{arctg}x\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
- Hasonlóan számítjuk ki a többi arc, area és az ln fv. integrálját.

Példa

Néha többszöri alkalmazás szükséges:

- $\displaystyle\int (x^2 - x)\cos x \; dx = (x^2 - x)\sin x - \int (2x - 1)\sin x \; dx =$
  $\displaystyle(x^2 - x)\sin x - (2x - 1)(-\cos x) + \int 2(-\cos x) \; dx =$
  $(x^2 - x)\sin x + (2x - 1)\cos x - 2\sin x + C$
- $\displaystyle\int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \; dx =$
  $\displaystyle e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x) \; dx$
  $\displaystyle\int e^x \sin x \; dx = I \implies I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$
  $\displaystyle I = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$

Összefoglalás

- Primitív függvény és határozatlan integrál fogalma
- Alapintegrálok és integrálási szabályok
- A láncszabály megfordításának speciális formái
- Helyettesítéses integrálás
- Parciális integrálás