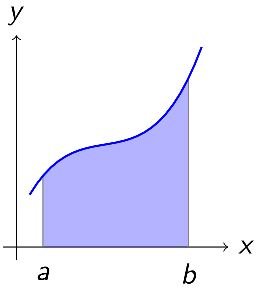
Határozott integrál

2015.11.09. és 2015.11.11.

A határozott integrál fogalma

Példa

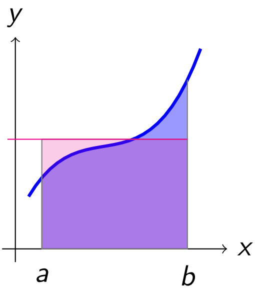
Függvénygörbe alatti terület kiszámítása: $f \geq 0$ az $[a, b]$ intervallum fölött. Ha $f(x) = c$ konstans: $\Longrightarrow T = (b - a)c$ (téglalap területe). Ha f nem konstans: közelítés téglalapokkal.

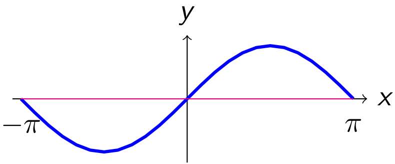


A téglalapok magassága egy-egy részintervallumbeli függvényérték.

Példa

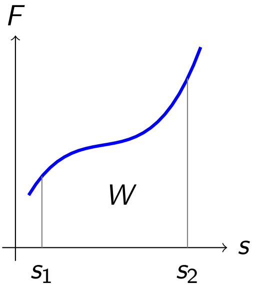
Függvényértékek átlaga: ($f \geq 0$-ra) annak a téglalapnak a magassága, amelynek alapja az $[a, b]$ intervallum, és területe az f függvény alatti terület.
Ha $f \not\geq 0$: az x tengely alatti részek területét negatívan vesszük.
Pl. a $\sin x$ fv. átlaga $[-\pi, \pi]$-n 0.





Példa

Egyenes útvonalon F erő által mozgatott tömegponton az F erő által végzett munka: $W = F \cdot \Delta s$, ha F állandó.
Ha az erő változó:



Legyen $f(x)$ az $[a, b]$-n korlátos, legfeljebb véges sok helyen nem értelmezett függvény.

Definíció

Ha $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, akkor $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$-t az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük.
A P felosztás finomsága:

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}).$$

$\mathbf{c} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ egy P-hez tartozó reprezentánsrendszer, ha $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
A P felosztáshoz és $\mathbf{c}$ reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összeg:

$$I_{P,\mathbf{c}} = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum f(c_k)\Delta x_k$$

.

Definíció

Legyen f az $[a, b]$ intervallumon korlátos, legfeljebb véges sok pontban nem értelmezett függvény.
f **integrálható** $[a, b]$-n, ha van olyan $I \in \mathbb{R}$, amelyre minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb P felosztásra és annak tetszőleges $\mathbf{c}$ reprezentánsrendszeréhez tartozó $I_{P,\mathbf{c}}$ integrálközelítő összegre

$$|I_{P,\mathbf{c}} - I| < \varepsilon.$$

Ez az I érték az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett **integrálja**, és jele: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$. Formulával:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = I \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall P, \mathbf{c}\ \Big(\, \|P\| < \delta \Longrightarrow |I_{P,\mathbf{c}} - I| < \varepsilon \Big)$$

Példa

Az $f(x) = c$ konstans függvény minden $[a, b]$ intervallumon integrálható, és $\int_a^b c \; \mathrm{dx} = c(b - a)$, ugyanis tetszőleges felosztásra és **c** reprezentáns rendszerre az integrálközelítő összeg

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = c(x_n - x_0) = c(b - a).$$

Példa

A Dirichlet-fv. (racionálisakon 1, máshol 0) nem integrálható a $[0, 1]$ intervallumon, ugyanis bármely P felosztás minden részintervallumában felvesz 0 és 1 értéket is, tehát a felosztáshoz tartozik

$$\sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0, \text{ és } \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

közelítő összeg is. Így nincs olyan I, amihez az elég finom felosztások integrálközelítő összegei mind közelebb esnének $\varepsilon = \frac{1}{2}$-nél.

Tétel

Ha az f függvény korlátos, és legfeljebb véges sok pont kivételével folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f integrálható az $[a, b]$-n.

Példa

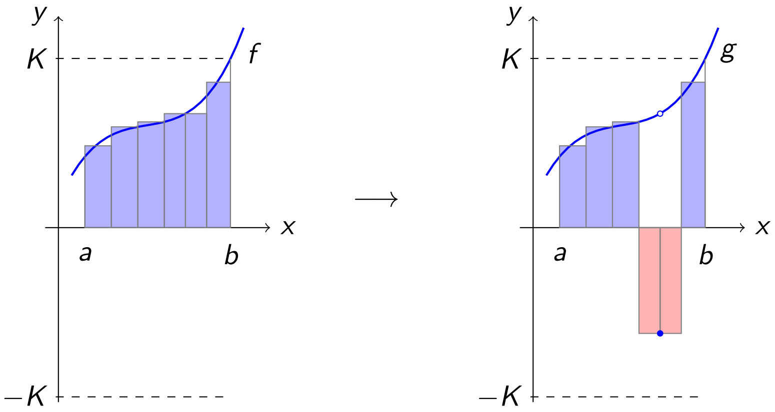
Számítsuk ki az e^x függvény integrálközelítő összegeit a $[0, 1]$ intervallumon, ha $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}$ és $\mathbf{c} = (0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n})$!

$$I_{P,\mathbf{c}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{1/n})^k = \frac{1}{n} \cdot \frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{(1/n)} - 1} = \frac{1/n}{e^{1/n} - 1} \cdot (e - 1).$$

Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^x} = 1$, így a tétel szerint létező $\displaystyle\int_0^1 e^x \, \mathrm{dx}$ integrál értéke csak $e - 1$ lehet.

Tétel

Ha egy integrálható függvényt véges sok helyen megváltoztatunk, az továbbra is integrálható marad, és az integrálja nem változik.



Bizonyítás

Elég az állítást arra az esetre belátni, amikor 1 pontban változtatunk. Legyen f az eredeti függvény, g az a függvény amit egy c-beli érték megváltoztatásával kapunk, és $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
f integrálható $\Longrightarrow$ f korlátos $\Longrightarrow$ g is korlátos $\Longrightarrow$
$\exists K$ közös korlát: $|f(x)| \le K$, $|g(x)| \le K$ az $[a, b]$-n.

Rögzítsünk egy δ-nál finomabb felosztást, és ahhoz egy reprezentáns rendszert, és legyen I_1, I_2 az f, illetve g megfelelő integrál közelítő összege.

Ekkor $f(c)$, illetve $g(c)$ legfeljebb két tagban szerepel, és
$|g(c) - f(c)| \le 2K \Longrightarrow |I_2 - I_1| < 4K\delta$.

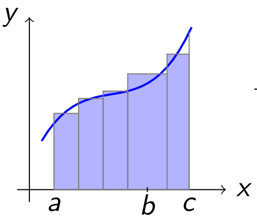
Ha δ-t úgy választjuk, hogy $|I_1 - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $4K\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen, akkor

$$|I_2 - I| = |(I_2 - I_1) + (I_1 - I)| \le |I_2 - I_1| + |I_1 - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

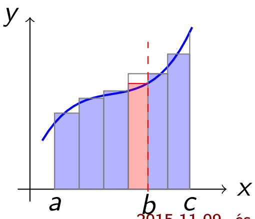
Műveleti tulajdonságok

Tétel

1. $$\int_a^b kf(x)\ \mathrm{dx} = k \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$
2. $$\int_a^b f(x) \pm g(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \pm \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$$
3. Ha f integrálható $[a, b]$-n és $[b, c]$-n, akkor $[a, c]$-n is, és
$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\ \mathrm{dx} \quad \text{(additivitás)}$$



$\longrightarrow$



Definíció

$\int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$ tetszőleges a-ra és a-ban értelmezett f-re.
$\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$, ha $a < b$, és f integrálható $[a, b]$-n.

Megjegyzés

Az előbbi definíciókkal az integrál additivitása

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx}$$

az a, b, c számok bármely sorrendjére, és egybeeső értékekre is teljesül, pl. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} + \int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = 0 = \int_a^a f(x)\,\mathrm{dx}$.

Integrálegyenlőtlenségek

Tétel

1. Ha $m \leq f(x) \leq M$ az $[a, b]$-n, akkor
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq M(b-a)$$
2. Ha $f(x) \leq g(x)$ az $[a, b]$-n, akkor
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}\,.$$
3. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}.$

Bizonyítás

2. Tfh. $f(x) \le g(x)$ az $[a, b]$-n. Ha nem igaz az állítás, vagyis

$$I_1 = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} > \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx} = I_2,$$

akkor $\varepsilon = (I_1 - I_2)/2$-re válasszunk közös δ-t I_1-hez és I_2-höz.
Ha veszünk egy δ-nál finomabb P felosztást, és $I_{P,\mathbf{c}}(f)$, illetve $I_{P,\mathbf{c}}(g)$ a két függvény közös reprezentáns rendszeréhez tartozó integrálközelítő összege, akkor

$$I_{P,\mathbf{c}}(f) > I_1 - \varepsilon = I_2 + \varepsilon > I_{P,\mathbf{c}}(g),$$

holott $f \le g \Longrightarrow I_{P,\mathbf{c}}(f) \le I_{P,\mathbf{c}}(f)$. ↯

1. Alkalmazzuk a 2. állítást az m, $f(x)$ és M függvényekre.
3. Alkalmazzuk a 2. állítást a $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ függvényekre.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{dx} \le \frac{3}{2}.$$

$\cos x \le 1 \Longrightarrow \sqrt{1+\cos x} \le \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, így az 1. egyenlőtlenség szerint

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{dx} \le \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}.$$

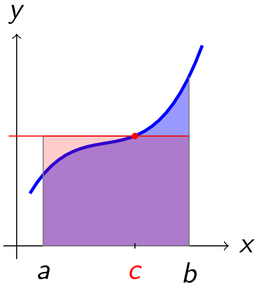
Integrál-középértéktétel

Tétel

Ha f folytonos $[a, b]$-n $\Longrightarrow \exists c \in [a, b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = f(c),$$

azaz f átlaga előáll függvényértékként.



Bizonyítás

f folytonos $\Longrightarrow$ a Weierstrass-tétel szerint felveszi minimumát (m) és maximumát (M) az $[a, b]$-n.
Az 1. integrálegyenlőtlenség miatt:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \leq M.$$

m és M is függvényértékek $[a, b]$-n $\Longrightarrow$ a Bolzano–Darboux-tétel szerint f közöttük minden értéket fölvesz, így az $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ értéket is.

Változó határú integrál

Tétel

Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és definiáljuk az $I(x)$ integrálfüggvényt $[a, b]$-n:

$$I(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

$I(x)$ értelmezve van, folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n és

$$I'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Bizonyítás

f folytonos $[a, b]$-n $\Longrightarrow \int_a^x f(x)\,\mathrm{dx}$ értelmezve van $\forall x \in [a, b]$-re.
Diffhatóság: tetszőleges $c, c+h \in (a, b)$-re

$$\frac{I(c+h) - I(c)}{h} = \frac{\int_a^{c+h} f(x)\,\mathrm{dx} - \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx}}{h} = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,\mathrm{dx} = f(x_h)$$

valamely c és $c+h$ közötti x_h számra az integrál-középértéktétel miatt.
$\lim\limits_{h\to 0} x_h = c \Longrightarrow$ az f folytonossága miatt $\lim\limits_{h\to 0} f(x_h) = f(c)$. Így

$$I'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(x)\,\mathrm{dx} = f(c).$$

Mivel I diffható (a, b)-n, ott folytonos is.

Bizonyítás (folytatás)

A végpontokban is teljesül az egyoldali folytonosság:
Legyen $h > 0$, $a + h \leq b$.

$$I(a+h) - I(a) = \int_a^{a+h} f(x) \, \mathrm{dx} - \int_a^a f(x) \, \mathrm{dx} = \int_a^{a+h} f(x) \, \mathrm{dx}$$

A Weierstrass-tétel miatt $\exists$ $m = \min f$ és $M = \max f$ az $[a, b]$-n, és az 1. integrálegyenlőtlenségből

$$mh \leq \int_a^{a+h} f(x) \, \mathrm{dx} \leq Mh$$

A rendőrelv miatt ebből $\lim\limits_{h \to 0} I(a+h) - I(a) = 0$ következik.
A b-beli bal oldali folytonosság hasonlóan bizonyítható.

Newton–Leibniz-tétel

Tétel

Ha f és F folytonosak $[a, b]$-n, és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a, b)$-re, akkor

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás

Az előző tétel szerint az $I(x)$ integrálfv. kielégíti a tétel feltételeit, és arra $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} - \int_a^a f(x)\ \mathrm{dx} = I(b) - I(a)$ is teljesül.
Mindkét függvény primitív függvénye f-nek (a, b)-n, ezért $\exists c \in \mathbb{R}$:
$I(x) - F(x) = c$ az (a, b) intervallumon, és a folytonosság miatt az $[a, b]$-n is. Így $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = I(b) - I(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$.

Jelölés

$$F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Példa

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\ \mathrm{dx} = \int_0^1 \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\ \mathrm{dx} = \int_0^1 \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\ \mathrm{dx} =$$

$$\left[\sqrt{2}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\sin\frac{1}{2} \approx 1,356$$

Hasonlítsuk össze a korábbi becsléssel!

Példa

$$\int_0^3 \left|\frac{x-2}{x+1}\right|\ \mathrm{dx} = \int_0^2 -\frac{x-2}{x+1}\ \mathrm{dx} + \int_2^3 \frac{x-2}{x+1}\ \mathrm{dx} =$$

$$\int_0^2 \frac{3}{x+1} - 1\ \mathrm{dx} + \int_2^3 1 - \frac{3}{x+1}\ \mathrm{dx} = \Big[3\ln(x+1) - x\Big]_0^2 + \Big[x - 3\ln(x+1)\Big]_2^3 =$$

$$3\ln 3 - 2 + 3 - 3\ln 4 - 2 + 3\ln 3 = 6\ln 3 - 3\ln 4 - 1$$

Helyettesítéses integrálás határozott integrálra

Az $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{dx} = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$ integrált kiszámíthatjuk helyettesítéssel:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{dx} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Példa

$$\int_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\,\mathrm{dx} = \int_1^4 2\cdot\frac{x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$$

Ezt az $u=\sqrt{x}$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$ helyettesítéssel átírva:

$$\int_1^2 2\frac{u^3+u^2}{u+2}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 2u^2 - 2u + 4 - \frac{8}{u+2}\,\mathrm{d}u =$$

$$\left[\frac{2}{3}u^3 - u^2 + 4u - 8\ln(u+2)\right]_1^2 = \frac{17}{3} - 8\ln\frac{4}{3}.$$

Összefoglalás

- Közelítő összegek, a határozott integrál definíciója, integrálhatóság
- Műveleti tulajdonságok
- Integrálegyenlőtlenségek
- Integrál-középértéktétel
- Változó határú integrál, a Newton–Leibniz-tétel
- Helyettesítéses integrálás határozott integrálra