Improprius integrál és a határozott integrál alkalmazásai

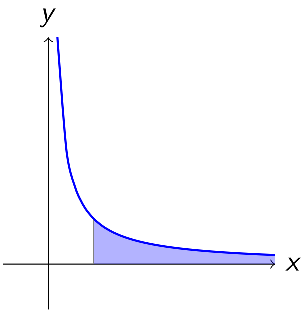
2015.11.25. és 2015.11.30.

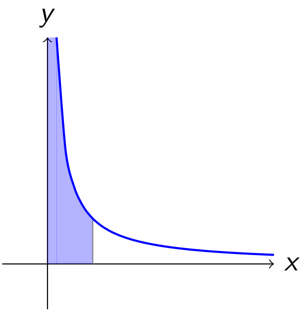
Improprius integrálok

Eddig határozott integrálásnál megköveteltünk két dolgot:

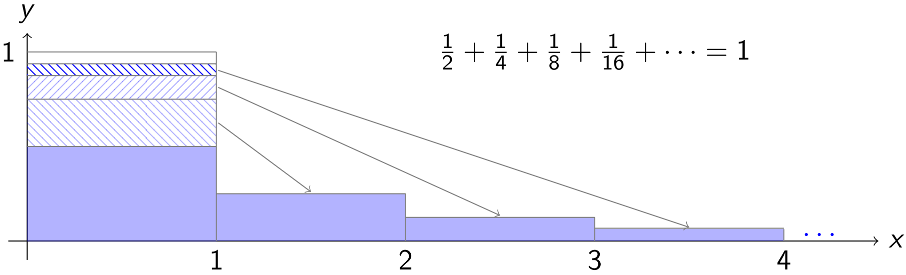
- az integrálási tartomány egy véges intervallum legyen,
- az integrálandó függvény legyen korlátos az integrálási tartományon.

A függvény alatti terület ettől eltérő esetekben is lehet jól definiált:





Sőt, végtelen kiterjedésű tartomány területe is lehet véges.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1$$

Integrálás végtelen intervallumon

Definíció

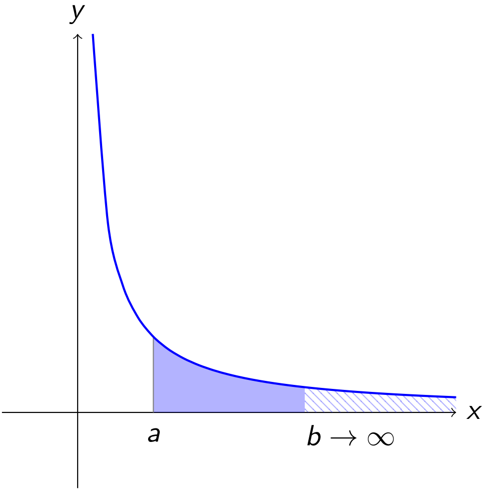
Ha $f(x)$ folytonos az $[a, \infty)$ (ill. $(-\infty, a]$) intervallumon, akkor

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{ill. } \int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Ha $f(x)$ folytonos $\mathbb{R}$-en, és c tetszőleges valós szám, akkor

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha bármelyik esetben a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens, és a határérték az integrál értéke.



y
x
a
$b \to \infty$

Példa

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \ln x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln b)^2}{2} = \infty,$$

vagyis ez az improprius integrál nem konvergens.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \ln x \cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x \implies \text{parciálisan integrálva:}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left\{ \left[\ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b - \int_1^b \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{-1}}{-1}\,\mathrm{d}x \right\} =$$

$$\lim_{b\to\infty} \left\{ -\frac{\ln b}{b} + \int_1^b x^{-2}\,\mathrm{d}x \right\} = \lim_{b\to\infty} \left\{ -\frac{\ln b}{b} + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b \right\} =$$

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 = 1, \text{ vagyis ez az integrál konvergens.}$$

Az $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál

Ha $p=1$, akkor:

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$, vagyis ekkor az integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:

$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$.

Ha $p<1$, akkor a fenti határérték ∞, így az integrál nem konvergens.

Ha $p>1$, akkor a fenti határérék $-\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{p-1}$.

Függőleges aszimptotájú függvény integrálása

Definíció

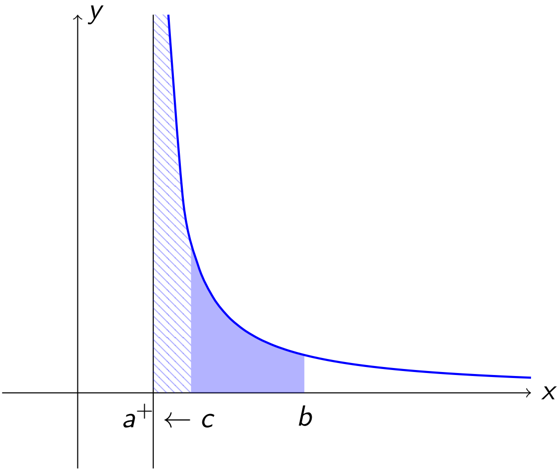
Ha $f(x)$ folytonos az $[a,b)$ (ill. $(a,b]$) intervallumon, de $x \to b^-$ (ill. $x \to a^+$) esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(\text{ill. } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Ha $f(x)$ folytonos $[a,s) \cup (s,b]$-n, de $x \to s$ esetén nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^s f(x)\,\mathrm{d}x + \int_s^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ha bármelyik esetben a határérték létezik és véges, azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens, és a határérték az integrál értéke.


y
x
a^+
$\leftarrow c$
b

Az $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:

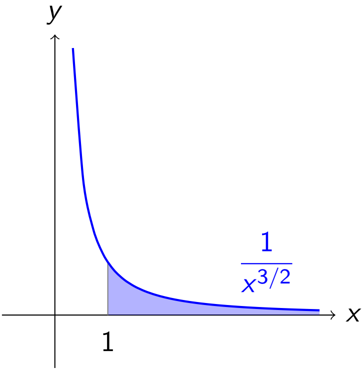
$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} \int\limits_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} [\ln x]_c^1 = \lim\limits_{c\to 0^+} -\ln c = \infty,$ vagyis ekkor az integrál nem konvergens.

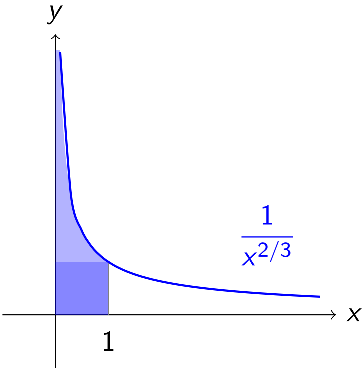
Ha $p \neq 1$, akkor:

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} \int\limits_c^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_c^1 = \lim\limits_{c\to 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{(1-p)}.$

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték ∞, így az integrál nem konvergens.

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérék $\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{1-p}$.


y
x
1
1/x^{3/2}


y
x
1
1/x^{2/3}

Összehasonlító konvergencia kritériumok

Állítás

Legyenek f és g az $[a,\infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre minden $x \geq a$ esetén $0 \leq f(x) \leq g(x)$ teljesül. Ekkor:

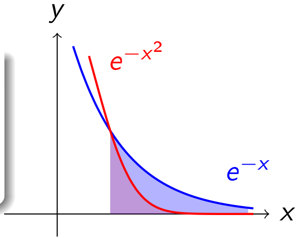
1. ha $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens (majoráns kritérium);
2. ha $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ nem konvergens, akkor $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ sem konvergens (minoráns kritérium).

Megjegyzés

Az állítás a többi típusú improprius integrál esetén is igaz.

Példa

Konvergens-e az $\int\limits_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ integrál?



Megoldás

A definíció szerint $\int\limits_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, viszont a jobb oldali határértéken belül szereplő határozott integrált nem tudjuk közvetlenül kiszámolni. Ugyanakkor mivel $x \geq 1$-re $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$, és

$$\int\limits_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e} - e^{-b} = \frac{1}{e},$$

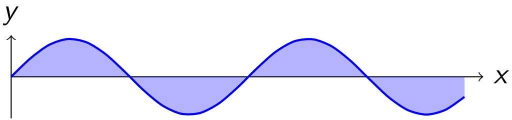
a majoráns kritérium miatt az eredeti integrál is kovergens.

Állítás (Általános majoráns kritérium)

Legyenek f és g az $[a, \infty)$ intervallumon folytonos függvények, melyekre minden $x \geq a$ esetén $|f(x)| \leq g(x)$ teljesül. Ekkor ha $\int\limits_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ is konvergens.

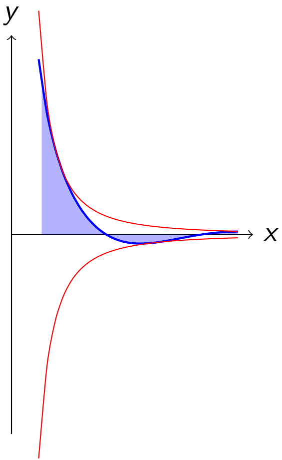
Példa

$\int_0^\infty \sin x \, \mathrm{d}x$ divergens, bár az integrálfüggvény $I(b) = \int_0^b \sin x \, \mathrm{d}x$ korlátos: $I(b)$ értéke 0 és $\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = 2$ között változik, de mindkettőt felveszi akármilyen nagy b-re is.



Példa

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergens, mert $\displaystyle\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$, és $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergens.



Példa

Bizonyítsuk be, hogy az $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ konvergens.

Megoldás

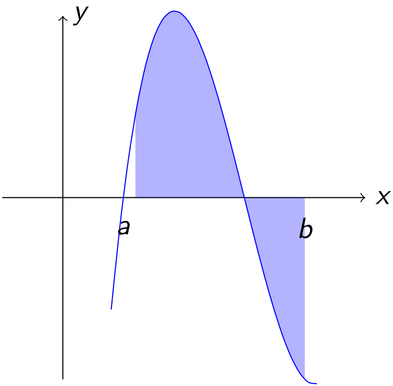
A fv. a 0-nál nem korlátos, ezért két improprius integrál összegére bontjuk:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq x^{-3/2}$, és $\int_1^\infty x^{-3/2}\,\mathrm{d}x$ konvergens, így $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ is az.
$[0,1]$-en $x^{-3/2}$ integrálja nem konvergens, ezért nem érdemes azzal majorálni. Viszont tudjuk: $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, ezért $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ a $(0,1]$-en, továbbá $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergens, tehát $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ is konvergens.

Területszámítás

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvény.
Az x tengely és $f(x)$ grafikonjának $[a, b]$ intervallumhoz tartozó része által közrezárt terület $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$.

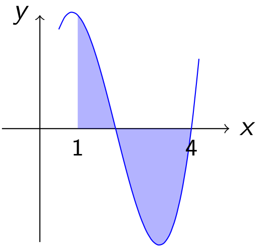


Példa

Számítsuk ki az $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ függvény grafikonja és az x-tengely által közbezárt területet az [1,4] intervallumon!
Az $f(x)$ folytonos fv. csak ott válthat előjelet, ahol 0:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$$

$\Longrightarrow$ f zérushelyei $0, 2, 4$. Így a terület $T = \int_1^4 |f(x)|\,\mathrm{d}x =$



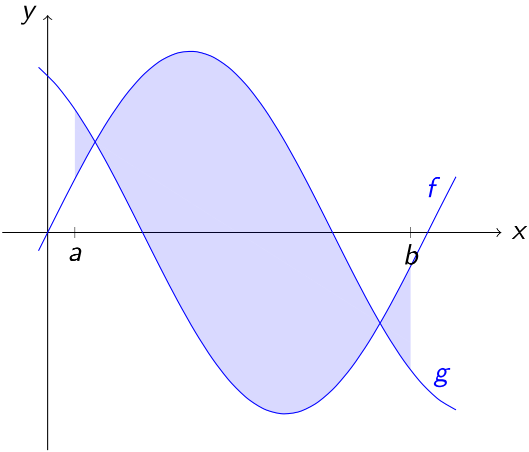
$$= |\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x| + |\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x| =$$

$$= \left|\int_1^2 x^3 - 6x^2 + 8x\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_2^4 x^3 - 6x^2 + 8x\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4\right| =$$

$$= \left|4 - \frac{9}{4}\right| + |0 - 4| = \frac{23}{4}$$

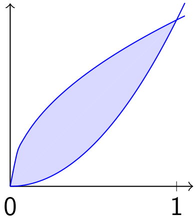
Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények. Cél: $f(x)$ és $g(x)$ grafikonja által közbezárt terület meghatározása az $[a, b]$ intervallumon.



Vegyük észre, hogy ez a terület nem más, mint a $h(x) = f(x) - g(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely által közbezárt terület az $[a, b]$ intervallumon.

Példa

Számítsuk ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvény által közbezárt korlátos síkrész területét!
A két grafikon $x = 0$-ban és $x = 1$-ben metszi egymást, így a szóban forgó terület nem más, mint a $h(x) = x^2 - \sqrt{x}$ függvény és az x-tengely által közbezárt terület a $[0, 1]$ intervallumon. Mivel ezen az intervallumon nincs több metszéspont (vagyis $h(x)$-nek nincs gyöke), ez a terület:



$$T = \left| \int_0^1 x^2 - \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 \right| =$$
$$= \left| \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3/2} \right) - 0 \right| = \frac{1}{3}$$

Függvény grafikonjának ívhossza

Állítás

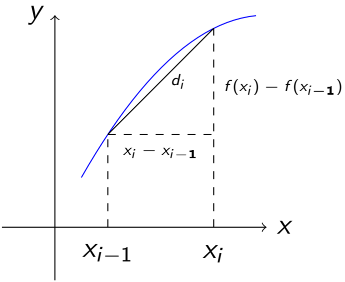
Legyen f olyan valós függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, és a deriváltja folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f grafikonjának ívhossza az $[a, b]$ intervallumon

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Bizonyítás (vázlat)

Vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $P : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ felosztását. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon (i=1,. . . ,n) a grafikon ívhosszát közelítsük a két végpontot összekötő szakasz hosszával.

Bizonyítás (vázlat - folytatás)



$$d_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$
$$(x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

Lagrange-féle középértéktétel: $\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$d_i = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}$$

A teljes ívhossz közelítése így:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(c_i))^2},$$

ami épp a szóban forgó integrál integrálközelítő összege.

Forgástest térfogata

Állítás

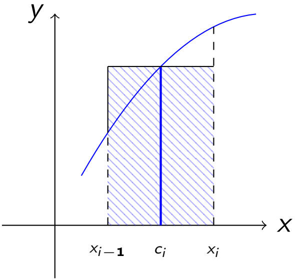
Legyen f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény. Ekkor az f függvény grafikonja $[a, b]$-hez tartozó darabjának az x-tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás (vázlat)

Vegyük az $[a, b]$ intervallum egy $P : x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ felosztását és egy ehhez tartozó $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ reprezentáns rendszert. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon (i=1,. . . ,n) a forgástest megfelelő szeletének térfogatát közelítsük annak a hengernek a térfogatával, melynek magassága $x_i - x_{i-1}$ és alapkörének sugara $f(c_i)$.

Bizonyítás (vázlat - folytatás)



$$V_i = \pi f^2(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

A teljes térfogat közelítése így:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

ami épp a szóban forgó integrál integrálközelítő összege.

Forgástest felszíne

Bizonyítás nélkül:

Állítás

Legyen f olyan valós függvény, mely differenciálható az $[a, b]$ intervallum minden pontjában, és a deriváltja folytonos $[a, b]$-n. Ekkor az f függvény grafikonja $[a, b]$-hez tartozó darabjának az x-tengely körüli megforgatásával kapott test palástjának a felszíne

$$F = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Példa

Számítsuk ki az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[0, 1]$ intervallumon, és ugyanezen intervallumhoz tartozó darabjának megforgatásával kapott forgástest térfogatát és felszínét!

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = [\operatorname{sh} x]_0^1 = \operatorname{sh} 1$$

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \pi(\operatorname{ch} x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \pi\frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + \pi\frac{\operatorname{sh} 2}{4}$$

$$F = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\pi \operatorname{ch} x\sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 2\pi(\operatorname{ch} x)^2\,\mathrm{d}x = \pi + \pi\frac{\operatorname{sh} 2}{2}$$