

Integrálási technikák

2015.11.18. és 2015.11.23.

- 1 Racionális törtfüggvények integrálása
 - Polinom + valódi törtfüggvény
 - Nevező faktorizálása
 - Parciális törtekre bontás
 - Elemi törtfüggvények integrálja
- 2 Fordított helyettesítés
- 3 Speciális helyettesítések
 - $R(e^x)$
 - $R(\sqrt[n]{x})$
 - $R(\cos x, \sin x)$
 - $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Racionális törtfüggvények integrálása

- Polinom + valódi törtfüggvény alakra hozás.
- A nevező felbontása első és másodfokú tényezők szorzatára.
- Parciális törtekre bontás.
- A parciális törtek integrálása.

1. Polinom + valódi törtfüggvény

Definíció

Ha $f(x)$ és $g(x)$ két valós polinom és $\deg f < \deg g$, akkor $\frac{f(x)}{g(x)}$ -et valódi törtfüggvénynek nevezzük.

Ha $\deg f \geq \deg g$, akkor f -et eloszthatjuk maradékosan g -vel:

$$f(x) = g(x)h(x) + m(x), \quad \text{ahol } \deg m < \deg g,$$

és így

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{m(x)}{g(x)},$$

ahol $\frac{m(x)}{g(x)}$ már valódi törtfüggvény (vagy 0).

Példa

$$\frac{x^3 - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} \text{ valódi,} \quad \frac{x^4 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} \text{ nem valódi.}$$

$$\begin{array}{r}
 (x^4 - 2x + 1) : (x^2 + x + 1) = x^2 - x \\
 - \begin{array}{r}
 (x^4) \\
 \hline
 -x^3 - 2x + 1 \\
 - \begin{array}{r}
 (-x^3 - x) \\
 \hline
 -x + 1
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Így

$$\frac{x^4 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = x^2 - x + \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1}$$

polinom
valódi törtfv.

2. Nevező faktorizálása

Tétel

Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható első és másodfokú valós polinomok szorzatára.

Bizonyítás

Legyen $f(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ ($c_i \in \mathbb{R} \forall i$) valós polinom. Az algebra alaptétele szerint f -nek van gyöke \mathbb{C} -ben:

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \text{ hogy } f(\alpha) = 0.$$

Ekkor $x - \alpha$ kiemelhető: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x)$ is valós polinom, és tovább faktorizálhatjuk.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $\alpha = a + bi$ nem valós, akkor

$$0 = f(\alpha) = c_n \alpha^n + \dots + c_1 \alpha + c_0$$

$$\implies f(\bar{\alpha}) = c_n \bar{\alpha}^n + \dots + c_1 \bar{\alpha} + c_0 = \overline{c_n \alpha^n + \dots + c_1 \alpha + c_0} = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0,$$

tehát $\bar{\alpha}$ is gyöke f -nek.

De $\bar{\alpha} \neq \alpha \implies g(\bar{\alpha}) = 0 \implies f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})h(x)$.

Viszont $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ valós együtthatós, így $h(x)$ is valós. Ekkor egy másodfokú (valós gyök nélküli) valós polinomot emeltünk ki, és $h(x)$ -et tovább faktorizálhatjuk.

3. Parciális törtekre bontás

A 2. lépésben a nevezőt faktorizálhatjuk úgy, hogy minden tényező főegyütthatója 1 legyen, és az azonosakat összevonjuk egy hatványba.

$$\text{Az } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - c_1)^{n_1} \cdots (x - c_r)^{n_r} (x^2 + a_1x + b_1)^{m_1} \cdots (x^2 + a_sx + b_s)^{m_s}}$$

alakú valódi törtfüggvényt elemi törtfüggvények összegére bontjuk:

$$\frac{A}{(x - c_i)^k} \text{ alakúakra, ahol } A \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq n_i, \text{ és}$$

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + a_jx + b_j)^k} \text{ alakúakra, ahol } B, C \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq m_j.$$

Tétel

Ilyen felbontás létezik, és egyértelmű.

A felbontás meghatározása:

- A szóbajövő elemi törtfüggvényeket a számlálóban ismeretlen együtthatókkal közös nevezőre hozzuk,
- a számlálót x hatványai szerint rendezzük,
- $f(x)$ -szel összehasonlítva az ismeretlen együtthatókra kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk.

Példa

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 3 \\ A + C &= -1 \\ B + D &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = 0, B = 3, C = -1, D = -2.$$

Tehát

$$\frac{3x^2 - x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3}{x^2 + 1} + \frac{-x - 2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Példa

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)}$$

Ez a fv. valódi törtfv., mert a számláló foka (3) kisebb a nevezőénél (4), és a nevező nem bontható tovább, mert a másodfokú tényezőnek nincs valós gyöke.

$$\frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$$

$$= \frac{Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2}{x^2(x^2 + 2x + 2)}$$

$$= \frac{(A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B}{x^2(x^2 + 2x + 2)}$$

$$\begin{aligned} A + C &= 1 & A &= -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}, D = \frac{1}{2} \\ 2A + B + D &= 0 \\ 2A + 2B &= 0 \\ 2B &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3x + 1}{2(x^2 + 2x + 1)}$$

4. Elemi törtfüggvények integrálása

- $\int \frac{1}{(x-c)^n} dx = \begin{cases} \frac{1}{-n+1}(x-c)^{-n+1} + C, & \text{ha } n \neq 1 \\ \ln|x-c| + C, & \text{ha } n = 1 \end{cases}$
- $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx = \int \frac{Ax+B}{(g(x))^n} dx$

$Ax+B$ felbontható $A_1 \cdot g'(x) + B_1$ alakra:

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+a) - \frac{Aa}{2} + B \implies A_1 = \frac{A}{2}, B_1 = -\frac{Aa}{2} + B$$

$$\implies \int \frac{A_1 g'(x) + B_1}{(g(x))^n} dx = \int \frac{A_1 g'(x)}{(g(x))^n} dx + \int \frac{B_1}{(g(x))^n} dx$$

Az első tagra:

$$\int \frac{A_1 \cdot g'(x)}{(g(x))^n} dx = \begin{cases} A_1 \cdot \frac{1}{-n+1} g(x)^{-n+1} + C, & \text{ha } n \neq 1 \\ A_1 \ln|g(x)| + C, & \text{ha } n = 1 \end{cases}$$

A második tagra: $\frac{B_1}{(x^2 + ax + b)^n}$ teljes négyzetté való kiegészítéssel

$\frac{B_2}{(u^2 + 1)^n}$ alakra hozható:

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{b - \frac{a^2}{4}} \left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \right)^2 + 1 \right]$$

$$u = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}, \quad B_2 = \left(b - \frac{a^2}{4}\right) B_1$$

Megjegyzés

Mint ahogy $x^2 + ax + b$ -nek nincs valós gyöke, a diszkriminánsa, $a^2 - 4b$ negatív, és így $\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ értelmezve van.

$$\int \frac{1}{(u^2 + 1)^n} du = ?$$

$n = 1$ -re $\arctg u + C$

$n = 2$ -re:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du &= \int \frac{u^2 + 1 - u^2}{(u^2 + 1)^2} du = \\ &= \int \frac{1}{u^2 + 1} - \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du = \int \frac{1}{u^2 + 1} du - \int \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du \end{aligned}$$

A második tagot parciálisan integráljuk:

$$\int \frac{u^2}{(u^2 + 1)^2} du = \int \frac{1}{2} u \cdot \frac{2u}{(u^2 + 1)^2} du = -\frac{1}{2} u \frac{1}{u^2 + 1} + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + 1} du.$$

Összesítve:

$$\int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du = \int \frac{1}{u^2 + 1} du - \left(-\frac{1}{2} u \frac{1}{u^2 + 1} + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + 1} du \right) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{u}{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctg u + C$$

Ha $n > 2$, akkor az $\int \frac{1}{(u^2 + 1)^n} du$ integrált ugyanezzel a módszerrel vissza lehet vezetni az $\int \frac{1}{(u^2 + 1)^{n-1}} du$ integráljára.

Példa

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - 3x - 2} dx = ?$$

- 1 Nem valódi törtfüggvény, tehát szükség van a maradékos osztásra.

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 2x^2 + x) : (x^3 - 3x - 2) = 3 \\ - (3x^3 - 9x - 6) \\ \hline -2x^2 + 10x + 6 \end{array}$$

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{x^3 - 3x - 2} = 3 + \frac{-2x^2 + 10x + 6}{x^3 - 3x - 2}$$

- 2 $x^3 - 3x - 2$ felbontásához a lehetséges racionális gyökök: $\frac{p}{q}$, ahol p osztója 2-nek, q osztója 1-nek $\Rightarrow \frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2$. A -1 gyök, és Horner-módszerrel való kiemeléssel:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2) = (x + 1)^2(x - 2).$$

3 Parciális törtekre bontás:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + 10x + 6}{(x+1)^2(x-2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x^2 - x - 2) + B(x-2) + C(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (-A+B+2C)x + (-2A-2B+C)}{(x+1)^2(x-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + C &= -2 \\ -A + B + 2C &= 10 \Rightarrow A = -4, B = 2, C = 2 \\ -2A - 2B + C &= 6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2 + 10x + 6}{x^3 - 3x - 2} = -\frac{4}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-2}$$

4 Az integrál kiszámítása: $\int 3 - \frac{4}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-2} dx =$
 $3x - 4 \ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + 2 \ln|x-2| + C.$

Még egy trükk a parciális törtekre bontásnál:

Ha a nevező csupa különböző gyöktényező szorzata:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x - c_1) \cdots (x - c_r)}, \text{ akkor az } \frac{A_1}{x - c_1} + \cdots + \frac{A_r}{x - c_r} \text{ felbontásban}$$

az A_i együtthatót megkaphatjuk úgy, hogy az $\frac{f(x)}{g(x)}$ törtben eltöröljük az $(x - c_i)$ tényezőt, és behelyettesítünk c_i -t.

Példa

$$\frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}, \text{ ahol}$$

$$A = \left. \frac{2x - 1}{x - 2} \right|_{x=1} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ és } B = \left. \frac{2x - 1}{x - 1} \right|_{x=2} = \frac{3}{1} = 3.$$

Fordított helyettesítés

Tétel

Legyen g invertálható, differenciálható fv., amelynek értékkészlete tartalmazza az I intervallumot, és jelölje g^{-1} a g inverzét. Ekkor az I intervallumon érvényes $\int f(x) dx$ integrálra

$$\int f(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du,$$

és $a, b \in I$ -re

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u) du.$$

Bizonyítás

A g invertálhatósága miatt $x = g(g^{-1}(x))$ az I -n, és az $f(x) = f(g(g^{-1}(x)))$ függvény integráljára elvégezhetjük a $g^{-1}(x) = u$, $\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} dx = du$ helyettesítést:

$$\int f(x) dx = \int f(g(g^{-1}(x))) dx =$$

$$\int f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} dx = \int f(g(u))g'(u) du.$$

Megjegyzés

Egy helyettesítés és fordított helyettesítés kombinálásával az

$$\int f(h(x))h'(x) dx = \int f(g(u))g'(u) du$$

átalakítást is alkalmazhatjuk.

Speciális helyettesítések. $R(e^x)$

Jelöljön $R(f_1, \dots, f_n)$ olyan függvényt, amit az f_1, \dots, f_n függvényekből a négy alapművelet segítségével alkottunk (azaz az f_1, \dots, f_n racionális kifejezése).

Az $R(e^x)$ függvény integrálját $e^x = u$, azaz $x = \ln u$ helyettesítéssel racionális függvény integráljává alakíthatjuk: $\int R(e^x) dx = \int R(u) \frac{1}{u} du$.

Példa

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3 + 4 \operatorname{sh} x} dx &= \int \frac{1}{3 + 2e^x - 2e^{-x}} dx. \text{ Az } e^x = u \text{ helyettesítéssel} \\ &= \int \frac{1}{3 + 2u - 2u^{-1}} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{2u^2 + 3u - 2} du = \int \frac{1}{2(u - \frac{1}{2})(u + 2)} = \\ &= \int \frac{A}{u - \frac{1}{2}} + \frac{B}{u + 2} du = \int \frac{\frac{1}{5}}{u - \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{1}{5}}{u + 2} du = \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| u - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{5} \ln |u + 2| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{e^x - \frac{1}{2}}{e^x + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

$R(\sqrt[n]{x})$

Az $\sqrt[n]{x} = u$, azaz $x = u^n$, és $dx = nu^{n-1} du$ helyettesítés:

$$\int R(\sqrt[n]{x}) dx = \int R(u) nu^{n-1} du,$$

(ahol páros n esetén $x \geq 0$) racionális törtfüggvényt ad.

Példa

$$\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx \text{ a } \sqrt[4]{x} = u, \text{ azaz } x = u^4 \text{ és } dx = 4u^3 du \text{ helyettesítéssel:}$$
$$\int \frac{u^4 \cdot u^2}{u^2 - u} \cdot 4u^3 du = \int \frac{4u^8}{u - 1} du.$$

$R(\cos x, \sin x)$

$\cos x$ és $\sin x$ is racionális kifejezése $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ -nek:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Így a $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$, azaz $x = 2 \operatorname{arctg} u$ és $dx = \frac{2}{u^2 + 1} du$ helyettesítéssel

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right) \frac{2}{1 + u^2} du$$

Példa

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1 + u^2}{2u} \cdot \frac{2}{1 + u^2} du = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$$

A $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ függvényt – ha van olyan intervallum, ahol értelmezve van – teljes négyzetté való kiegészítéssel $A \cdot \sqrt{u^2 + 1}$, $A \cdot \sqrt{u^2 - 1}$ vagy $A \cdot \sqrt{1 - u^2}$ alakra hozhatjuk, ahol u lineáris függvénye x -nek. Így elegendő az

$$R(u, \sqrt{u^2 + 1}), \quad R(u, \sqrt{u^2 - 1}), \quad \text{illetve az } R(u, \sqrt{1 - u^2})$$

alakú integrálokkal foglalkozni. Ezeket az

$$u = \operatorname{sh} t \text{ helyettesítéssel } \int R(u, \sqrt{u^2 + 1}) du = \int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t dt,$$

$$u = \operatorname{ch} t \text{ helyettesítéssel } \int R(u, \sqrt{u^2 - 1}) du = \int R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t dt,$$

illetve az

$$u = \sin t \text{ helyettesítéssel } \int R(u, \sqrt{1 - u^2}) du = \int R(\sin t, \cos t) \cos t dt$$

alakra hozhatjuk.

Megjegyzés

Az előbbi helyettesítéseknél valójában az $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t|_{[0, +\infty)}$ és $\sin t|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ invertálható függvényeket használjuk.

Példa

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \operatorname{ch} u du = \int \operatorname{ch}^2 u du = \\ &= \int \frac{1+\operatorname{ch}(2u)}{2} du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2u) + C = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + C = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arsh} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C \end{aligned}$$