Inverz függvények

2015.10.14.

Definíció

Az f valós függvény invertálható, ha injektív, azaz $x, y \in D(f)$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$.

- f grafikonját tekintve ez azt jelenti, hogy a grafikon minden vízszintes egyenest legfeljebb 1 pontban metsz.

Definíció

Invertálható f függvény esetén g az f inverze, ha g értelmezési tartománya $(D(g))$ megegyezik f értékkészletével $(R(f))$, és $f(x) = y$ esetén $g(y) = x$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, shift right, "f"'] & y \arrow[l, mapsto, shift right, "g"'] \end{tikzcd}$$

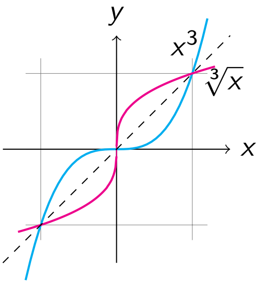
- A grafikonok szempontjából ez azt jelenti, hogy f és g grafikonja egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre nézve.
- g pontosan akkor inverze f-nek, ha f inverze g-nek.

Tétel

Ha f és g valós függvények, akkor g pontosan akkor inverze f-nek, ha $\forall x \in D(f)\ g(f(x)) = x$ és $\forall y \in D(g)\ f(g(y)) = y$.

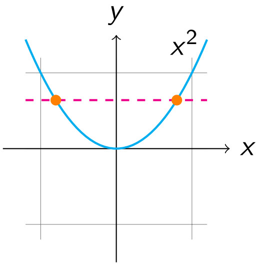
Példa

$f(x) = x^3$ inverze $g(x) = \sqrt[3]{x}$, hisz $x \in \mathbb{R}$ esetén $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ és $\sqrt[3]{x^3} = x$.



Példa

$f(x) = x^2$-nek nem inverze $g(x) = \sqrt{x}$, mert bár $x \in D(g) = [0, \infty)$ esetén $(\sqrt{x})^2 = x$, de ha $x \in \mathbb{R}$ akkor $\sqrt{x^2} = |x|$, és $x < 0$-ra ez nem egyezik meg x-szel.
$f(x) = x^2$ igazából nem is invertálható, hiszen nem injektív ($x^2 = (-x)^2$).



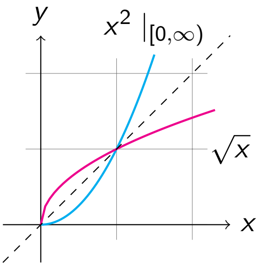
Mi ilyenkor a teendő? $\Longrightarrow$ Szorítsuk meg a függvényt egy olyan halmazra, ahol invertálható!

Definíció

Legyen f egy valós függvény. $H \subseteq D(f)$ esetén f megszorítása H-ra (jel.: $f\mid_H$) az a h függvény, amelyre $D(h) = H$ és $\forall x \in H$ $h(x) = f(x)$.

Példa

$f(x) = x^2\mid_{[0,\infty)}$ invertálható, és inverze $g(x) = \sqrt{x}$.



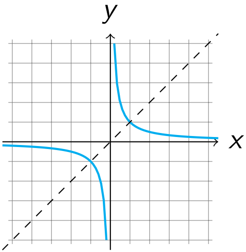
Szig. monoton függvények inverze

Állítás

Ha az f valós függvény szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton csökkenő, akkor invertálható.

Megjegyzés

Az állítás megfordítása nem igaz, pl. $f(x) = \frac{1}{x}$ invertálható, és inverze önmaga, de mégsem szogorúan monoton az értelmezési tartományán.

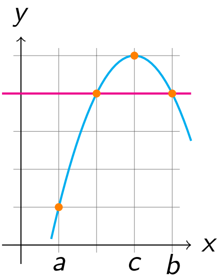


Tétel

Ha az f valós függvény folytonos és invertálható az I intervallumon, akkor f szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítás (vázlat)

Ha $a, b \in I$ és $a < c < b$, akkor $f(a) < f(c) < f(b)$ vagy $f(a) > f(c) > f(b)$, ellenkező esetben a Bolzano-Darboux-tétel miatt f nem lehetne invertálható.



Bizonyítás (folytatás)

Ha $a, b \in I$ és $a < c < d < b$, akkor $f(a) < f(b)$ esetén $f(c) < f(d)$ (és $f(a) > f(b)$ esetén $f(c) > f(d)$), ellenkező esetben az előző pontot alkalmazva a-ra és d-re ellentmondásra jutnánk, hisz pl. az első esetben $f(a), f(d) \leq f(c)$ lenne.
Ez viszont azt jelenti, hogy minden I-beli zárt intervallumon a végpontoknak megfelelően a függvény vagy szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton csökkenő, és így a teljes I intervallumon is szigorúan monoton.

Következmény

Ha egy folytonos függvényt szeretnénk invertálni, akkor olyan maximális intervallumra kell megszorítani, ahol szigorúan monoton.

Az inverz függvény tulajdonságai

Tétel

Legyen f egy invertálható valós függvény, melynek inverze g. Ekkor:

1. $D(g) = R(f)$, $D(f) = R(g)$
2. Ha f szigorúan monoton növő (csökkenő), akkor g is sszigorúan monoton növő (csökkenő).
3. Ha f folytonos, akkor g is folytonos.

Bizonyítás

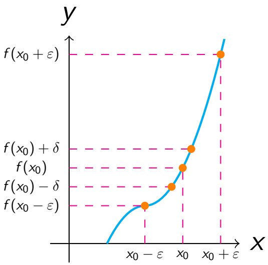
1. Volt korábban.

2.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & < & x_2 & \iff & f(x_1) & < & f(x_2) \\ g(y_1) & < & g(y_2) & \iff & y_1 & < & y_2 \end{array}$$

Bizonyítás (folytatás)

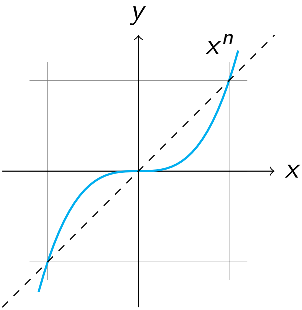
3. f invertálható és folytonos $\Longrightarrow$ szigorúan monoton. Legyen pl. szig. monoton novő és vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t.

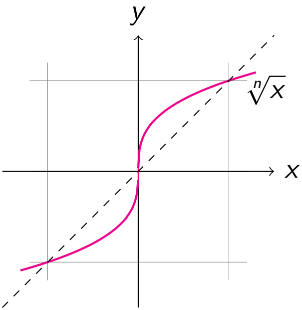


$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad (f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta) \subseteq (f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon))$$

Hatványfüggvények inverzei - gyökfüggvények

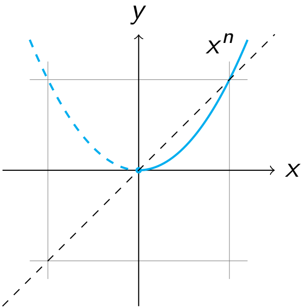
$f(x) = x^n$, n pozitív páratlan egész $\Longrightarrow$ invertálható és inverze $g(x) = \sqrt[n]{x}$

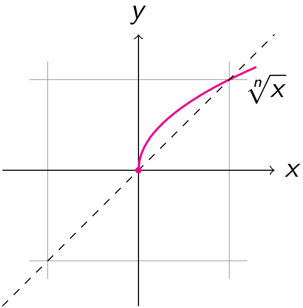




$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = \mathbb{R}$$

$f(x) = x^n$, n pozitív páros egész $\Longrightarrow f\,|_{[0,\infty)}$ invertálható és inverze $g(x) = \sqrt[n]{x}$

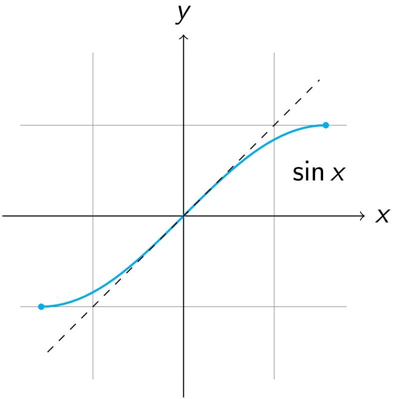


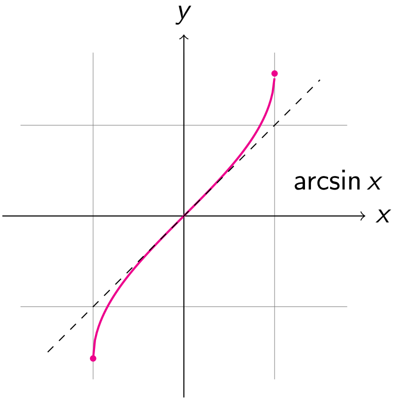


$D(f\,|_{[0,\infty)}) = R(g) = [0, \infty)$ $D(g) = R(f\,|_{[0,\infty)}) = [0, \infty)$

Trigonometrikus függvények inverzei - arkusz függvények

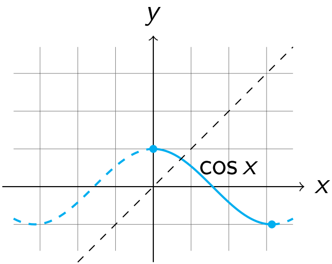
$f(x) = \sin x \implies f\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ invertálható és inverze $g(x) = \arcsin x$

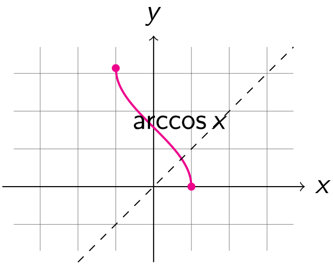




$D(f\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = R(g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad D(g) = R(f\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = [-1, 1]$

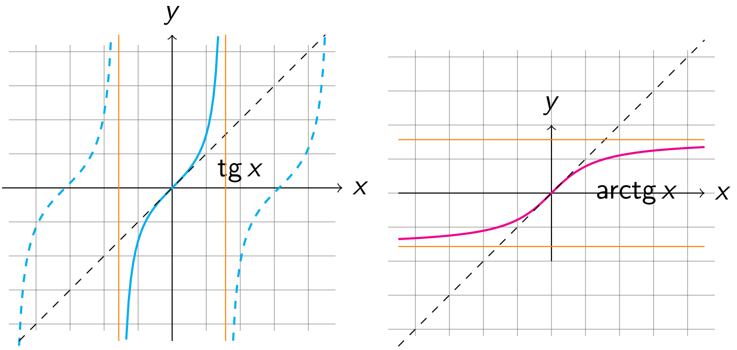
$f(x) = \cos x \Longrightarrow f\,|_{[0,\pi]}$ invertálható és inverze $g(x) = \arccos x$





$D(f\,|_{[0,\pi]}) = R(g) = [0, \pi] \quad D(g) = R(f\,|_{[0,\pi]}) = [-1, 1]$

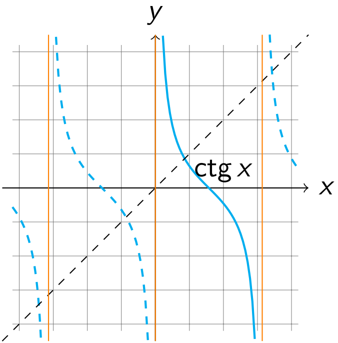
$f(x) = \operatorname{tg} x \implies f\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arctg} x$

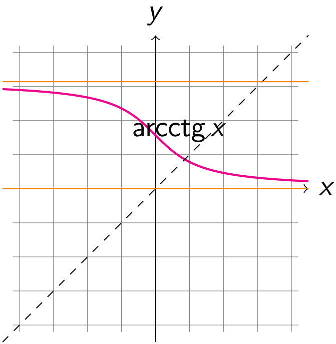


$$D(f\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = R(g) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad D(g) = R(f\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = \operatorname{ctg} x \implies f\,|_{[0,\pi]}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arcctg} x$



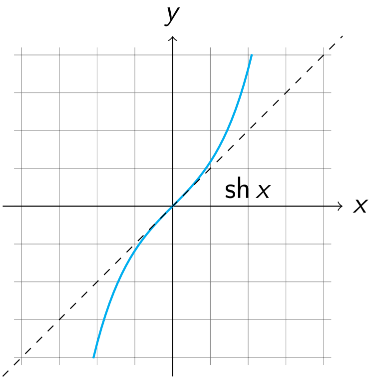


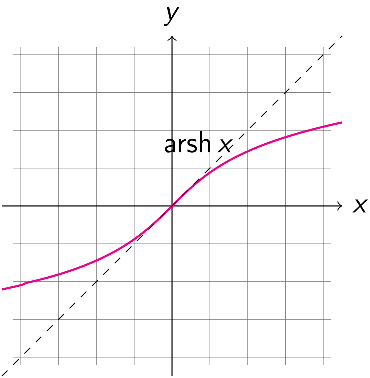
$$D(f\,|_{[0,\pi]}) = R(g) = [0,\pi] \quad D(g) = R(f\,|_{[0,\pi]}) = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \pi, \qquad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = 0$$

Hiperbolikus függvények inverzei - area függvények

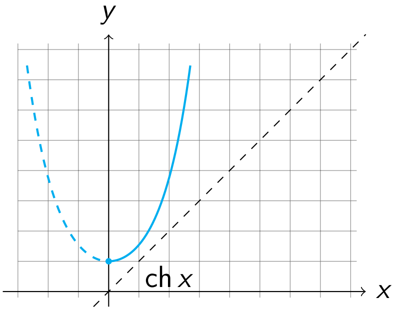
$f(x) = \operatorname{sh} x \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arsh} x$

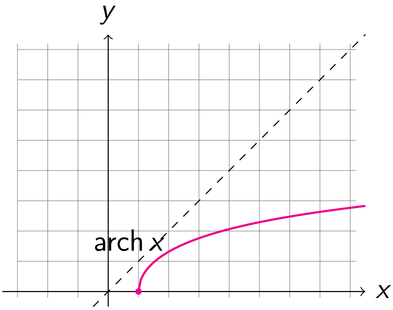




$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = \mathbb{R}$$

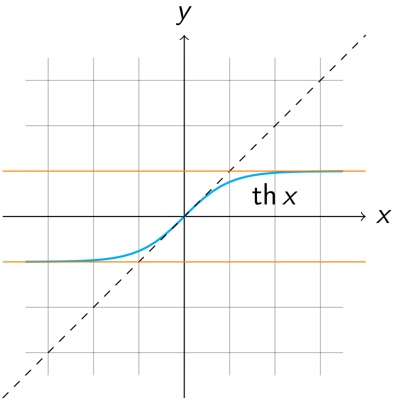
$f(x) = \operatorname{ch} x \Longrightarrow f\,|_{[0,\infty)}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arch} x$

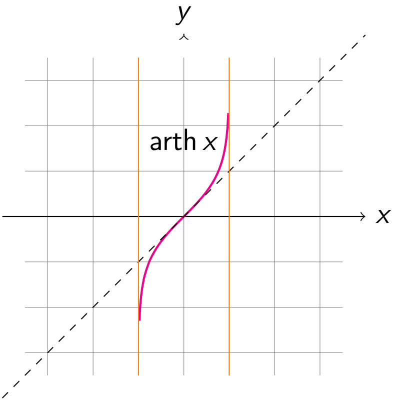




$D(f\,|_{[0,\infty)}) = R(g) = [0, \infty)$ $D(g) = R(f\,|_{[0,\infty)}) = [1, \infty)$

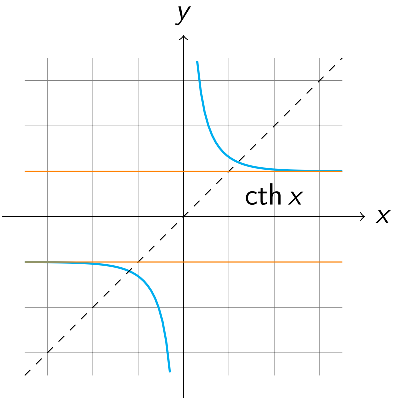
$f(x) = \operatorname{th} x \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arth} x$

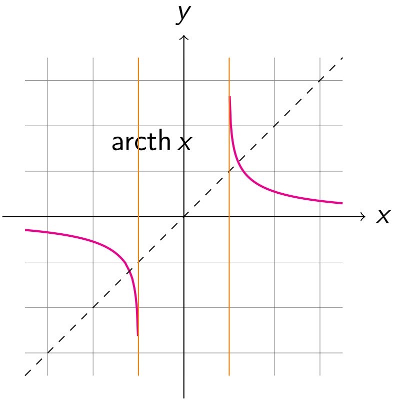




$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = (-1, 1)$$

$f(x) = \operatorname{cth} x \implies f\,|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ invertálható és inverze $g(x) = \operatorname{arcth} x$

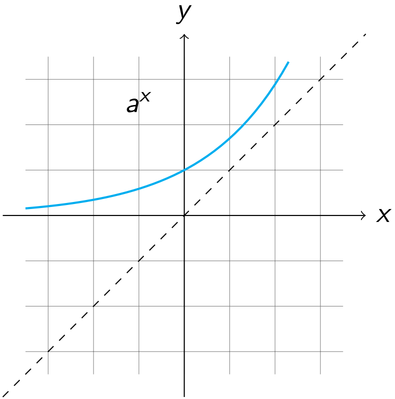


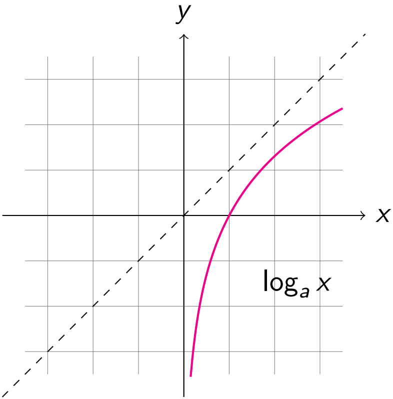


$$D(f) = R(g) = \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad D(g) = R(f) = \mathbb{R}\setminus[-1, 1]$$

Exponenciális függvények inverzei - logaritmusfüggvények

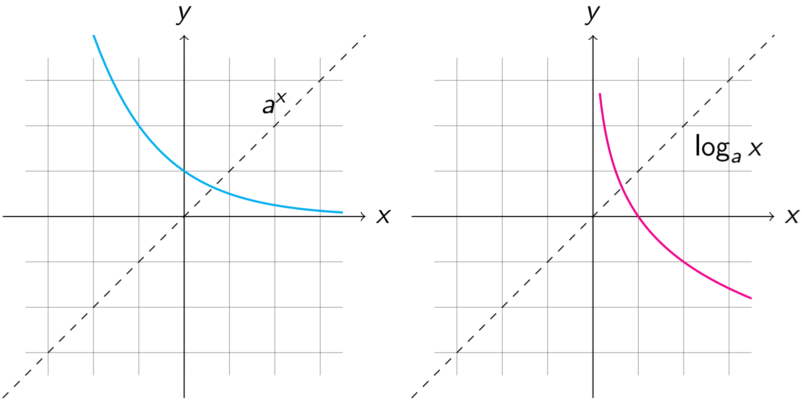
$f(x) = a^x$, $1 < a \Longrightarrow f$ invertálható és inverze $g(x) = \log_a x$





$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = (0, \infty)$$

$f(x) = a^x$, $0 < a < 1 \implies f$ invertálható és inverze $g(x) = \log_a x$



$$D(f) = R(g) = \mathbb{R} \quad D(g) = R(f) = (0, \infty)$$

A logaritmusfüggvények tulajdonságai

Speciális eset a természetes alapú logaritmus:

$$\log_e x = \ln x$$

Megjegyzés

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Ezt az azonosságot jól lehet használni $f(x)^{g(x)}$ alakú függvények határértékének meghatározásakor:

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to c} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to c} g(x) \ln f(x)},$$

mivel az e^x függvény folytonos.

Állítás (A logaritmusfüggvények azonosságai)

Legyen $1 \neq a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ és $x, y > 0$. Ekkor:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a x^b = b \log_a x$
3. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Bizonyítás

1. $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$
2. $a^{b \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^b = x^b$
3. $a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln a \frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln x} = x$

Összefoglalás

- Az inverz függvény fogalma
- Szig. monoton függvények inverze
- Elemi függvények inverzei (gyök, arkusz és area függvények)
- A logaritmusfüggvény és tulajdonságai