

Matematikai logika és halmazelmélet

Wettl Ferenc előadása alapján

2015-09-07

- 1 Matematikai kijelentések szerkezete
- 2 Logikai műveletek
 - Állítások tagadása
 - És, vagy, ha... akkor, pontosan akkor, nem
 - Implikáció megfordítása
 - Szükséges és elegendő/elégséges
 - Kontrapozíció
 - de Morgan azonosságok
- 3 Kvantorok
 - Minden... , van olyan...
- 4 Halmazműveletek és logikai műveletek
 - Halmazok
 - Halmazműveletek
 - Halmazműveleti azonosságok
 - Végtelen halmazok
- 5 Összefoglalás

A matematikai kijelentések olyan mondatok, amelyekben

- matematikai objektumok (pl. szám, halmaz, függvény, osztható...) és
- logikai konnektívumok (és, vagy, ha... akkor, minden, van olyan...) szerepelnek.

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- Esik az eső. E
- **Nem** esik az eső. $\neg E$
- Esik az eső **és** süt a nap. $E \wedge S$ ($E\&S$)
- **Nem** esik az eső **vagy nem** süt a nap. $\neg E \vee \neg S$
- Ma moziba megyünk **vagy** fagyizuk. $M \vee F$
- **Nem** megyünk moziba **és nem** fagyizunk. $\neg M \wedge \neg F$
- **Ha** hétfőn nem futunk, (**akkor**) futunk kedden. $\neg H \Rightarrow K$
- Hétfőn nem futunk **de/és** kedden **sem**. $\neg H \wedge \neg K$
- **Ha** hétfőn futunk, futunk kedden is. $H \Rightarrow K$
- Hétfőn futunk **de** kedden **nem**. $H \wedge \neg K$

Definíció

Jelöljön P és Q két állítást. Igazságtáblájukkal a következő logikai műveleteket definiáljuk (0 = hamis, 1 = igaz):

- tagadás, negáció (\neg , „nem”, NOT),
- és, konjunkció, logikai szorzás (\wedge , „és/de”, AND),
- (megengedő) vagy, diszjunkció, logikai összeadás (\vee , „vagy”, OR),
- kizáró vagy, moduláris (maradékös) összeadás (\otimes , „vagy... , vagy”, XOR),
- implikáció (\Rightarrow , „ha... , akkor...”),
- ekvivalencia (\Leftrightarrow , „pontosan akkor”, „akkor és csak akkor”),

P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \otimes Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0
		1	0	0	1	1	0	0
		1	1	1	1	0	1	1

Definíció

Két logikai kifejezést **azonosnak** (**azonosan egyenlőnek**) tekintünk, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele \equiv .

Ha nem futunk hétfőn, futunk kedden \equiv Hétfőn vagy kedden futunk.

Példa (Az implikáció ekvivalens alakja)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Megoldás

A	\Rightarrow	B	\equiv	\neg	A	\vee	B
0	1	0	✓	1	0	1	0
0	1	1	✓	1	0	1	1
1	0	0	✓	0	1	0	0
1	1	1	✓	0	1	1	1

Nem igaz, hogy ha nem futunk hétfőn, futunk kedden \equiv
 Se hétfőn se kedden nem futunk.

Példa (Az implikáció tagadása)

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Megoldás

\neg	$(A$	\Rightarrow	$B)$	\equiv	A	\wedge	\neg	B
0	0	1	0	✓	0	0	1	0
0	0	1	1	✓	0	0	0	1
1	1	0	0	✓	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	1	0	0	1

Definíció

Az $A \Rightarrow B$ implikáció megfordításán a $B \Rightarrow A$ implikációt értjük.

Példa

Ha Béla orvoshoz megy, tiszta fehérneműt húz.

Ha Béla tiszta fehérneműt húz, orvoshoz megy.

Példa

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B.$$

Megoldás

$(A \Rightarrow B)$	\wedge	$(B \Rightarrow A)$	\equiv	$A \Leftrightarrow B$
0 1 0	1	0 1 0	✓	0 1 0
0 1 1	0	1 0 0	✓	0 0 1
1 0 0	0	0 1 1	✓	1 0 0
1 1 1	1	1 1 1	✓	1 1 1

- Ha n osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is.
 ha A , akkor $B \equiv$
 A igazsága elegendő (de nem szükséges) feltétele B igazságának \equiv
 B igazságának A igazsága elegendő (de nem szükséges) feltétele
- Csak akkor osztható n 4-gyel, ha 2-vel is.
 csak akkor A , ha $B \equiv$
 B igazsága A igazságának szükséges (de esetleg nem elegendő)
 feltétele \equiv
 A igazságának szükséges (de esetleg nem elegendő) feltétele B
 igazsága
- Matematikai szövegekben a fenti két mondat szerkezet ekvivalens:
 A elegendő feltétele B -nek, és B szükséges feltétele A -nak.
 Nem matematikai példa: csak akkor kapsz diplomát, ha befizeted a
 tandíjat!
- A szükséges és elegendő feltétele B -nek, azaz $A \Leftrightarrow B \equiv$
 csak akkor B , ha A (mert szükséges, azaz $B \Rightarrow A$), és ha A , akkor B
 (mert elégesség, azaz $A \Rightarrow B$). \equiv
 Akkor és csak akkor A , ha B

Példa

Mutassuk meg, hogy ha m és n olyan pozitív egészek, hogy $m + n \geq 49$, akkor $m \geq 25$ vagy $n \geq 25$.

Példa (Kontrapozíció)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

Megoldás

A	\Rightarrow	B	\equiv	\neg	B	\Rightarrow	\neg	A
0	1	0	✓	1	0	1	1	0
0	1	1	✓	0	1	1	1	0
1	0	0	✓	1	0	0	0	1
1	1	1	✓	0	1	1	0	1

Példa (de Morgan azonosságok)

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Megoldás

\neg	$(A$	\wedge	$B)$	\equiv	\neg	A	\vee	\neg	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
1	0	0	1	✓	1	0	1	0	1
1	1	0	0	✓	0	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

\neg	$(A$	\vee	$B)$	\equiv	\neg	A	\wedge	\neg	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
0	0	1	1	✓	1	0	0	0	1
0	1	1	0	✓	0	1	0	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

Jelölés

A $\forall xP(x)$ és a $\exists xP(x)$ jelölések jelentése: „minden x -re (igaz, hogy) $P(x)$ ” és „van olyan x , hogy $P(x)$ ”. A \forall ill. a \exists jel neve **univerzális** ill. **egzisztenciális kvantor**.

\forall : „minden”, „tetszőleges”, „bármely”, „akármelyik”, „bármikor”...

\exists : „van”, „van olyan”, „létezik”, „található olyan”, „megesik”...

Példa

Jelölje $P(x)$, hogy x prím, $S(x)$, hogy x páros és $O(x, y)$, hogy x osztója y -nak. Formalizáljuk az alábbi állításokat, és döntsük el, hogy igazak-e!

- Létezik páros prím. $\exists x[S(x) \wedge P(x)]$ igaz
- Minden prím páratlan. $\forall x[P(x) \Rightarrow \neg S(x)]$ hamis
- Ha x és y osztója z -nek, akkor xy is. $\forall x, y, z[O(x, z) \wedge O(y, z) \Rightarrow O(xy, z)]$ hamis

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- **Mindenki** szereti Júliát. $\forall x \in J [S(x)]$
- **Van** aki nem szereti. $\exists x \in J [\neg S(x)]$
- **Valaki** járt itt. $\exists x \in E [I(x)]$
- **Senki** sem járt itt. $\forall x \in E [\neg I(x)]$
- **Minden** ajtón **van** kilincs. $\forall a \in A \exists k \in K [R(a, k)]$
- **Van olyan** ajtó, amin **nincs** kilincs. $\exists a \in A \forall k \in K [\neg R(a, k)]$

Kvantoros állítások tagadása: $\forall \exists \dots A$ tagadása $\exists \forall \dots \neg A$.

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük.

Jele: \emptyset . Az „ x dolog eleme az X halmaznak” jelölése: $x \in X$.

Az A halmazt a B halmaz **részalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B -nek is eleme. A **valódi része** B -nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Jelölés

\mathbb{R} : valósok, \mathbb{N} : természetes számok, \mathbb{Z} : egészek, \mathbb{Q} : racionálisok, \mathbb{N}^+ : pozitív egészek, \mathbb{R}^+ : pozitív valós számok.

A H halmaz azon x elemeinek halmazát, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek a következőképp adjuk meg:

$$\{x \in H : P(x)\}.$$

Definíció (Halmazműveletek)

Legyen A és B egy H halmaz két részhalmaza. Az A és B halmaz $A \cap B$ **metszetén** (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak:

$$A \cap B = \{x \in H : x \in A \wedge x \in B\}.$$

$A \cup B$ **egyesítettjén** (unióján) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak:

$$A \cup B = \{x \in H : x \in A \vee x \in B\}.$$

Definíció (Halmazműveletek (folytatás))

Az A és B halmaz $A \setminus B$ (másképpen $A - B$) **különbségén** az A összes olyan elemének halmazát értjük, amelyek nincsenek benne B -ben.

$$A \setminus B = \{x \in H : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Az A halmaz H -ra vonatkozó **komplementeren** a $H \setminus A$ halmazt értjük. Jele \bar{A}_H . Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert egyszerűen \bar{A} jelöli.

$$\bar{A}_H = \{x \in H : x \notin A\}.$$

Az A halmaz $\mathcal{P}(A)$ **hatványhalmazán** azt a halmazt értjük, melynek elemei A részhalmazai (beleértve az üreshalmazt is).

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

A halmazműveletek tulajdonságai:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ asszociativitás
- $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$ kommutativitás
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ disztributivitás
- $A \cup A = A, A \cap A = A$ idempotencia
- $A \cup (A \cap B) = A$
 $A \cap (A \cup B) = A$ elnyelési tulajdonság
- $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup H = H, A \cap H = A$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ de Morgan azonosságok

Definíció (Halmazok számossága)

Két halmaz azonos számosságú, ha elemeik közt **létezik** kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

Van egy szálloda végtelen sok egyágyas szobával (a szobaszámok a pozitív egészek). Minden szoba foglalt

- Érkezik egy új vendég.

Régi vendégek: 2 3 4 5 6 7 8 9...

Új vendég: 1

- Egy busz érkezik, végtelen sok (1., 2., 3.,...) vendéggel

Régi vendégek: 2 4 6 8 10 12 ...

Új vendégek: 1 3 5 7 9 11 ...

- Végtelen sok (1., 2., ...) busz érkezik, mindegyik végtelen sok vendéggel

Régiak: 1 2 4 7 11 16 22 ...

1. busz: 3 5 8 12 17 23 ...

2. busz: 6 9 13 18 24 ...

3. busz: 10 14 19 25 ...

4. busz: 15 20 26 ...

.

Definíció (Megszámlálhatóan végtelen halmaz)

Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha egyenlő számosságú az \mathbb{N} halmazzal.

Tétel

Az egész számok és a racionális számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen.

Tétel

A valós számok (és az irracionális számok) halmaza nem megszámlálható (számosságukat kontinuumnak nevezzük).

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy a valósak egy végtelen sorozatba rendezhetők, pl.

1 0,3610513769310776034...
 2 3,1159236543282345014...
 3 0,1585026723823654328...
 4 2,6748231345822345014...
 5 7,574870000000000000...
 6 -0,6548727650234576800...
 7 -5,2687623176577653234...
 8 0,9870244807633333777...
 9 0,1113554322346000214...
 ⋮

Vegyünk egy számot, amelynek az n . tizedesjegye különbözik az n . szám n . tizedesjegyétől, 0-tól és 9-től is minden n -re, pl. 0,523315111 ... Ez a szám nincs a sorozatban. ζ

Összefoglalás a tudnivalókról

- 1 logikai műveletek műveleti tábláinak ismerete,
- 2 alapazonosságok igazolása igazságtáblával: $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$,
 $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$ (implikáció tagadása),
 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ (kontrapozíció),
 $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (de Morgan).
- 3 logikai műveleteket és/vagy kvantorokat tartalmazó állítások tagadása,
- 4 halmazműveletek definíciói, a műveleti tulajdonságok használata,
- 5 a természetes számok, a racionális, az irracionális és a valós számok számossága.