

# Sorozatok

2015.11.30. és 2015.12.02.

- 1 Sorozatok alapfogalmai
- 2 Sorozatok jellemzői
- 3 Sorozatok határértéke
- 4 Konvergencia és korlátosság
- 5 Cauchy-féle konvergenciakritérium

# Sorozatok alapfogalmai

## Definíció

Egy valós sorozat egy  $\mathbb{N}$ -ből  $\mathbb{R}$ -be képező függvény. Értelmezési tartománya többnyire  $\mathbb{N}$  vagy  $\mathbb{N}^+$ . Jelölés:  $a(n)$  helyett általában  $a_n$ , pl.  $a_1, a_2, a_3, \dots$  vagy  $a_0, a_1, a_2, \dots$  megadja mindegyik elem képét.

## Sorozat megadása

- Az első néhány tag felsorolásával (ha abból ki lehet találni, mire gondolunk), pl.  $1, 3, 5, 7, 9, \dots$  a pozitív páratlan számok.
- $n$ -től függő képlettel, pl.  $a_n = n + \sqrt{n^2 - 2}$ ,  $n \geq 2$
- Rekurzióval, pl.: a Fibonacci-sorozat:  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ , ha  $n \geq 2 \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

**Jelölés:**  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) vagy  $[a_n]$  vagy  $[a_n]_{n \in \mathbb{N}}$ .

# Sorozatok jellemzői

## Definíció

Egy  $[a_n]$  sorozat

- monoton növő, ha  $a_n \leq a_{n+1} \forall n$
- szigorúan monoton növő, ha  $a_n < a_{n+1} \forall n$
- monoton fogyó (csökkenő), ha  $a_n \geq a_{n+1} \forall n$
- szigorúan monoton fogyó (csökkenő), ha  $a_n > a_{n+1} \forall n$
- korlátos, ha  $\exists K \in \mathbb{R}: |a_n| \leq K \forall n$

## Példa

A  $(-1)^n$  sorozat korlátos, de nem monoton.

Az  $1 + \frac{1}{n}$  sorozat szigorúan monoton fogyó, és korlátos.

Az  $a_n = n^2$  sorozat szigorúan monoton növő, nem korlátos.

# Sorozatok határértéke

## Definíció

Egy  $[a_n]$  sorozat határértéke (limesze):  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ , ha

$$\forall \varepsilon \exists n_0 : (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon),$$

azaz  $a_n$  tetszőlegesen közel kerül  $A$ -hoz, ha  $n$  elég nagy.

## Definíció

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}, \text{ ha } \forall K \exists n_0 : \left( n \geq n_0 \Rightarrow \begin{matrix} a_n > K \\ a_n < K \end{matrix} \right),$$

azaz  $a_n$  tetszőlegesen nagy (kicsi), ha  $n$  elég nagy.

## Definíció

Az  $[a_n]$  sorozat konvergens, ha véges határértéke van, és divergens, ha nem konvergens.

## Tétel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} A \\ \infty \\ -\infty \end{cases} \iff \text{minden } \begin{cases} (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \\ (K, \infty) \\ (-\infty, K) \end{cases} \text{ intervallumon kívül}$$

a sorozatnak csak véges sok (indexű) eleme van.

## Bizonyítás

Nyilvánvalóan ekvivalens, hogy valamely  $n_0$ -tól benne vannak a sorozat tagjai egy  $I$  intervallumban, illetve, hogy csak véges sok (indexű) tag van rajta kívül.

**Pl.** Az  $1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$  sorozatnak nem limesze az 1, mert az  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  intervallumon kívül végtelen sok (2 értékű) eleme van a sorozatnak. Könnyen látható, hogy ez a sorozat korlátos, de divergens.

Sorozatok limeszére ugyanúgy érvényesek a műveleti tulajdonságok (a kiterjesztett  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  aritmetikával), és a rendőrelv, mint a függvények határértékére.

### Tétel (Átviteli elv)

Legyen  $f$  valós függvény,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta \iff \begin{array}{l} \text{minden } x_n \text{ valós sorozatra} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \text{ esetén } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta. \end{array}$$

### Példa

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ , mert  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'H(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$  igaz a megfelelő függvény limeszére.

# Konvergencia és korlátosság

## Tétel

Minden konvergens sorozat korlátos.

## Bizonyítás

Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ . Ekkor pl. az  $(A - 1, A + 1)$ -en kívül csak véges sok tagja van a sorozatnak. Ha  $K$  a kimaradó tagok abszolút értékének,  $|A + 1|$ -nek és  $|A - 1|$ -nek a maximuma, akkor  $|a_n| \leq K$  minden  $n$ -re.

## Megjegyzés

Az állítás megfordítása nyilván nem igaz, pl. az  $1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$  sorozat korlátos, de nem konvergens: bármely  $c \in \mathbb{R}$ -re  $1$  vagy  $2$  nincs benne a  $(c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$  intervallumban, és ez végtelen sok indexű kimaradó tagot jelent.



## Tétel

Minden monoton és korlátos sorozat konvergens  $\mathbb{R}$ -ben.

## Bizonyítás

Tegyük fel, hogy az  $[a_n]$  sorozat monoton, és legyen  $|a_n| \leq K \quad \forall n$ .  
 Felezzessük a  $[-K, K]$  intervallumot mindig az intervallum első vagy második zárt felét választva, úgy, hogy a kiválasztott fél intervallumban mindig végtelen sok (indexű) tagja legyen a sorozatnak:

$I_0 = [-K, K] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ . Ugyanúgy, mint a Bolzano-tétel bizonyításában,  $\bigcap_{i=0}^{\infty} I_i = \{c\}$  a Cantor-axióma és az intervallumok 0-hoz tartó hossza miatt. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c,$$

ugyanis  $\forall \varepsilon > 0 \exists i: I_i \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) =: I$ . Így  $I$  tartalmaz végtelen sok tagot:  $a_{n_0}, a_{n_1}, \dots$  valamely  $n_0 < n_1 < \dots$ -ra.  $\forall n \geq n_0$ -ra  $\exists n_j$ :  
 $n_0 \leq n \leq n_j$ , és a monotonitás miatt  $a_{n_0}, a_{n_j} \in I \Rightarrow a_n \in I$ .

Tehát  $c$  valóban limesze a sorozatnak.

## Megjegyzés

Az előbbi tétel nyilván akkor is igaz, ha a korlátos sorozat csak az  $N$ -edik tagjától kezdve monoton valamely  $N \in \mathbb{N}$ -re.

## Példa

$c > 0$ -ra definiáljuk rekurzívan a következő sorozatot:  $a_0 > 0$  tetszőleges, és  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right)$ . Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{c}$ .

## Bizonyítás

$a_n > 0 \forall n$ , és belátjuk, hogy a sorozat  $a_1$ -től kezdve monoton fogyóan tart  $\sqrt{c}$ -hez.

## Bizonyítás (folytatás)

$$a_{n+1} \geq \sqrt{c} \quad \forall n \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right) \geq \sqrt{c}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n^2 - 2\sqrt{c}a_n + c \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(a_n - \sqrt{c})^2 \geq 0$$

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \geq \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \geq \frac{c}{a_n}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \geq \sqrt{c}$$

Tehát a sorozat  $n = 1$ -től kezdve monoton, és korlátos is ( $0 < a_n \leq a_1 \quad \forall n \geq 1$ ), így konvergens. Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

$$a_n \geq \sqrt{c} \quad (n \geq 1) \Rightarrow A \geq \sqrt{c} > 0, \text{ és}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{c}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left( A + \frac{c}{A} \right) \Rightarrow$$

$$A^2 - c = 0 \Rightarrow A = \sqrt{c}.$$

**Pl.**  $c = 2$ ,  $a_0 = 1$ -re a sorozat eleje  $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408} \approx 1.4142156 \dots$ , és  $\sqrt{2} = 1.4142135 \dots$

## Definíció

Egy  $[a_n]$  sorozat részsorozata egy  $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}$  végtelen sorozat, ahol  $n_1 < n_2 < \dots$ .

A definíciókból közvetlenül adódik:

## Állítás

Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , és  $[a_{n_k}]$  egy részsorozata  $[a_n]$ -nek, akkor  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha$ .

## Példa

Az  $[a_n]_{n \in \mathbb{N}^+} : 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots$  divergens sorozatnak részsorozata az  $[a_{2k}] : 2, 2, 2, \dots$  konvergens sorozat.

## Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

## Bizonyítás

Ha nincs monoton fogyó részsorozat, akkor  $\forall$  véges monoton fogyó részsorozat véget ér (azaz  $a_{n_1} \geq \dots \geq a_{n_k}$ -hoz nincs  $n_{k+1} > n_k$ , hogy  $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$ ). De akkor a végtelen sok ilyen “utolsó tag” szigorúan monoton növvő részsorozatot alkot.

## Tétel (Bolzano–Weierstrass)

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

## Bizonyítás

Az előbbi tétel szerint van monoton részsorozata, ami nyilván korlátos, így konvergens is.

A Bolzano–Weierstrass-tétel segítségével be lehet bizonyítani a korábban tanult, folytonos függvények szélsőértékéről szóló **Weierstrass-tételt**:

Ha az  $f$  függvény folytonos az  $[a, b]$  intervallumon, akkor ott felveszi a maximumát és a minimumát.

### Bizonyítás (vázlat)

- $f$  korlátos, különben  $\exists [x_n]$  sorozat  $[a, b]$ -ben, hogy  $f(x_n) > n \forall n$ , vagy  $[y_n]$ , hogy  $f(y_n) < -n \forall n$ . Pl. az első esetben  $[x_n]$ -nek van konvergens  $[x_{n_k}] \rightarrow c \in [a, b]$  részsorozata, és erre  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \infty \neq f(c)$ .  $\nexists$
- Intervallumfelezéssel beláthatjuk, hogy  $f$ -nek van egy  $M$  legkisebb felső és egy  $m$  legnagyobb alsó korlátja.
- Van olyan  $[x_n]$  sorozat, amire  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$ , és  $x_n$ -nek egy konvergens  $[x_{n_k}] \rightarrow c$  részsorozatára  $f$  folytonossága miatt  $f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ . Mivel  $M$  felső korlátja  $f$ -nek  $[a, b]$ -n,  $M$  az  $f$  maximuma. Ugyanígy  $m$  a minimuma.

# Cauchy-féle konvergenciakritérium

## Tétel

Egy  $[a_n]$  valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz  $\exists n_0$ , hogy  $n, m \geq n_0$  esetén  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .