Vizsgatematika

▶ = kötelező bizonyítás
Minden tételnél fontosak az előadáson elhangzott példák/ellenpéldák!

Bevezetés(logikai formulák és halmazok):

• logikai műveletek és művelettábláik, azonosságok

► az előadáson elhangzott kétváltozós logikai azonosságok bizonyítása igazságtáblával (implikáció ekvivalens alakja, implikáció tagadása, kontrapozíció, de Morgan azonosságok)

• szükségesség és elégségesség fogalma

• univerzális és egzisztenciális kvantor

• halmazműveletek és tulajdonságaik, azonosságok

• halmazok számossága, végtelen számhalmazok

Példa (Az implikáció ekvivalens alakja)

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Megoldás

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	A	$\vee$	B
0	1	0	✓	1	0	1	0
0	1	1	✓	1	0	1	1
1	0	0	✓	0	1	0	0
1	1	1	✓	0	1	1	1

Példa (Az implikáció tagadása)

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

Megoldás

$\neg$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\equiv$	A	$\wedge$	$\neg$	B
0	0	1	0	✓	0	0	1	0
0	0	1	1	✓	0	0	0	1
1	1	0	0	✓	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	1	0	0	1

Példa (Kontrapozíció)

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Megoldás

A	$\Rightarrow$	B	$\equiv$	$\neg$	B	$\Rightarrow$	$\neg$	A
0	1	0	✓	1	0	1	1	0
0	1	1	✓	0	1	1	1	0
1	0	0	✓	1	0	0	0	1
1	1	1	✓	0	1	1	0	1

Példa (de Morgan azonosságok)

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

Megoldás

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	A	$\vee$	$\neg$	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
1	0	0	1	✓	1	0	1	0	1
1	1	0	0	✓	0	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\equiv$	$\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
0	0	1	1	✓	1	0	0	0	1
0	1	1	0	✓	0	1	0	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

Vektorok:

• vektorok összeadása, skalárral szorzása és ezek műveleti tulajdonságai
• lineáris kombináció fogalma, a sík, illetve tér vektorainak előállítása lineáris kombinációként
• skaláris szorzás és tulajdonságai, hosszúság, szög, háromszög-egyenlőtlenség
• vektor felbontása merőleges összetevőkre
• vektoriális szorzás és tulajdonságai
• vegyesszorzat és tulajdonságai, parelelepipedon térfogata
• vektorműveletek (összeadás, skalárral szorzás, skaláris szorzás, vektoriális szorzás) koordinátás alakban
▶ skaláris szorzat koordinátás alakja két dimenzióban
• az n dimenziós tér, lineáris függetlenség fogalma és ekvivalens alakja
• skaláris szorzás, távolság, szög az n dimenziós térben, Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség

Műveletek koordinátás alakban

Tétel

A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \text{ illetve } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Bizonyítás

Síkbeli esetre: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2 v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2\end{aligned}$$

Analitikus térgeometria:

• egyenes és sík paraméteres és paramétermentes egyenlete

• térelemek kölcsönös helyzete, két egyenes, sík és egyenes, valamint két sík metszetének meghatározása

• térelemek távolsága, pont és egyenes, pont és sík, valamint nem párhuzamos egyenesek távolsága

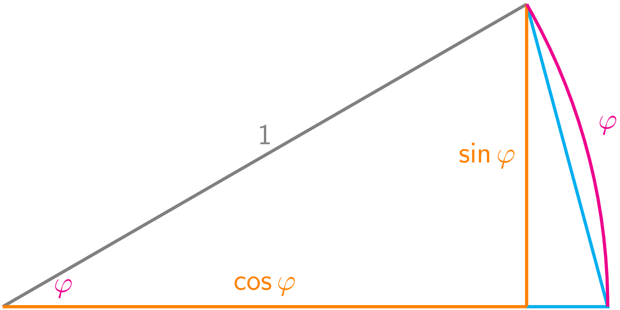
Komplex számok:

• komplex szám algebrai alakja, műveletek algebrai alakban
• komplex szám konjugáltjának és abszolút értékének tulajdonságai
• komplex szám trigonometrikus alakja, műveletek trigonometrikus alakban, hatványozás, gyökvonás, komplex egységgyökök
• algebra alaptétele

Függvények határértéke:

- függvény fogalma, függvény grafikonja
- véges határérték a végtelenben és véges pontban
- végtelen határérték a végtelenben és véges pontban
- határértékek és algebrai műveletek, kibővített aritmetika
- rendőrelv
- ► $\sin x$ határértéke a 0-ban
- jobb- és baloldali határérték fogalma
- $\sin /x$ határértéke a 0-ban
- aszimptoták (vízszintes, függőleges, ferde)

Példa (A rendőrelv további alkalmazásai)

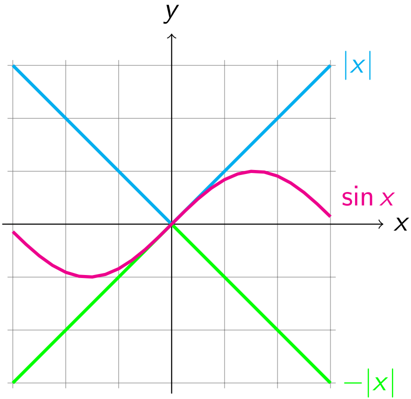


Radiánban írva:

$$|\sin\varphi| \leqslant |\varphi|$$

$-|\varphi| \leq \sin\varphi \leq |\varphi|$, és $\lim\limits_{\varphi\to 0}(-|\varphi|) = \lim\limits_{\varphi\to 0}(|\varphi|) = 0$, ezért

$$\lim_{\varphi\to 0} \sin\varphi = 0.$$



Folytonosság:

- pontbeli folytonosság fogalma, műveletek folytonos függvényekkel
- ▶ folytonos függvények kompozíciója folytonos
- szakadási helyek osztályozása
- egyoldali folytonosság fogalma és kapcsolata a pontbeli folytonossággal
- ▶ Bolzano-tétel
- Bolzano-Darboux-tétel, Weierstrass-tétel

Állítás

Ha g folytonos a c pontban, és f folytonos az $g(c)$ pontban, akkor $f \circ g$ folytonos a c pontban. (Jelölés: $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.)

Bizonyítás

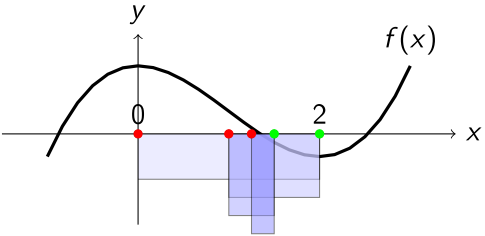
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.
f folyt. $g(c)$-ben $\Longrightarrow \exists\, \delta_1 > 0\ [|u - g(c)| < \delta_1 \implies |f(u) - f(g(c))| < \varepsilon]$
g folyt. c-ben $\Longrightarrow \exists\, \delta_2 > 0\ [|x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \delta_1]$
Ekkor δ_2 megfelelő δ-érték ε-hoz az $f \circ g$ függvény esetében, ugyanis:
$|x - c| < \delta_2 \implies |g(x) - g(c)| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - f(g(c))| < \varepsilon$

Tétel (Bolzano-tétel)

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon és $f(a)$ és $f(b)$ ellentétes előjelűek ($f(a) \cdot f(b) < 0$), akkor f-nek van zérushelye az intervallum belsejében, vagyis $\exists\ c \in (a, b):\ f(c) = 0$.

Bizonyítás

$[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ zárt intervallumok:



I_{n+1} az I_n-nek az a fele, amelyiknek a két végpontján f különböző előjelű (ha f valamelyik osztópontban 0, akkor leállunk)

Bizonyítás (folytatás)

- **Cantor-axióma:** Egymásba skatulyázott nem üres zárt intervallumok metszete nem üres $\mathbb{R}$-ben.

Legyen $c \in J = I_0 \cap I_1 \cap I_2 \cap \ldots$.
I_n hossza $\frac{b-a}{2^n}$, ez akármilyen kis $\varepsilon > 0$-nál kisebb, ha n elég nagy. $\Longrightarrow$ $J = \{c\}$.
$f(c) = 0$, mert ha pl. $f(c) = K > 0$ lenne, akkor f folytonossága miatt valamely $\varepsilon > 0$-ra $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b]$-re $f(x) \geq \frac{K}{2} > 0$. De valamelyik I_n intervallum beleesik a c-nek ebbe a környezetébe, és annak a végpontjain f pozitív és negatív értéket is felvesz. $\lightning$

Elemi függvények és inverzeik:

• trigonometrikus függvények tulajdonságai

• polinomok tulajdonságai, polinomok maradékos osztása, gyöktényezők, Horner-módszer

▶ racionális gyökteszt

• exponenciális és hiperbolikus függvények tulajdonságai

▶ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

• invertálhatóság és inverz függvény fogalma

• invertálhatóság és monotonitás kapcsolata

• inverz függvény tulajdonságai

• elemi függvények inverze: gyökfüggvények, arkusz függvények, area függvények, logaritmus függvények és tulajdonságaik

Állítás (Racionális gyökteszt)

Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ egy egész együtthatós polinom (vagyis $a_i \in \mathbb{Z}$ minden i-re), és tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke f-nek. Ekkor p osztója a_0-nak és q osztója a_n-nek.

Bizonyítás

$(p, q) = 1$ (relatív prímek, nincs közös osztójuk)

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 \qquad / \cdot q^n$$

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

Bizonyítás (folytatás)

$$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$$

$p \mid 0$ és $p \mid a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} \implies p \mid a_0 q^n$
$q \mid 0$ és $q \mid a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \implies q \mid a_n p^n$
Mivel $(p, q) = 1$, ezért szükségképpen $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

Állítás (Hiperbolikus azonosságok)

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
2. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$
3. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

Bizonyítás (Csak (1)-et)

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Differenciálhatóság

- differenciálhatóság fogalma, deriváltfüggvény, érintő egyenlete
- ▶ folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata
- ▶ $\sin x$ függvény deriváltja
- differenciálási szabályok
- ▶ szorzatfüggvény deriválja
- láncszabály
- inverz függvény deriváltja
- ▶ $\arcsin x$ függvény deriváltja
- Darboux-tétel
- elemi függvények és inverzeik deriváltja

Tétel (Differenciálható függvény folytonos)

Ha f differenciálható c-ben, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) = m \cdot 0 = 0,$$

ha m az f differenciálhányadosa c-ben.Így

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Példa

$\sin' x = \cos x$, ugyanis $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(c+h) - \sin(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin c \cos h + \cos c \sin h - \sin(c)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos c \sin h - \sin c(1 - \cos h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (\cos c)\frac{\sin h}{h} - (\sin c)\frac{1-\cos h}{h} = (\cos c) \cdot 1 - (\sin c) \cdot 0 = \cos c,$$

ugyanis

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}(\sin h)\frac{1}{1+\cos h} = 1 \cdot 0 \cdot 2 = 0$$

Tétel

Legyenek f és g c-ben differenciálható függvények, $a \in \mathbb{R}$ konstans. Ekkor

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
(fg)'(c) &= \lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) \\
&= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)
\end{aligned}$$

Példa

- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$
  $g(x) = \arcsin x$ az $f(x) = \sin x|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverze, és $f'(x) = \cos x$, így

$$(\arcsin x)' = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{mert}\ \cos(\arcsin x) > 0 \text{ a } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\text{-n.}$$

A derivált alkalmazásai:

- lokális és abszolút szélsőérték fogalma, kritikus pontok
- ▶ lokális szélsőérték szükséges feltétele
- ▶ Rolle-tétel
- Lagrange-tétel, Cauchy-tétel
- l'Hospital-szabály
- logaritmus, hatvány és exponenciális függvények nagyságrendje

Tétel

Ha f-nek c-ben lokális szélsőértéke van, és f diffható c-ben $\Longrightarrow f'(c) = 0$.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f-nek lokális maximuma van c-ben. Ekkor

$$f'(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0,$$
$$f'(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0.$$

$\Longrightarrow f'(c)$ csak 0 lehet. Minimumhelyre a bizonyítás ugyanígy működik.

Tétel (Rolle-tétel)

Ha f folytonos $[a, b]$-n, diffható (a, b)-n és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $c \in (a, b)$, hogy $f'(c) = 0$.

Bizonyítás

f folytonos $[a, b]$-n, ezért van abszolút maximuma és minimuma.
Mivel f diffható (a, b)-n, ezért ezeket értékként

- vagy a végpontokban
- vagy olyan c belső pontban veszi fel, ahol $f'(c) = 0$.

Ha f a minimum és a maximum legalább egyikét (a, b)-ben veszi fel, akkor ott $f'(c) = 0$.
Ha a maximumot és a minimumot is a végpontokban veszi fel, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény konstans, így mindenütt 0 a derivált.

Függvényvizsgálat:

- első derivált és monotonitás kapcsolata
- ▶ ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növő
- első derivált és lokális szélsőértékek kapcsolata
- második derivált és konvexitás kapcsolata
- második derivált és inflexiós pontok kapcsolata
- második derivált és lokális szélsőértékek kapcsolata

Tétel

Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$-n és diffható (a, b)-n.

- $f' \geq 0$ az (a, b)-n pontosan akkor, ha f monoton növekvő $[a, b]$-n.
- $f' \leq 0$ az (a, b)-n pontosan akkor, ha f monoton csökkenő $[a, b]$-n.

Bizonyítás (az első állítás $\Rightarrow$ iránya)

Tegyük fel, hogy $f' \geq 0$ az (a, b)-n és legyen $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$.
Alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_1, x_2]$ intervallumra.
$\Longrightarrow$ Van olyan $c \in (x_1, x_2)$, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.
$x_2 - x_1 > 0$ és $f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, azaz f monoton növekvő $[a, b]$-n.

Határozatlan integrál:

• primitív függvény és határozatlan integrál

• alapintegrálok

• általános integrálási szabályok, fordított láncszabály és speciális esetei, helyettesítéses itegrálás, parciális integrálás

Határozott integrál:

• felosztás, felosztás finomsága, reprezentáns rendszer, integrálközelítő összeg, integrálhatóság

• véges sok pont kivételével folytonos függvény integrálhatósága, véges sok pontban megváltoztatott függvény integrálja

• határozott integrál műveleti tulajdonségai

• integrálegyenlőtlenségek

▶ integrál-középértéktétel

• inetgrálfüggvény fogalma és tulajdonságai

• Newton-Leibniz-tétel

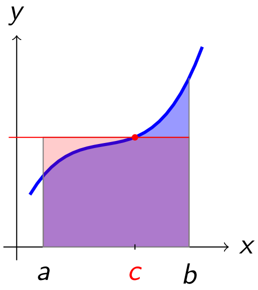
• helyettesítéses integrálás határozott integrálra

Tétel (Integrál-középértéktétel)

Ha f folytonos $[a,b]$-n $\Longrightarrow \exists c \in [a,b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c),$$

azaz f átlaga előáll függvényértékként.



Bizonyítás

f folytonos $\Longrightarrow$ a Weierstrass-tétel szerint felveszi minimumát (m) és maximumát (M) az $[a, b]$-n.
Az 1. integrálegyenlőtlenség miatt:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M.$$

m és M is függvényértékek $[a, b]$-n $\Longrightarrow$ a Bolzano–Darboux-tétel szerint f közöttük minden értéket fölvesz, így az $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ értéket is.

Integrálási technikák:

• racionális törtfüggvény integrálása - polinom + valódi törtfüggvény alakra hozás, nevező faktorizálása

▶ valós polinom felbontása első és másodfokú tényezők szorzatára, parciális törtekre bontás, elemi törtfüggvények integrálja

• fordított helyettesítés határozott és határozatlan integrál esetén, speciális helyettesítések: $R(e^x)$, $R(\sqrt[n]{x})$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Tétel

Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható első és másodfokú valós polinomok szorzatára.

Bizonyítás

Legyen $f(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ ($c_i \in \mathbb{R}\ \forall i$) valós polinom. Az algebra alaptétele szerint f-nek van gyöke $\mathbb{C}$-ben:

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}, \text{ hogy } f(\alpha) = 0.$$

Ekkor $x - \alpha$ kiemelhető: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.
Ha $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x)$ is valós polinom, és tovább faktorizálhatjuk.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $\alpha = a + bi$ nem valós, akkor

$$0 = f(\alpha) = c_n\alpha^n + \ldots + c_1\alpha + c_0$$

$$\Longrightarrow f(\overline{\alpha}) = c_n\overline{\alpha}^n + \ldots + c_1\overline{\alpha} + c_0 = \overline{c_n}\,\overline{\alpha^n} + \ldots + \overline{c_1}\,\overline{\alpha} + \overline{c_0} = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0,$$

tehát $\overline{\alpha}$ is gyöke f-nek.
De $\overline{\alpha} \neq \alpha \Rightarrow g(\overline{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha})h(x)$.
Viszont $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = (x - a - bi)(x - a + b_i) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ valós együtthatós, így $h(x)$ is valós. Ekkor egy másodfokú (valós gyök nélküli) valós polinomot emeltünk ki, és $h(x)$-et tovább faktorizálhatjuk.

Improprius integrál és a határozott integrál alkalmazásai:

• improprius integrál fogalma: integrálás végtelen intervallumon és függőleges aszimptotájú függvény integrálása

▶ az $1/x^p$ függvény integrálja az $[1,\infty)$ és $(0,1]$ intervallumokon

• összehasonlító (minoráns és majoráns) konvergenciakritériumok, általános majoráns kritérium

• területszámítás, függvény grafikonjának ívhossza, forgástest térfogata és felszíne

Az $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:
$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$, vagyis ekkor az integrál nem konvergens.
Ha $p \neq 1$, akkor:
$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$
Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték ∞, így az integrál nem konvergens.
Ha $p > 1$, akkor a fenti határérék $-\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{p-1}$.

Az $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ integrál

Ha $p = 1$, akkor:

$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} \int\limits_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} [\ln x]_c^1 = \lim\limits_{c\to 0^+} -\ln c = \infty,$ vagyis ekkor az integrál nem konvergens.

Ha $p \neq 1$, akkor:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} \int\limits_c^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{c\to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_c^1 = \lim\limits_{c\to 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{c^{1-p}}{(1-p)}.$$

Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték ∞, így az integrál nem konvergens.

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérék $\frac{1}{1-p}$, így az integrál konvergens, és értéke a határérték, vagyis $\frac{1}{1-p}$.

Sorozatok:

- sorozat fogalma, sorozat jellemzői
- sorozat határértéke és a definíció ekvivalens alakja
- Átviteli elv
- Konvergencia és korlátosság kapcsolata, monoton korlátos sorozatok
- részsorozat fogalma, részsorozat határértéke
- ▶ minden sorozatnak van monoton részsorozata
- Bolzano-Weierstrass-tétel
- Cauchy-féle konvergenciakritérium

Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Ha nincs monoton fogyó részsorozat, akkor $\forall$ véges monoton fogyó részsorozat véget ér (azaz $a_{n_1} \geq \ldots \geq a_{n_k}$-hoz nincs $n_{k+1} > n_k$, hogy $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$. De akkor a végtelen sok ilyen "utolsó tag" szigorúan monoton növő részsorozatot alkot.