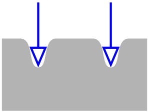
Vektorok

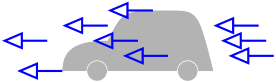
Wettl Ferenc előadása alapján

2015.09.09. és 2015.09.14.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor

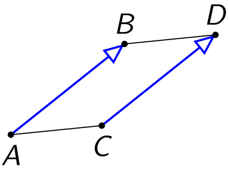
Kötött és szabad vektorok:

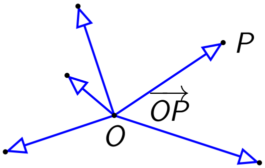




Definíció

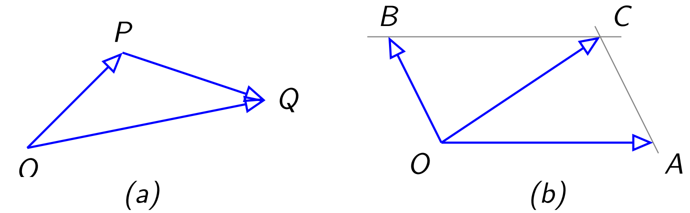
Két irányított szakasz (azaz kötött vektor) akkor és csak akkor adja ugyanazt a (szabad) vektort, ha eltolással átvihetők egymásba. Azaz $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ACDB$ egy (esetleg elfajuló) paralelogramma.



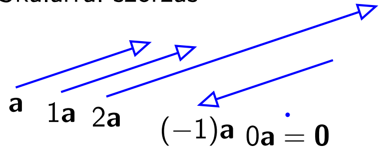


Vektorösszeadás, skalárral szorzás

Vektorösszeadás (háromszögmódszer, paralelogramma-módszer)



Skalárral szorzás



Műveleti tulajdonságok

Tétel (A vektorműveletek tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:

a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

c) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

d) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

e) $r(s\mathbf{a})=(rs)\mathbf{a}$

f) $r(\mathbf{a}+\mathbf{b})=r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$

g) $(r+s)\mathbf{a}=r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$

h) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ és $0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

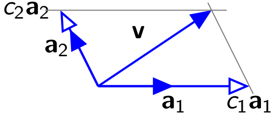
Lineáris kombináció

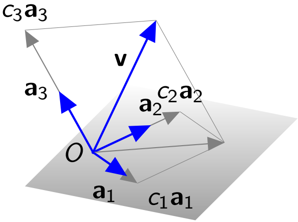
Definíció (Lineáris kombináció)

Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. A $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.





Kollineáris és komplanáris vektorok

Definíció

Vektorok egy halmaza

- kollineáris (párhuzamos), ha a vektorok egy egyenesbe tolhatók, azaz közös kezdőpontból indítva egy egyenesben vannak
- komplanáris (egy síkba esik), ha a vektorok egy síkba tolhatók, azaz közös kezdőpontból indítva egy síkban vannak.

A skalárral való szorzás geometriai jelentéséből és a paralelogrammaszabályból következik, hogy

Tétel

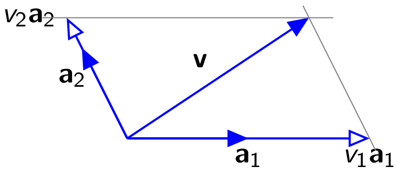
Kollineáris (ill. komplanáris) vektorok összes lineáris kombinációja kollineáris (ill. komplanáris).

Egyértelmű lineáris kombináció

Tétel (Síkbeli vektor felbontása)

Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ két nem párhuzamos vektor, akkor a síkjuk minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

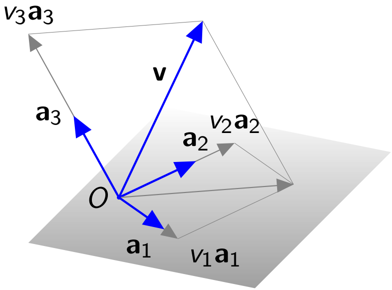


Egyértelmű lineáris kombináció

Tétel (Térbeli vektor felbontása)

Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három nem egy síkba eső vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$



Skaláris szorzás

Definíció (Két vektor skaláris szorzata)

Két vektor skaláris szorzatán a vektorok abszolút értékének (azaz hosszának) és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata tehát

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

A skaláris szorzás tulajdonságai

Tétel (A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai)

Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Tétel (Mikor 0 a skaláris szorzat?)

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőleges, ha bármelyikük a zérusvektor, vagy ha hajlásszögük $\pi/2$.)

Hosszúság és szög

Vektor hossza
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2$, tehát

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}.$$

Két pont (vektor) távolsága

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

Két vektor által bezárt szög: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle \in [0, \pi]$, amelyre

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Két fontos összefüggés

Tétel (Pithagorász-tétel)

Az **a** és **b** vektorokra pontosan akkor teljesül az

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha **a** és **b** merőlegesek egymásra.

Tétel (Háromszög-egyenlőtlenség)

Bármely **a** és **b** vektorra

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha **a** és **b** párhuzamosak és egyirányúak.

Egységvektorral való szorzás

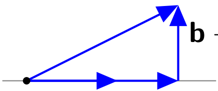
Tétel (Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése)

Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}$ szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\hat{\mathbf{b}}$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.

Merőleges vetítés

$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektora. Eszerint

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}.$$



Tétel (Vektor felbontása merőleges összetevőkre)

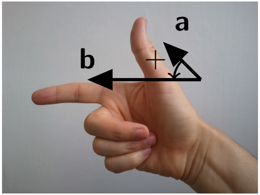
Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetülete

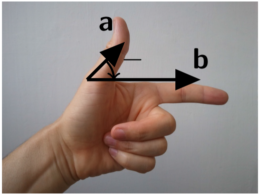
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

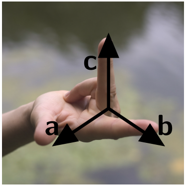
A $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ egyenesére merőleges összetevője

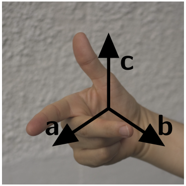
$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

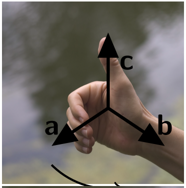
Orientáció

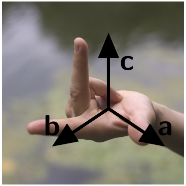


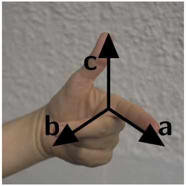


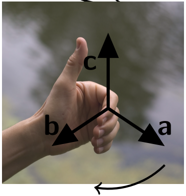












Vektoriális szorzás

Definíció (Vektoriális szorzat)

A 3-dimenziós tér két vektorának vektoriális szorzatán azt a vektort értjük, melynek

- abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
- iránya merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

- az abszolút érték nem negatív, mert sin a $[0, \pi]$-n nem negatív.
- Képletben: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$.

Vektoriális szorzás

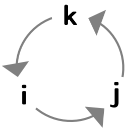
Példa (**i**, **j**, **k** vektoriális szorzata)

i, **j**, **k** páronként merőleges egységvektorok, amelyek jobbrendszert alkotnak. Készítsünk művelettáblát vektoriális szorzataikról!

Megoldás

Mivel $(\mathbf{i}, \mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



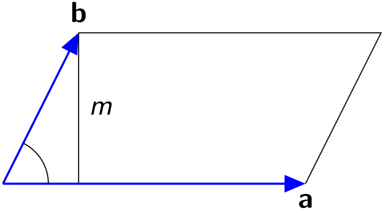
Vektoriális szorzás geometriai tulajdonságai

Tétel (Mikor $\mathbf{0}$ a vektoriális szorzat?)

Két térbeli vektor vektoriális szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

Tétel (Vektoriális szorzat abszolút értékének geometriai jelentése)

Két vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.



Vektoriális szorzás műveleti tulajdonságai

Tétel (Vektoriális szorzás műveleti tulajdonságai)

Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

A vektoriális szorzás nem kommutatív (hanem alternáló) és nem asszociatív. Pl.

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \text{ de } \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Paralelepipedon térfogata

Példa (Paralelepipedon térfogata)

Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát!

Megoldás

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ merőleges a paralelogramma síkjára. Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ irányú egységvektor:

$$\mathbf{e}=\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|},$$

a paralelepipedon magassága $|\mathbf{e}\cdot\mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\left|\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\cdot\mathbf{c}\right|=|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|\,.$$

Vegyes szorzat

A paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

Definíció (Vegyes szorzat)

A 3-dimenziós tér három tetszőleges **a**, **b** és **c** vektorából képzett

$$\mathbf{abc} := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

kifejezést a három vektor vegyes szorzatának nevezzük.

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.$$

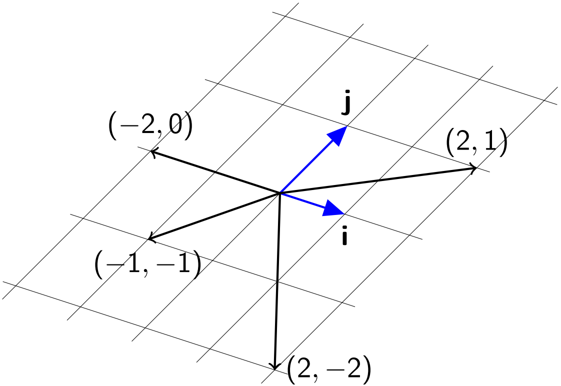
Vegyes szorzat geometriai jelentése

- A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelelpipedon előjeles térfogatának nevezzük.
- Ez pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Tehát e skalár előjele a három vektor orientációját adja.
- A három vektor pontosan akkor esik egy síkba, ha $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.

Összefoglalás

- szabad vektor fogalma
- két vektor összege, vektor skalárszorosa, vektorok lineáris kombinációja
- vektorok skaláris szorzata, mikor 0 a skaláris szorzat?
- egységvektorral való szorzás geometriai jelentése
- vektor abszolút értéke, és annak kiszámítása
- Pithagorász-tétel, Háromszög-egyenlőtlenség
- orientáció, jobbrendszer, balrendszer
- vektoriális szorzás, mikor 0 a vektoriális szorzat?
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ geometriai jelentése: a paralelogramma területe
- vegyes szorzat, mikor 0 a vegyes szorzat?
- a vegyes szorzat geometriai jelentése: paralelepipedon előjeles térfogata

Vektorok és pontok koordinátái



i és **j** vektorok egység hosszúak és merőlegesek egymásra, vagyis ortnormált rendszert alkotnak (térben **i**, **j**, **k** ortonormált jobbrendszer)

Műveletek koordinátás alakban

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, λ tetszőleges valós szám

Összeadás:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Skalárral való szorzás:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

Nullvektor:

$$\mathbf{0} = (0, 0)$$

Műveletek koordinátás alakban

Tétel

A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2, \text{ illetve } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Bizonyítás

Síkbeli esetre: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j}) \cdot (v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}) \\ &= u_1 v_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2 v_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

Műveletek koordinátás alakban

Tétel (Vektoriális szorzat)

A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektoriális szorzata

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Bizonyítás

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= a_2 b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3 b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3 b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1 b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\
&+ a_1 b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2 b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} \\
&= a_2 b_3\mathbf{i} - a_3 b_2\mathbf{i} + a_3 b_1\mathbf{j} - a_1 b_3\mathbf{j} + a_1 b_2\mathbf{k} - a_2 b_1\mathbf{k} \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).
\end{aligned}$$

Műveletek koordinátás alakban

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

a) $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

b)
$$\begin{aligned} &(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + \\ &\quad (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + \\ &\qquad (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Műveletek koordinátás alakban

Példa (Paralelogramma területe)

Az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített paralelogramma területe $|ad - bc|$.

Megoldás

$(a, b, 0)$ és $(c, d, 0)$ vektorok vektoriális szorzata

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.
Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad - bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak.

Az n dimenziós tér

Definíció

A valós szám n-esek összességét n dimenziós valós térnek nevezzük.

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

Műveletek az n dimenziós térben

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \lambda a_n)$$

$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$

Lineáris függetlenség

Definíció (Vektorok függetlensége)

Egy $\mathcal{V} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \}$ vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezünk, ha a zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

- Ha a $\mathcal{V}$ vektorrendszer nem lineárisan független, akkor lineárisan összefüggőnek nevezzük.
- Az definíció szerint egyetlen vektorból álló vektorrendszert akkor tekintünk lineárisan függetlennek, ha a vektor nem a zérusvektor.
- A sík 2 vektora lineárisan független, ha nem esnek egy egyenesbe.
- A tér 3 vektora lineárisan független, ha nem esnek egy síkba.

Lineáris függetlenség ekvivalens alakja

Tétel

Egy $\mathcal{V} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$ vektorrendszer $k \geq 2$ esetén pontosan akkor lineárisan független, ha egyik vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás

"$\Longrightarrow$" Indirekt: $\exists\ \mathbf{v}_i = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + c_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + c_k\mathbf{v}_n$
Átrendezve:

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + (-1)\mathbf{v}_i + c_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \ \lightning$$

"$\Longleftarrow$" Indirekt: $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + +c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ és $\exists c_i \neq 0$ Átrendezve:

$$\mathbf{v}_i = \frac{-c_1}{c_i}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{-c_{i-1}}{c_i}\mathbf{v}_{i-1} + \frac{-c_{i+1}}{c_i}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + \frac{-c_k}{c_i}\mathbf{v}_k \ \lightning$$

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció

Az $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ n dimenziós vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Tétel (A skaláris szorzás tulajdonságai)

Legyen **u**, **v** és **w** az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

a)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	a művelet fölcserélhető (kommutatív)
b)	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	disztributív
c)	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	a két szorzás kompatibilis
d)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció (Abszolút érték)

Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, azaz

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Tétel (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség)

Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció (Szög, merőlegesség, távolság)

Legyen $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora.

- Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinuszát az alábbi törttel definiáljuk:
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$
- Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok merőlegesek egymásra, ha $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két vektor távolságának nevezünk, a
$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$$
értéket értjük.

Összefoglalás

- vektorok koordinátás alakja
- skaláris szorzat korrdinátás alakban
- vektoriális szorzat koordinátás alakban
- az n dimenziós tér
- lineáris függetlenség és ekvivalens alakja
- skaláris szorzat $\mathbb{R}^n$-ben és tulajdonságai
- vektorok hossza, szöge, távolsága $\mathbb{R}^n$-ben
- Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség