

2. MAT A1 vizsga. 2016-01-05 Neptun: \_\_\_\_\_

Név: \_\_\_\_\_ Előadás: \_\_\_\_\_

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! (11 pont)

(a)  $c$  ugráshelye  $f$ -nek, ha a  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  és  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  határértékek léteznek és **végesek**, de **különbözők**.

(b) **Cauchy-féle középértéktétel**: Ha  $f$  és  $g$   **folytonosak  $[a, b]$ -n és differenciálhatóak  $(a, b)$ -n**, továbbá  $g'$ -nek nincs zérushelye  $(a, b)$ -n, akkor van olyan  $c \in (a, b)$ , hogy  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

(c) **Newton-Leibniz-tétel**: Ha  $f$  és  $F$   **folytonosak  $[a, b]$ -n**, és  $f(x) = F'(x)$  minden  $x \in (a, b)$ -re, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

(d) Egy  $[a_n]$  sorozat határértéke  $A$ , ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon).$$

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Ha az  $f$  valós függvény kétszer differenciálható  $(a, b)$ -n, és  $c \in (a, b)$ -ben  $f''(c) = 0$ , akkor  $c$ -ben  $f$ -nek inflexiós pontja van. (2 pont)

Pl.  $f(x) = x^4$  esetében  $f'(x) = 4x^3$  és  $f''(x) = 12x^2$ , így  $f''(0) = 0$ , de mivel  $f''(x) \geq 0$ , így  $f$  mindenhol konvex, ezért sehol sincs inflexiós pontja.

**Helyesen<sub>1</sub>**: Ha az  $f$  valós függvény kétszer differenciálható  $(a, b)$ -n, és  $c \in (a, b)$ -ben  $f''$  előjelet váltóan 0, akkor  $c$ -ben  $f$ -nek inflexiós pontja van.

**Helyesen<sub>2</sub>**: Ha az  $f$  valós függvény kétszer differenciálható  $(a, b)$ -n, és  $c \in (a, b)$ -ben inflexiós pontja van, akkor  $f''(c) = 0$ .

b) Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható elsőfokú valós polinomok szorzatára. (2 pont)

Pl.  $x^2 + 1$  nem bontható fel elsőfokúak szorzatára, hiszen nincs valós gyöke.

**Helyesen<sub>1</sub>**: Minden legalább elsőfokú valós polinom felbontható elsőfokú és másodfokú valós polinomok szorzatára.

**Helyesen<sub>2</sub>**: Minden legalább elsőfokú komplex polinom felbontható elsőfokú komplex polinomok szorzatára.

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Írjuk fel az  $\frac{5+i}{2+3i}$  komplex számot algebrai és trigonometrikus alakban! (2 pont)

$$\frac{5+i}{2+3i} = \frac{5+i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{13-13i}{2^2+3^2} = 1-i$$

$$\text{Trigonometrikus alakban: } \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

b) Mi a  $(3, -4, 2)$  vektor vetületvektora a  $(2, -1, 1)$  vektorra? (2 pont)

$$\frac{(3, -4, 2)(2, -1, 1)}{(2, -1, 1)(2, -1, 1)} \cdot (2, -1, 1) = \frac{12}{6}(2, -1, 1) = (4, -2, 2)$$

c) Határozzuk meg az  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  függvény limeszét 0-ban és  $\infty$ -ben! (4 pont)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

$\infty$ -ben: mivel  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , így  $0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$ ,

így a rendőrelv alapján  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$ .

d) Hol monoton növekvő és hol monoton fogyó az  $x^2 \ln x$  függvény? (3 pont)

A függvény értelmezési tartománya  $(0, \infty)$ .

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

(nincs az értelmezési tartományban) vagy  $2 \ln x + 1 = 0$

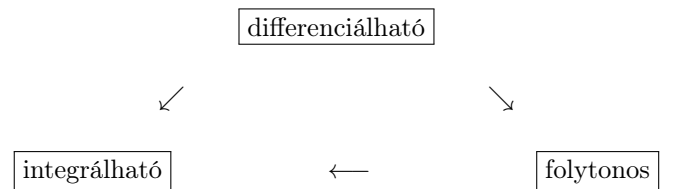
$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$x \in (0, \frac{1}{\sqrt{e}}) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$  monoton csökkenő

$x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$  monoton növekvő

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Rajzoljuk be, hogy az  $[a, b]$ -n értelmezett  $f$  függvényre melyik tulajdonságból melyik következik! (3 pont)



b) Adjuk meg az  $\int_{-1/2}^2 \frac{1}{x+1} dx$  integrál  $P = \{-\frac{1}{2}, 0, 1, 2\}$  felosztáshoz és  $\mathbf{c} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$  reprezentánsrendszerhez tartozó integrálközelítő összegét! (2 pont)

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot 1 + \frac{1}{2+1} \cdot 1 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2$$

c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékészletét! (4 pont)

	értelmezési tartomány	értékészlet
cth $x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
cos(arccos $x$ )	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a)  $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$  (4 pont)

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x+1)}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A + B &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 2 \end{aligned} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx =$$

$$\int -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} dx = -\ln|x+1| + 2 \ln|x+2| + c$$

$$\begin{aligned}
b) \int_2^{\infty} \frac{2}{x^2+4} dx & \quad (5 \text{ pont}) \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right) \cdot 2 \right]_2^b = \\
& \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{b}{2} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \int x \sin(2x) dx & \quad (4 \text{ pont}) \\
&= -\frac{1}{2}x \cos(2x) - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) dx = -\frac{1}{2}x \cos(2x) + \\
& \frac{1}{4} \sin(2x) + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d) \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx & \quad (3 \text{ pont}) \\
1. \text{ mo: } &= \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)' dx = \\
& \left[ \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} 1^2 - 0 = \frac{1}{2} \\
2. \text{ mo: } &= \int_0^{\pi/4} -(-\sin x) \cdot \cos^{-3} x dx = \\
& \left[ -\frac{\cos^{-2} x}{-2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

## 6.

a) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a skaláris szorzat koordinátás alakjára vonatkozó tételt 2 dimenzióban! (3 pont)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\text{Biz.: } (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}) \cdot (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}) = a_1 b_1 \mathbf{i} \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \mathbf{j} + a_2 b_1 \mathbf{j} \mathbf{i} + a_2 b_2 \mathbf{j} \mathbf{j} = a_1 b_1 \cdot 1 + a_1 b_2 \cdot 0 + a_2 b_1 \cdot 0 + a_2 b_2 \cdot 1 = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Rolle-tételt! (6 pont)

Ha  $f$  folytonos az  $[a, b]$ -n, differenciálható  $(a, b)$ -n és  $f(a) = f(b)$ , akkor  $\exists c \in (a, b)$ , hogy  $f'(c) = 0$ .

Biz.: A Weierstrass-tétel értelmében, mivel  $f$  folytonos  $[a, b]$ -n, azért felveszi valahol a maximumát és a minimumát. Ha ezek közül valamelyiket  $(a, b)$ -n veszi fel, akkor ez lokális szélsőérték hely is, és mivel itt  $f$  differenciálható, azért  $f'$  itt 0. Ha mindkét extrémum a végpontokban van, akkor mivel  $f(a) = f(b)$ , azért  $f$  ilyenkor konstans  $[a, b]$ -n, és így mindenütt 0 a deriváltja.