

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! (10 pont)

(a) Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorra

.....

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha .....

.....

(b) Bolzano-tétel:

Ha  $f$  ..... az  $[a, b]$  zárt intervallumon,

és  $f(a)$  és  $f(b)$  .....,

akkor  $\exists$  ....., hogy .....

(c) l'Hospital-szabály: Legyen  $f$  és  $g$  két olyan valós függvény, melyek

- ..... egy  $I$  nyílt intervallumon (kivéve esetleg egy  $a$  pontot)
- ha  $a \neq x \in I$ , akkor  $g'(x)$  .....,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  és  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  mindegyike ....., vagy mindegyik .....
- és létezik az  $L = \dots\dots\dots$  határérték.

Ekkor  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Legyen  $f$  egy valós függvény, mely folytonos  $[a, b]$ -n és differenciálható  $(a, b)$ -n. Ekkor ha  $f$  szigorúan monoton, akkor  $f' > 0$  az  $(a, b)$  intervallumon. (2 pont)

b) Hol folytonos az  $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$  függvény, és ahol nem, ott milyen szakadása van? (3 pont)

c) Milyen elemi törtfüggvények összegére lehet felbontani az  $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$  racionális törtfüggvényt? (A felbontást elég paraméteresen felírni, nem kell kiszámolni.) (2 pont)

d) Adjuk meg annak az egyenesnek egy paramétermentes egyenletrendszerét, amely átmege az origón és merőleges az  $x + 2y - z = 3$  síkra! (2 pont)

e) Mely pontokban vízszintes az  $f(x) = \frac{x^3}{\ln x^2}$  függvény érintője? (3 pont)

b) Minden sorozatnak van konvergens részsorozata. (2 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Adjuk meg algebrai alakban azt a komplex számot, amellyel való szorzás az origó körüli a  $-60^\circ$ -os forgatást valósítja meg a komplex számsíkon! (2 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Ha az  $f$  függvény inverze  $g$ , és  $f(2) = 1$ ,  $f'(2) = 3$ , akkor mivel egyenlő  $g'(1)$ ? (2 pont)

- b) Rajzoljuk be, hogy az  $f$  valós függvény esetében melyik tulajdonságból melyik következik! (3 pont) d)  $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$  (4 pont)

$f$  szigorúan monoton

$f$  invertálható

$f$  monoton

- c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

	értelmezési tartomány	értékkészlet
$e^{1/x^2}$		
$\operatorname{arth} x$		

6.

- a) Bizonyítsuk be, hogy  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = 0$ ! (3 pont)

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a)  $\int x \ln x \, dx$  (4 pont)

- b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be az integrálközéptértéktételt! (6 pont)

b)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}} \, dx$  (3 pont)

c)  $\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$  (5 pont)