

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! (10 pont)

(a) Háromszög-egyenlőtlenség: Bármely \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorra

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha \mathbf{a} és \mathbf{b} párhuzamosak és egyirányúak.

(b) Bolzano-tétel:

Ha f folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon,

és $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelűek (azaz $f(a)f(b) < 0$),

akkor $\exists c \in (a, b)$, hogy $f(c) = 0$.

(c) l'Hospital-szabály: Legyen f és g két olyan valós függvény, melyek

- differenciálhatók egy I nyílt intervallumon (kivéve esetleg egy a pontot)
- ha $a \neq x \in I$, akkor $g'(x) \neq 0$,
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ mindegyike 0, vagy mindegyik $\pm\infty$
- és létezik az $L = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték.

Ekkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Legyen f egy valós függvény, mely folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n. Ekkor ha f szigorúan monoton, akkor $f' > 0$ az (a, b) intervallumon. (2 pont)

Ellenpélda: $f(x) = x^3$ szigorúan monoton növe az egész \mathbb{R} -en, de $f'(0) = 0$. (Tehát az állítás még akkor sem igaz, ha „szig. monoton” helyett „szig. monoton növe”-t írunk.)

Helyesen: ... Ha $f' > 0$ (a, b) -n, akkor f szig. mon. növe $[a, b]$ -n.

Vagy: ... Ha f monoton növe (a, b) -n, akkor $f' \geq 0$ (a, b) -n.

b) Minden sorozatnak van konvergencia részsorozata. (2 pont)

Ellenpélda: $a_n = n$ limesze ∞ , tehát minden részsorozata is ∞ -hez tart, így nem konvergencia.

Helyesen: Minden korlátos sorozatnak van konvergencia részsorozata.

Vagy: Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Adjuk meg algebrai alakban azt a komplex számot, amellyel való szorzás az origó körüli a -60° -os forgatást valósítja meg a komplex számsíkon! (2 pont)

$$\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

b) Hol folytonos az $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ függvény, és ahol nem, ott milyen szakadása van? (3 pont)

f folytonos ott, ahol $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), mert két folytonos függvény hányadosa, ahol a nevező nem 0.

$x_0 = 0$ -ban $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x^2 = 1 \cdot 0 = 0$, tehát itt megszüntethető szakadás van (hézagpont).

$x_0 = k\pi$ -ben ($k \neq 0$) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, illetve $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$, ezért itt pólus van.

c) Milyen elemi törtfüggvények összegére lehet felbontani az $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$ racionális törtfüggvényt? (A felbontást elég paraméteresen felírni, nem kell kiszámolni.) (2 pont)

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

d) Adjuk meg annak az egyenesnek egy paramétermentes egyenletrendszerét, amely átmegy az origón és merőleges az $x+2y-z=3$ síkra! (2 pont)

A sík normálvektora $(1, 2, -1)$ megegyezik az egyenes irányvektorával. A paramétermentes egyenletrendszer:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-1}, \text{ azaz } x = \frac{y}{2} = -z.$$

e) Mely pontokban vízszintes az $f(x) = \frac{x^3}{\ln x^2}$ függvény érintője? (3 pont)

Ott vízszintes az érintő, ahol a derivált 0.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x^2 - x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\ln^2 x^2} = \frac{x^2(3 \ln x^2 - 2)}{\ln^2 x^2}.$$

$x = 0$ -ban f nincs értelmezve, így a megoldás csak $\ln x^2 = \frac{2}{3} \iff x^2 = e^{2/3} \iff x = \pm e^{1/3} = \pm \sqrt[3]{e}$

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

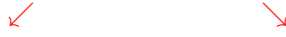
a) Ha az f függvény inverze g , és $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$, akkor mivel egyenlő $g'(1)$? (2 pont)

$$f(2) = 1 \implies g(1) = 2, \text{ és}$$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}.$$

b) Rajzoljuk be, hogy az f valós függvény esetében melyik tulajdonságból melyik következik! (3 pont)

f szigorúan monoton



f invertálható

f monoton

c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

	értelmezési tartomány	értékkészlet
e^{1/x^2}	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(1, \infty)$
$\operatorname{arth} x$	$(-1, 1)$	\mathbb{R}

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int x \ln x \, dx$ (4 pont)

Parciális integrálással:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx$ (3 pont)

$(x^3+1)' = 3x^2$, így a fordított láncszabályból

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx &= \int \frac{1}{3}(x^3+1)^{-1/2} \cdot (3x^2) \, dx = \\ &= \frac{1}{3}(x^3+1)^{1/2} \cdot 2 + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C \end{aligned}$$

c) $\int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx$ (5 pont)

Improprius integrál, mert $\frac{1}{2}$ -ben a nevező 0.

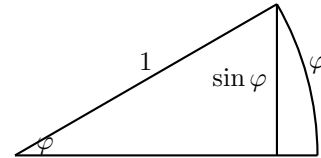
$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \, dx &= \lim_{b \rightarrow (1/2)^-} \int_0^b \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \, dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow (1/2)^-} \left[2 \arcsin(2x) \cdot \frac{1}{2} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow (1/2)^-} \arcsin(2b) - \arcsin 0 = \arcsin 1 - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

d) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ (4 pont)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

6.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = 0$! (3 pont)



Az ábra alapján $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ -re $0 \leq \sin \varphi \leq \varphi$. Mivel $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$, ebből

$0 \leq |\sin \varphi| \leq |\varphi|$, ha $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\lim_{\varphi \rightarrow 0} |\varphi| = 0 \Rightarrow$ A rendőrelv miatt $\lim_{\varphi \rightarrow 0} |\sin \varphi| = 0$.
 $\Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin \varphi = 0$.

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be az integrálközéptértéktételt! (6 pont)

Ha f folytonos $[a, b]$ -n, akkor van olyan $c \in [a, b]$, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Bizonyítás: Weierstrass-tétel $\Rightarrow f$ felveszi a minimumát (m) és maximumát (M) $[a, b]$ -n.

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

$\exists c_1, c_2 \in [a, b] : f(c_1) = m$, és $f(c_2) = M$.

Bolzano–Darboux-tétel $\Rightarrow \exists c$ a c_1 és c_2 között (így $[a, b]$ -ben), hogy

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$