

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! (7 pont)

(a) *Lineáris függetlenség definíciója:* Egy \mathbb{R}^n -beli $\mathcal{V} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \}$ vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezünk, ha $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}^n$ -re csak úgy lehet

.....
 ha

(b) Az (a, ∞) intervallumon értelmezett f függvényre $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, ha $\forall \dots \exists \dots$, hogy $x > K \Rightarrow \dots$

(c) *Darboux-tétel:* Ha f egy I intervallumon differenciálható függvény, akkor deriváltja Darboux-tulajdonságú, azaz tetszőleges $a < b$ I -beli számokra és olyan c -re, amely
 $\exists x_0 \in \dots$, hogy

b) Határozzuk meg az $f(x) = xe^{2/x}$ függvény ferde aszimptotáját ∞ -ben! (4 pont)

c) Számítsuk ki az $f(x) = x^{\arctg x}$ függvény deriváltfüggvényét! (3 pont)

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy egy tanult igaz állítást kapjunk!

a) Ha az f valós függvénynek inflexiós pontja van c -ben, akkor ott $f''(c) = 0$. (2 pont)

d) Írjuk fel az $x - 1 = \frac{z}{2}$, $y = 4$ egyenletrendszerrel megadott egyenes paraméteres egyenletrendszerét, és keressük meg az egyenes metszéspontját az yz koordinátasíkkal! (2 pont)

b) Ha f az (a, b) intervallumon folytonos függvény, akkor itt felveszi maximumát és minimumát. (2 pont)

e) Adjunk meg egy olyan vektort \mathbb{R}^3 -ben, amely merőleges az $(1, 0, 1)$ és $(1, 2, 2)$ vektorokra, és hossza 1! (2 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Írjuk fel a $z = (1 + i)^4$ komplex számot és z összes negyedik gyökét algebrai alakban! (3 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Írjuk fel a $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \setminus B \text{ vagy } x \notin A\}$ halmazt az $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazokból halmazműveletek $(\cap, \cup, \bar{})$ segítségével, és egyszerűsítsük a kifejezést! (2 pont)

- b) Az f függvény értelmezve van az $[a, b]$ intervallumon. Rajzoljuk be, hogy az $[a, b]$ -n az f valós függvény melyik tulajdonságból melyik következik! (3 pont)

f -nek van globális maximuma

f folytonos

f monoton

- c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

	értelmezési tartomány	értékkészlet
$e^{\ln(x+1)}$		
$\arccos x$		

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$ (5 pont)

b) $\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} dx$ (4 pont)

c) $\int e^x \sin x dx$ (4 pont)

d) $\int \frac{e^{2x+1} - 1}{e^x} dx$ (3 pont)

- 6.

- a) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt! (4 pont)

- b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a racionális gyökteszt tételét! (6 pont)