4. MAT A1 vizsga. 2016-01-19 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ________________ Előadás: ____

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, definíciókat! *(7 pont)*

(a) Lineáris függetlenség definíciója: Egy $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \,\}$ vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezünk, ha $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}^n$-re csak úgy lehet $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

(b) Az (a, ∞) intervallumon értelmezett f függvényre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, ha $\forall\ L\ \exists\ K$, hogy $x > K \Rightarrow f(x) < L$.

(c) Darboux-tétel: Ha f egy I intervallumon differenciálható függvény, akkor deriváltja Darboux-tulajdonságú, azaz tetszőleges $a < b$ I-beli számokra és olyan c-re, amely $f'(a)$ és $f'(b)$ között van, $\exists x_0 \in\ [a, b]$, hogy $f'(x_0) = c$.

2. Az alábbi állítások mindegyike hamis. Adjunk rájuk ellenpéldát és javítsuk ki az állítást úgy, hogy egy tanult igaz állítást kapjunk!

a) Ha az f valós függvénynek inflexiós pontja van c-ben, akkor ott $f''(c) = 0$. *(2 pont)*
Helyesen: Ha az f valós függvény kétszer diffható (a, b)-n, és $c \in (a, b)$-ben inflexiós pontja van, akkor ott $f''(c) = 0$.
Ellenpélda: $f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f''(x) = -\dfrac{2}{9}x^{-5/3}$. $x = 0$-ban f'' nincs értelmezve, de itt mégis inflexiós pontja van, hiszen előtte f'' pozitív, vagyis f konvex, utána pedig f'' negatív, vagyis f konkáv, és f grafikonjának van érintője a 0-ban, ha csak függőleges érintő is.

b) Ha f az (a, b) intervallumon folytonos függvény, akkor itt felveszi maximumát és minimumát. *(2 pont)*
Helyesen: Ha f az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény, akkor itt felveszi maximumát és minimumát.
Ellenpélda: $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény a $(0, 1)$ intervallumon nem veszi fel a maximumát, mert $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

3. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Írjuk fel a $z = (1 + i)^4$ komplex számot és z összes negyedik gyökét algebrai alakban! *(3 pont)*
$(1 + i)^4 = \left((1 + i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$
$1 + i$ nyilván olyan komplex szám, aminek a 4. hatványa $(1 + i)^4$, vagyis ez az egyik negyedik gyök. A többi ennek $90°$, $180°$, $270°$-os elforgatottja, vagyis a másik 3 gyök $-1 + i, -1 - i, 1 - i$
(Vagy másképp: $1 + i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow$ $(1 + i)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos\pi + i\sin\pi) = 4(-1 + i0) = -4$, $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{4}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$ $\Rightarrow 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$.)

b) Határozzuk meg az $f(x) = xe^{2/x}$ függvény ferde aszimptotáját ∞-ben! *(4 pont)*
A ferde aszimptota egyenlete $y = ax + b$, ahol:
$a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{2/x} = e^0 = 1$
$b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim\limits_{x\to\infty} x(e^{2/x} - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2/x} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L'H(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2/x} \cdot 2 \cdot (\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to\infty} 2e^{2/x} = 2e^0 = 2$,
vagyis az aszimptota egyenlete $y = x + 2$.

c) Számítsuk ki az $f(x) = x^{\operatorname{arctg} x}$ függvény deriváltfüggvényét! *(3 pont)*
$\left(x^{\operatorname{arctg} x}\right)' = \left(\left(e^{\ln x}\right)^{\operatorname{arctg} x}\right)' = \left(e^{\operatorname{arctg} x \ln x}\right)' = e^{\operatorname{arctg} x \ln x}(\operatorname{arctg} x \ln x)' = x^{\operatorname{arctg} x}\left(\dfrac{1}{1 + x^2}(\ln x) + (\operatorname{arctg} x)\dfrac{1}{x}\right)$

d) Írjuk fel az $x - 1 = \dfrac{z}{2}$, $y = 4$ egyenletrendszerrel megadott egyenes paraméteres egyenletrendszerét, és keressük meg az egyenes metszéspontját az yz koordinátasíkkal! *(2 pont)*
$t = x - 1 = \dfrac{z}{2} \Rightarrow$ A paraméteres egyenletrendszer $x = 1 + t$, $y = 4$, $z = 2t$. Az yz koordinátasíkkal való metszéspont esetében $x = 0$, vagyis $t = -1 \Rightarrow (0, 4, -2)$.

e) Adjunk meg egy olyan vektort $\mathbb{R}^3$-ben, amely merőleges az $(1, 0, 1)$ és $(1, 2, 2)$ vektorokra, és hossza 1! *(2 pont)*
$(1, 0, 1) \times (1, 2, 2) = (0\cdot 2 - 2\cdot 1, -(1\cdot 2 - 1\cdot 1), 1\cdot 2 - 0\cdot 1) = (-2, -1, 2)$ - merőleges a két megadott vektorra. Ahhoz, hogy 1 legyen a hossza, le kell osztani a hosszával: $\frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2}}(-2, -1, 2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

4. Oldjuk meg az alábbi rövid feladatokat!

a) Írjuk fel a $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \setminus B \text{ vagy } x \notin A\}$ halmazt az $A, B \subseteq \mathbb{R}$ halmazokból halmazműveletek $(\cap, \cup, \overline{})$ segítségével, és egyszerűsítsük a kifejezést! *(2 pont)*
$C = (A \setminus B) \cup \overline{A} = (A \cap \overline{B}) \cup \overline{A} = (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = \mathbb{R} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\left(= \overline{A \cap B}\right)$.

b) Az f függvény értelmezve van az $[a, b]$ intervallumon. Rajzoljuk be, hogy az $[a, b]$-n az f valós függvény melyik tulajdonságból melyik következik! *(3 pont)*

$\boxed{f\text{-nek van globális maximuma}}$

$\nearrow$ $\nwarrow$

$\boxed{f \text{ folytonos}}$ $\boxed{f \text{ monoton}}$

c) Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! *(4 pont)*

	értelmezési tartomány	értékkészlet
$e^{\ln(x+1)}$	$(-1, \infty)$	$(0, \infty)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$

5. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$ *(5 pont)*

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} x: & A+B=0 \\ 1: & A=1 \end{matrix} \quad \Rightarrow A=1,\ B=-1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x - \ln(x+1)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln\frac{b}{b+1} - \ln\frac{1}{2} = \ln\left(\lim_{b\to\infty}\frac{b}{b+1}\right) + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = 0 + \ln 2 = \ln 2$$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x$ *(4 pont)*

$$\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} (\operatorname{ch} x)^{-2}(\operatorname{ch} x)'\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\operatorname{ch} x)^{-1}}{-1}\right]_0^{\ln 2} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(\ln 2)} + \frac{1}{\operatorname{ch} 0} = -\frac{2}{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}} + 1 = -\frac{2}{2+\frac{1}{2}} + 1 == -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}$$

c) $\displaystyle\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$ *(4 pont)*

$$I = \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,\mathrm{d}x\right) = e^x\sin x - e^x\cos x - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^x\sin x - e^x\cos x) + c$$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x+1}-1}{e^x}\,\mathrm{d}x$ *(3 pont)*

$$\int \frac{e^{2x+1}-1}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int e^{x+1} - e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{x+1} + e^{-x} + c$$

6.

a) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó szabályt! *(4 pont)*

Ha f és g differenciálhatóak a c pontban, akkor $f\cdot g$ is differenciálható c-ben, és $(fg)'(c) = f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$.

Bizonyítás:

$$(fg)'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} =$$

$$= \lim_{x\to c}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c} =$$

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x) + f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\right) =$$

$$f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$$

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a racionális gyökteszt tételét! *(6 pont)*

Legyen $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1x + a_0$ egy egész együtthatós polinom, és tegyük fel, hogy a $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ tovább már nem egyszerűsíthető racionális szám gyöke f-nek. Ekkor p osztója a_0-nak és q osztója a_n-nek.

Bizonyítás: $(p,q)=1$ (relatív prímek)

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1\frac{p}{q} + a_0 \quad /\cdot q^n$$

$$0 = a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$$

$p \mid 0$ és $p \mid a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} \Longrightarrow p \mid a_0q^n$

$q \mid 0$ és $q \mid a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \Longrightarrow q \mid a_np^n$

Mivel $(p,q)=1$, ezért szükségképpen $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.