

Kombinatorika feladatmegoldó szeminárium

2. feladatsor

Soltész Dániel <protosdrone@gmail.com>

Kovács István <kovika91@gmail.com>

<http://www.math.bme.hu/~soltesz/kombifelmegszem.html>

2014. február 24. IB 134. 16:15-től

(1) Egy földönkívüli fajnak három neme van: male, female, és emale. Egy házaspár három különböző nemű személyből áll, akik páronként szeretik egymást. Minden személy legfeljebb egy házaspárhoz tartozhat. Egy különleges tulajdonsága ennek a fajnak, hogy a szerelem mindig kölcsönös. Ez a faj egy expedíciót indít, hogy benépesítsen egy bolygót. Mindhárom nemből pontosan n -et küldenek. Tudjuk, hogy az expedíció minden tagja pontosan $k - k$ másik személyt szeret a másik két nemből. A feladat az, hogy a lehető legtöbb házaspárt alkossanak, ahhoz hogy minél hamarabb benépesítsék a bolygót.

Bizonyítsuk be, hogy ha n páros és $k = \frac{n}{2}$, akkor elképzelhető, hogy egyetlen házaspárt sem tudnak alkotni. Bizonyítsuk be, hogy ha $k \geq \frac{3n}{4}$, akkor mindig be tudjuk hármastani az expedíció összes tagját!

(2) Legyen adott egy $n \geq 10$ csúcsú egyszerű gráf G . Tegyük fel, hogy ha akárhogy húzunk be még egy élet G -ben, az így kapott gráfban több tíz csúcsú teljes részgráf lesz mint amennyi eredetileg G -ben volt. Bizonyítsuk be, hogy G -nek legalább $8n - 36$ éle van!

(3) Legyen $n \geq 2$ és H egy olyan n -uniform hipergráf aminek 4^{n-1} éle van. Mutassuk meg, hogy van H csúcsainak jó színezése négy színnel! (egyik hiperél sem teljesen egyszínű)

(4) Adottak a következő számok: $1, 2, \dots, 2n$. Osszuk őket tetszőleges módon két n -es halmazra. Mindkét halmazon belül képezzük az összes lehetséges (nem feltétlenül különböző elemekből álló!) összeget, és vegyük ezek $2n$ -nel vett osztási maradékát. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is osztottuk ketté a számokat, az első halmazból képzett n^2 maradék pontosan ugyanaz mint a második halmazból képzett n^2 , legfeljebb a sorrendjük más.

(5) Bizonyítsuk be, hogy ha a síkot véges sok félsíkkal fedjük, úgy hogy a sík minden pontja legalább 4 félsíkban megtalálható, akkor a félsíkok halmaza particionálható két részre úgy, hogy a két rész külön-külön fedi a síkot!

(6) Bizonyítsuk be, hogy az n -dimenziós kocka tetszőleges teljes párosítása kiterjed Hamilton körre. Azaz létezik olyan Hamilton kör, hogy a teljes párosítás minden élet tartalmazza.