Kombinatorika feladatmegoldó szeminárium
7. feladatsor

Soltész Dániel <protosdrone@gmail.com>
Kovács István <kovika91@gmail.com>
http://www.math.bme.hu/~solteszd/kombifelmegszem.html

2014. április 1.

(1) Legyen K egy csomó a 3-dimenziós térben (tehát a körvonal egy differenciálható beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba), és D a csomó diagramja (azaz olyan vetülete egy síkra, amely transzverzális duplapontoktól eltekintve szintén differenciálható beágyazása a körvonalnak). Színezzük ki D komplementumát sakktáblaszerűen feketével és fehérrel. Definiáljuk a diagram $\Gamma_B(D)$ *fekete gráfját* a következő módon: $\Gamma_B(D)$ csúcsai legyenek a fekete tartományok, és két tartomány minden érintkezési pontján át menjen egy őket összekötő él.

(a) Adjuk meg az összes olyan csomót, amelynek van olyan D diagramja, hogy a $\Gamma_B(D)$ gráfnak legfeljebb 3 feszítőfája van. (Két csomót nem tekintünk különbözőnek, ha az egyik a másikba mozgatható a körvonal beágyazásainak egy 1-paraméteres seregével.)

(b) Lássuk be, hogy bármely csomó bármely D diagramjára $\Gamma_B(D)$-nek páratlan sok feszítőfája van.

(2) Legyen a_n a $(2n) \times (2n)$-es sakktábla dominókkal való lefedéseinek a száma. Bizonyítsuk be az alábbi formulát.

$$a_n = 2^{2n^2} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=1}^{n} \left(\cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} + \cos^2 \frac{l\pi}{2n+1} \right)$$

(3) Bizonyítsuk be a következő azonosságot!

$$n + 1 - \sum_{k=1}^{n} k^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^{n+1-k}}{n^n} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

(4) Legyen $\mathcal{I}$ egy ideál ω-n (azaz olyan halmazrendszer, ami tartalmazza az összes véges halmazt, a teljes ω-t nem, leszálló és véges unióra zárt). Tekintsük $\mathcal{I}$-t 2^ω részének (azaz egy $H \in \mathcal{I}$ halmazt kódoljuk 0-1 sorozattal úgy, hogy az i-edik helyre 1-est írunk ha $i \in H$, egyébként 0-át). Ez egy valószínűségi tér, amit a

$$\lambda(\{x \in 2^\omega : x \text{ az } F\text{-en egyenlő } s\text{-el}\}) = \frac{1}{|F|}$$

mérhető halmazok generálnak, ahol F véges, és $s : F \to \{0,1\}$. Bizonyítsuk be, ha $\mathcal{I}$ mérhető, akkor nullmértékű. Mutassuk meg, hogy létezik nem mérhető ideál.

(5) Bizonyísuk be a következő azonosságot!

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \log k = \log\log n + \gamma + \frac{\gamma}{\log n} - \frac{\pi^2 + 6\gamma^2}{12\log^2 n} + O\left(\frac{1}{\log^3 n}\right)$$

(6) Legyen $p \in \mathbb{N}$ $L \subset \{0, 1, \ldots, p-1\}$, és $k \geq 2$ egész. Legyen $\mathcal{H} \subset 2^{[n]}$ az alábbi tulajdonságokkal:

- $\forall H \in \mathcal{H}$, $|H| \mod p \notin L$.
- $\forall H_1, H_2, \ldots, H_k \in \mathcal{H}$, ahol $H_i \neq H_j$ minden $i \neq j$-re:

$$|H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_k| \mod p \in L.$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha p prím akkor:

$$|\mathcal{H}| \leq (k-1) \sum_{i=1}^{|L|} \binom{n}{i}.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha p nem prímhatvány akkor az előző egyenlőtlenség nem feltétlenül teljesül!