(F) $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3t} + t\sin(2t)$

<u>Homogén:</u> $y'' - 6y' + 9y = 0$

mo.-t keressük $y_{H_{1,2}} = e^{\lambda t}$ alakban: $\lambda^2 e^{\lambda t} - 6\lambda e^{\lambda t} + 9e^{\lambda t} = 0$

$$\underbrace{e^{\lambda t}}_{>0}\underbrace{(\lambda^2 - 6\lambda + 9)}_{=0} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

$y_H = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$ $\Leftarrow$

(belső rezonancia $\lambda_1 = \lambda_2$)

<u>Inhomogén:</u>

jobb oldalon 2-tagú összeg van $\Rightarrow$ $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ alakban keresem,

ahol $(y_{p_1})'' - 6(y_{p_1})' + 9(y_{p_1}) = 2e^{3t}$ és

$(y_{p_2})'' - 6(y_{p_2})' + 9(y_{p_2}) = t\sin(2t)$ (szuperpozíció)

① y_{p_1}-et nem kereshetem $c_3 e^{3t}$ alakban, mert e^{3t} homogén mo. volt, és $c_3 t e^{3t}$ alakban sem, mert az is homogén mo. volt... keressük $y_{p_1} = c_3 t^2 e^{3t}$ alakban: (írjuk vissza a DE-be, és határozzuk meg c_3-t)

$(y_{p_1})'' - 6(y_{p_1})' + 9(y_{p_1}) = *$

$(y_{p_1})' = 2c_3 t e^{3t} + 3c_3 t^2 e^{3t}$

$(y_{p_1})'' = 2c_3 e^{3t} + 6c_3 t e^{3t} + 6c_3 t e^{3t} + 9c_3 t^2 e^{3t} =$

$= 2c_3 e^{3t} + 12 c_3 t e^{3t} + 9c_3 t^2 e^{3t}$

$* \left(2c_3 e^{3t} + 12c_3 t e^{3t} + 9c_3 t^2 e^{3t}\right) - 6\left(2c_3 t e^{3t} + 3c_3 t^2 e^{3t}\right) + 9\left(c_3 t^2 e^{3t}\right) =$

$= 2c_3 e^{3t} = 2e^{3t}$

$c_3 = 1$

$y_{p_1} = t^2 e^{3t}$

② y_{p2}-t milyen alakban keressem?

$t \to At + B$

$\sin(2t) \to C\sin(2t) + D\cos(2t)$

$t\sin(2t) \to (C_4 t + C_5)\sin(2t) + (C_6 t + C_7)\cos(2t)$

$y_{p2} = (C_4 t + C_5)\sin(2t) + (C_6 t + C_7)\cos(2t)$

$(y_{p2})' = C_4 \sin(2t) + 2(C_4 t + C_5)\cos(2t) + C_6\cos(2t) - 2(C_6 t + C_7)\sin(2t) =$

$= (-2C_6 t - 2C_7 + C_4)\sin(2t) + (2C_4 t + 2C_5 + C_6)\cos(2t)$

$(y_{p2})'' = -2C_6 \sin(2t) + 2(-2C_6 t - 2C_7 + C_4)\cos(2t) +$

$2C_4 \cos(2t) - 2(2C_4 t + 2C_5 + C_6)\sin(2t) =$

$= (-4C_4 t - 4C_5 - 4C_6)\sin(2t) + (-4C_6 t - 4C_7 + 4C_4)\cos(2t)$

$(y_{p2})'' - 6(y_{p2})' + 9(y_{p2}) =$

$[(-4C_4 t - 4C_5 - 4C_6) - 6(-2C_6 t - 2C_7 + C_4) + 9(C_4 t + C_5)]\sin(2t) +$

$[(-4C_6 t - 4C_7 + 4C_4) - 6(2C_4 t + 2C_5 + C_6) + 9(C_6 t + C_7)]\cos(2t) =$

$[(-4C_4 + 12C_6 + 9C_4)t + (-4C_5 - 4C_6 + 12C_7 - 6C_4 + 9C_5)]\sin(2t) +$

$[(-4C_6 - 12C_4 + 9C_6)t + (-4C_7 + 4C_4 - 12C_5 - 6C_6 + 9C_7)]\cos(2t) =$

$[\underbrace{(5C_4 + 12C_6)}_{1} t + \underbrace{(5C_5 - 4C_6 + 12C_7 - 6C_4)}_{0}]\sin(2t) +$

$[\underbrace{(5C_6 - 12C_4)}_{0} t + \underbrace{(5C_7 + 4C_4 - 12C_5 - 6C_6)}_{0}]\cos(2t)$

$=$

$t \cdot \sin(2t) + 0 \cdot \cos(2t)$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 12 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 12 \\ -12 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & -12 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lin. egyenletrr.-t kell megoldani…

$\underline{\text{III}}$: $\quad -12c_4 + 5c_6 = 0$

$$c_6 = \frac{12}{5} c_4$$

I: $\quad 5c_4 + 12c_6 = 1$

$$5c_4 + 12 \cdot \frac{12}{5} c_4 = 1$$

$$25c_4 + 144c_4 = 5$$

$$169 c_4 = 5$$

$$c_4 = \frac{5}{169}$$

$$c_6 = \frac{12}{169}$$

$\underline{\text{II}}$: $\quad -6 \cdot \frac{5}{169} + 5c_5 - 4 \cdot \frac{12}{169} + 12c_7 = 5c_5 + 12c_7 - \frac{78}{169} = 0$

$\underline{\text{IV}}$: $\quad 4 \cdot \frac{5}{169} - 12c_5 - 6 \cdot \frac{12}{169} + 5c_7 = -12c_5 + 5c_7 - \frac{52}{169} = 0$

$$\left.\begin{aligned} 5c_5 + 12c_7 - \frac{6}{13} &= 0 \\ -12c_5 + 5c_7 - \frac{4}{13} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 12} \\ &\xrightarrow{\cdot 5} \end{aligned} \left.\begin{aligned} 60c_5 + 144c_7 - \frac{72}{13} &= 0 \\ -60c_5 + 25c_7 - \frac{20}{13} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$169 c_7 = \frac{92}{13}$$

$$c_7 = \frac{92}{13^3}$$

$$c_5 = -\frac{12}{5} c_7 + \frac{78}{5 \cdot 169} =$$

$$= -\frac{12}{5} \cdot \frac{92}{13^3} + \frac{78}{5 \cdot 13^2} = \frac{-1104 + 1014}{5 \cdot 13^3} = -\frac{90}{5 \cdot 13^3} = -\frac{18}{13^3}$$

$$y = \underbrace{c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}}_{y_H} + \underbrace{t^2 e^{3t}}_{y_{P1}} + \underbrace{\left(\frac{5}{13^2} t - \frac{18}{13^3}\right) \sin(2t) + \left(\frac{12}{13^2} t + \frac{92}{13^3}\right) \cos(2t)}_{y_{P2}}$$

Együtthatók variálása:

$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ és $y_H = c_1y_1 + c_2y_2$ a homogén általános mo., akkor az inhomogén ált. mo.: $y = u_1y_1 + u_2y_2$, ahol u_1 és u_2 a következő egyenletrendszer. mo.-ból számítható:

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = c(t)$$

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

(u_1 és u_2 függvények, nem feltétlenül konstansok)

$\uparrow$

(ennek az egyenletrendszer.-nek mindig egyértelmű a mo.-a, ha $c(t) \neq 0$ és $\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' \neq 0$, ami feltételezhető)

(F) $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$

Homogén:

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

$y_1 = e^t \quad y_2 = e^{2t}$

$y_1' = e^t \quad y_2' = 2e^{2t}$

$$\left.\begin{aligned} u_1'e^t + u_2'2e^{2t} &= e^{3t} \\ u_1'e^t + u_2'e^{2t} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$u_2'e^{2t} = e^{3t}$

$u_2' = e^t \qquad u_1' = -e^{2t}$

$u_2 = e^t + c_2 \qquad u_1 = -\frac{1}{2}e^{2t} + c_1$

$$y = u_1y_1 + u_2y_2 = \left(-\frac{1}{2}e^{2t} + c_1\right)e^t + \left(e^t + c_2\right)e^{2t}$$

y_H