Matematika A4
XII. gyakorlat

Szabados Tamás kurzusa

2009. december 9-10.

1. Feltételes várható érték

Adott két valószínűségi változó, X és Y. Az X-nek $Y = y$ feltételre vett feltételes várható értéke

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot \mathbb{P}\{X = x_i \mid Y = y\}, & \text{ha } X \text{ diszkrét,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{1|2}(x \mid y)\,\mathrm{d}x, & \text{ha } X \text{ folytonos.} \end{cases}$$

Mint ahogy a feltételes valószínűség egy szabályos valószínűség (teljesíti az axiómákat), a feltételes várható érték is egy szabályos várható érték, tehát minden tulajdonság, ami a várható értékre igaz volt, a feltételes várható értékre is igaz lesz (pl. linearitás).

A feltételes súlyfüggvény illetve sűrűségfüggvény definíciója alapján könnyen ellenőrizhető, hogy a diszkrét illetve folytonos esetben

$$\sum_j \mathbb{E}(X \mid Y = y_j) \cdot \mathbb{P}\{Y = y_j\} = \sum_{i,j} x_i \cdot \mathbb{P}\{X = x_i \mid Y = y_j\} \cdot \mathbb{P}\{Y = y_j\} = \sum_{i,j} x_i \cdot \mathbb{P}\{X = x_i,\, Y = y_j\} = \mathbb{E}(X),$$

illetve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X \mid Y = y) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{1|2}(x \mid y) \cdot f_2(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathbb{E}(X).$$

Ezt elegánsabban és rövidebben úgy is írhatjuk, hogy $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)] = \mathbb{E}(X)$, amit toronyszabálynak vagy teljes várható érték tételnek nevezünk. Itt $\mathbb{E}(X \mid Y)$ az Y függvénye, és ezért maga is egy valószínűségi változó; Y-tól ugyanúgy függ, mint ahogy $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ függ az y változótól.

Feladatok

1. X és Y közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \frac{1}{y} \cdot \mathrm{e}^{-(y + x/y)}, \qquad \text{ha } x > 0,\ y > 0.$$

   (a) Mutassuk meg, hogy Y peremeloszlása exponenciális(1).

   (b) Mutassuk meg, hogy az $(X \mid Y = y)$ eloszlás, azaz X feltételes eloszlása az $Y = y$ feltétel mellett exponenciális($1/y$).

   (c) Használjuk az előbbi két pontot $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ meghatározására. Bátrabbak ellenőrizhetik, hogy $\mathbf{Cov}(X,\, Y) = 1$, miután belátták a fentiekhez hasonlóan, hogy $\mathbb{E}(X \cdot Y \mid Y) = Y \cdot \mathbb{E}(X \mid Y)$, és $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \cdot Y \mid Y)] = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{E}(X \mid Y)]$.

2. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből három ajtó nyílik: az első ajtó 3 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 5 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe. A harmadik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 7 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe. A bányász minden alkalommal amikor ebbe a terembe ér, e három ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül. Legyen X a szabadba kijutáshoz szükséges idő, Y pedig a legelső alkalommal kiválasztott ajtó sorszáma. Érveljünk amellett, hogy $\mathbb{E}(X \mid Y = 1) = 3$, $\mathbb{E}(X \mid Y = 2) = 5 + \mathbb{E}(X)$, és $\mathbb{E}(X \mid Y = 3) = 7 + \mathbb{E}(X)$. Alkalmazzunk egy toronyszabályt ezen feltételes várható értékekkel, és így mutassuk meg, hogy $\mathbb{E}(X) = 15$.

3. Legyenek $X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\mathbb{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$$

értékét. Segítség: tudjuk, hogy $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$ mivel egyenlő, ezután már csak a feltételes várható érték additivitását kell használnunk, és azt, hogy a változók azonos eloszlásúak.

2. Regressziós görbe

Adott az $(X,\ Y)$ kétdimenziós valószínűségi változó az együttes eloszlásával (például folytonos esetben sűrűségfüggvényével). X-et megfigyelve Y-t szeretnénk közelíteni egy $y = k(x)$ alakú tippelő függvénnyel. A közelítés azt jelenti, hogy az elkövetett $(Y - k(X))^2$ négyzetes hiba átlagát szeretnénk minimalizálni. Pontosabban azt a k függvényt keressük, amire $\mathbb{E}(Y - k(X))^2$ minimális. Az órán tanult tétel kimondja, hogy ebben az esetben a megoldás a feltételes várható érték: $k(x) = \mathbb{E}(Y \mid X = x)$. (Ez a szokásos regressziós görbe.)

Ha az elkövetett abszolút hiba átlagát, azaz $\mathbb{E}(|Y - k(X)|)$-et szeretnént minimalizálni, akkor a lehető legjobb tippelés az Y feltételes mediánja. Azaz ebben az esetben az $F_{Y|X}(y \mid x) = \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(u \mid x)\,\mathrm{d}u$ feltételes eloszlásfüggvényt kell 1/2-del egyenlővé tenni, és belőle y-t, mint x függvényét kifejezni.

Feladatok

4. A Duna holnaputáni budapesti vízállását akarjuk becsülni a mai bécsi vízállásból. Bár a két vízállás közt szoros kapcsolat van, azért pontosan nem lehet megmondani a vízállást, mindkettőt egy-egy valószínűségi változó írja le. Tegyük fel, hogy mindkét vízállást egy 0 és 1 közti számmal tudjuk jellemezni, melynek legyen az együttes sűrűségfüggvénye $f(x,\ y) = \frac{6}{5} \cdot (x + (y-1)^2)$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$.
   (a) Határozzuk meg a budapesti vízállás eloszlását a bécsi ismeretében, azaz a feltételes sűrűségfüggvényt.
   (b) Mi annak a valószínűsége, hogy Budapesten alacsonynak nevezhető (azaz 0 és 1/2 közé esik) a vízállás, ha Bécsben x volt? (Mennyi ez $x = 1/3$-ra?)
   (c) Ha már ismerjük a bécsi vízállást, mire tippelünk a budapestire, ha a lehető legkisebb átlagos négyzetes hibát akarjuk elkövetni?
   (d) És ha az átlagos abszolút hibát akarjuk minimalizálni?

5. $X = RND_1,\ Y = RND_1 \cdot RND_2$ eloszlás esetén láttuk, hogy az együttes sűrűségfüggvény $h(x,\ y) = 1/x$, ha a $0 < y < x < 1$ háromszögön vagyunk. Mi a regressziós görbe, ha az abszolút hibát, illetve ha a négyzetes hibát szeretnénk minimalizálni?

6. Az egységkörön választunk egyenletes eloszlás szerint egy $(X,\ Y)$ pontot. Az X koordináta ismeretében hogyan közelítenénk $|Y|$-t, feltéve, hogy a hiba abszolútértéknégyzetét szeretnénk minimalizálni?

7. Többpártrendszer esetén az egyes pártokra leadott szavazatok százalékos aránya valószínűségi változó. Az A párt az összes szavazatok X, a B párt az összes szavazatok Y hányadát kapja, együttes eloszlásuk a $h(x,\ y) = 24xy$, ha $0 < x,\ 0 < y,\ x + y < 1$ sűrűségfüggvényt követi. Ha a B párt az összes szavazatok 40%-át kapta, mire tippelünk, mennyit kapott az A párt?

8. Legyen $(X,\ Y)$ egyenletes eloszlású a $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 2)$ pontok által meghatározott háromszögön. Számítsuk ki Y-nak X-re vonatkozó regressziós függvényét.

9. Magyarországon a 18 év feletti férfiak testmagasságának átlagos értéke 178 cm, szórása 10 cm. Nőknél ugyanezek az adatok 166 cm és 8cm. Focimeccseken a drukkerek 10%-a nő, a többiek férfiak. Mindkét nem testmagasságágának eloszlását normálisnak véve:
   (a) Mi annak a valószínűsége, hogy egy 170 cm-nél alacsonyabb szurkoló nő?
   (b) Adjuk meg x függvényében annak a valószínűségét, hogy egy x cm magas drukker férfi.
   (c) Hogyan tippeljünk a szurkolók testmagasságából a nemükre, ha a célunk az, hogy a lehető legnagyobb valószínűséggel helyesen tippeljünk?

3. Lineáris regresszió

A gyakorlatban gyakran nem tudjuk az együttes sűrűségfüggvényt meghatározni. Ilyenkor könnyebb lehet a várható értéket, a szórást, a kovarianciát kiszámolni. Ezek segítségével már meg tudjuk mondani, hogy melyik az a lineáris függvény, amellyel tippelve a hiba négyzetének várható értéke a legkisebb:

$$y = \frac{c}{\sigma_x^2}(x - \mu_x) + \mu_y.$$

Ez egy kicsit másképp:

$$\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} = \varrho\,\frac{x - \mu_x}{\sigma_x},$$

ahol c X és Y kovarianciája, ϱ pedig korrelációs együtthatója.

Ha $\rho = \pm 1$, akkor a két valószínűségi változó közt lineáris függés van. Ha $\rho = 0$, akkor a változók *korrelálatlanok* (ami nem szükségképpen jelenti azt, hogy függetlenek volnának).

Feladatok

10. Egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $\frac{1}{6}xy$ $(0 < x < 2,\ x < y < 2x)$. Milyen $k(y)$ függvénnyel érdemes a második koordinátából az elsőt tippelni, ha az a célunk, hogy a tipelésnél elkövetett hiba négyzetének átlagos értéke a sok kísérlet esetén minél kisebb legyen,
    (a) ha feltesszük, hogy $k(y)$ lineáris,
    (b) ha $k(y)$ tetszőleges valós lehet?

11. X és Y együttes sűrűségfüggvénye $h(x,\, y) = 60xy^2$, ha $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x$. Határozzuk meg a kovarianciájukat! Tegyük fel, hogy a második koordinátát tudjuk megfigyelni és az elsőt ezen megfigyelt adattól függően becsüljük az $x = \frac{2}{3}(1 - y)$ képlet alapján. Van-e ennél jobb módszer, ha a négyzetes eltérés hibáját akarjuk minimalizálni?

12. Statisztikai adatok alapján annak a valószínűsége, hogy ikerszületéskor mindkét gyerek fiú, 0.32, annak a valószínűsége, hogy mindkét gyermek lány, 0.28. Annak a valószínűsége, hogy az első iker fiú és a második lány ugyanannyi, mint fordítva. Jelölje X illetve Y az első, illetve a második gyerek nemét, legyen a felvett értékük fiú esetén 1, lány esetén 0. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját. Hogyan tippelnénk Y ismeretében X-re lineáris függvénnyel, ha a tippelés átlagos négyzetes hibáját akarjuk minimalizálni?

4. Kétdimenziós normális eloszlás

A kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\Big[\Big(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\Big)^2 + \Big(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\Big)^2 - 2\varrho\,\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\Big]\Big\}.$$

Az ilyen sűrűségfüggvényt követő $(X,\, Y)$ pár esetén X peremeloszlása $\mathcal{N}(\mu_x,\, \sigma_x)$, Y peremeloszlása $\mathcal{N}(\mu_y,\, \sigma_y)$, és a kettő korrelációja ϱ.

Ha (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású, akkor minden $aX + bY$ lineáris kombinációjuk egydimenziós normális eloszlású.

Kétdimenziós normális eloszlásnál a feltételes várható érték (regressziós görbe) megegyezik a regressziós egyenessel.

Feladatok

13. Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású, $\mu_x = 1$, $\sigma_x = 3$, $\mu_y = 2$, $\sigma_y = 5$, $\varrho = 0,6$. Mi a valószínűsége, hogy $X + Y$ nagyobb 5-nél?

14. A felnőtt bergengóc nők súlya (pontosabban: tömege) átlagosan 65 kg, 5 kg szórással. A felnőtt férfiaké 85 kg, 10 kg szórással. Házaspárok esetén a pár súlyainak eloszlása kb. kétdimenziós normális eloszlású, a fenti paraméterekkel, de a férj és a feleség súlya közt nagy a korreláció: 0,9. A bergengóc férfiak szívesen elárulják a súlyukat, de a bergengóc nők nem. Milyen $x = k(y)$ függvénnyel tippeljünk a férj súlyából a feleség súlyára, ha a hiba négyzet átlagát minimalizálni akarjuk?

15. Mutassuk meg, hogy ha (X, Y) eloszlása kétdimenziós normális, akkor

    (a) X feltételes eloszlása az $Y = y$ feltétel mellett normális, $\mu_x + \varrho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$ várható értékkel, és $\sigma_x^2(1 - \varrho^2)$ szórásnégyzettel. (Ez egy kicsit számolós, de egy ügyes változócsere sokat segít.)

    (b) X és Y korrelációja valóban ϱ.

    (c) X és Y független akkor és csak akkor, ha $\varrho = 0$.

16. Íme hogyan lehet egy általános kétdimenziós normális eloszlást független normálisak összegére bontani. Rögzítsünk $\sigma_x, \sigma_y > 0$, $\mu_x, \mu_y \in \mathbb{R}$, és $-1 < \varrho < 1$ paramétereket. Legyen Y egy normális eloszlású valószínűségi változó μ_y várható értékkel és σ_y szórással. Legyen Z egy másik, Y-tól független normális valószínűségi változó, $\mu_x - \varrho \cdot \mu_y \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ várható értékkel és $(1 - \varrho^2) \cdot \sigma_x^2$ szórásnégyzettel. Definiáljuk az $X := \varrho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot Y + Z$ változót. Mutassuk meg, hogy az (X, Y) pár eloszlása kétdimenziós normális, a megfelelő μ_x és μ_y várható értékekkel, σ_x és σ_y szórásokkal, és ϱ korrelációval.

17. Legyen X standard normális eloszlású, és I X-től független, $\mathbb{P}\{I = 1\} = \mathbb{P}\{I = 0\} = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y := \begin{cases} X & \text{, ha } I = 1, \\ -X & \text{, ha } I = 0. \end{cases}$$

    Azaz: Y (X-től független) egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

    (a) Független-e X és Y?

    (b) Független-e I és Y?

    (c) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.

    (d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

18. Legyenek X és Y független standard normális valószínűségi változók, és $U := (X + Y)/\sqrt{2}$, $V := (X - Y)/\sqrt{2}$. Mutassuk meg, hogy U és V szintén független standard normális változók.