Házi feladatok ♯2

1. Az x változó mely értékeire abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek az alábbi sorok?

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$$

2. Mutassa meg, hogy az $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx$ képlettel definiált, végtelen trigonometrikus sor összegeként kapott függvény mindenütt folytonos!

3. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ függvénysort. Mutassa meg, hogy e sor konvergencia tartománya $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Igaz-e, hogy a sor mindenütt abszolút konvergens E-ben? Adjon meg olyan intervallumokat, ahol a konvergencia egyenletes. Igaz-e, hogy az összegfüggvény folytonos az E halmazon?

Az 4-5. feladatokban döntse el, hogy az egyenlőség igaz-e! Adjon indoklást is!

4.
$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
minden olyan x-re, amelyre $|x| < 1$.

5.
$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$
minden valós x-re.

6. (a) Igazolja, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ ha $|x| < 1$.
   (b) Ennek alapján számítsa ki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ értékét!
   (c) Hasonlóan, számítsa ki $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$ értékét!

7.
$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \cdots$$
   (a) Hol konvergál ez a geometriai sor? Milyen sort kap, ha tagonként differenciálja a sort? Hol konvergál a kapott sor? Mi az összege?

(b) Ha tagonként integrálja a fenti sort, milyen sort kap? Hol konvergál a kapott sor és milyen függvény az összege?

8. Belátható, hogy az alábbi hatványsor a $\tan x = \mathrm{tg}\ x$ függvényt állítja elő $-\pi/2 < x < \pi/2$ esetén:

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots .$$

   (a) Ennek alapján írja fel az $\ln(\sec x)$ függvény Taylor-sorának első négy tagját ($\sec x = 1/\cos x$)! (Útmutatás: integráljon.) Milyen x-ekre konvergens a sor?

   (b) Keresse meg a $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$ függvény sorának első három tagját! (Útmutatás: differenciáljon.) Milyen x-ekre konvergens a sor?

9. Keressük meg az alábbi függvények $c = 0$ középpont körüli Taylor-sorát!

   (a) $\mathrm{ch}\ x = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

   (b) $\mathrm{sh}\ x = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$

   (c) $\cos^2 x$ (Útmutatás: $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.)

10. Írjuk fel a Taylor-formulát $n = 2$ és $c = 0$ esetén az $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvényre! Ez megadja a függvény kvadratikus közelítését a 0 pont körül és a hozzátartozó hibatagot.

11. A következő sor a $c = 0$ középpont körüli Taylor-sora egy függvénynek, egy bizonyos x pontban. Melyik függvénynek és melyik pontban? Mi a sor összege?

$$1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} - \cdots + \frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k!)} - \cdots$$

12. Használja a $\sin x$ függvény 0 körüli Taylor-sorát a következő becslés megmutatásához:

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

ha $0 < |x| < 1$.

13. Milyen Taylor-sort használna az $\ln x$ függvény közelítéséhez az $x = 1$ pont környezetében? Írja fel a sor első négy nem zérus tagját!

14. Használjon Taylor-sort a következő integrál közelítő kiszámításához!

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

15. Helyettesítsen $-x$-et x helyébe az $\ln(1+x)$ 0 körüli Taylor-sorában, hogy megkapja az $\ln(1-x)$ sorát! Ezután vonja ezt ki $\ln(1+x)$ sorából, és így igazolja, hogy $|x|<1$ esetén az arth $x = \tanh^{-1}$ függvény Taylor-sora

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots .$$

16. Az Euler-formula segítségével mutassa meg, hogy minden valós x-re $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, és $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

17. A binomiális sorfejtést használva, határozza meg az $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ függvény 0 körüli Taylor-sorát! Ezután közelítse az alábbi integrált 10^{-4}-nél kisebb hibával!

$$\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4}\,dx$$