

## Házi feladatok #3

1. Keresse meg a  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$  függvény Fourier-sorát! Rajzolja fel az  $f(x)$  grafikonját, együtt a Fourier-sora első három részletösszegének grafikonjával! Azaz, keresse meg az  $a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  részletösszeget egy általános  $N$ -re, de a grafikonon csak az  $N = 1, 2, 3$  eseteket ábrázolja!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } -\pi/2 < x < 0 \\ 1 & \text{if } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{if } x = 0, \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < \pi/2 \\ 0 & \text{if } \pi/2 \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{if } -\pi < x < 0 \\ x & \text{if } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

2. Keresse meg az alábbi,  $2\pi$  szerint periodikus függvények Fourier-sorát!

(a)

$$f(x) = |\sin x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{if } -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{if } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

3. Mutassa meg, hogy a könnyen igazolható

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,$$

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x$$

azonosságok Fourier-sorként is interpretálhatóak!

4. Keresse meg az alábbi,  $T$  szerint periodikus  $f(t)$  függvények Fourier-sorát. Rajzolja fel az  $f(t)$  grafikonját, együtt a Fourier-sora első három részletösszegének grafikonjával!

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{if } 1 < t < 3 \end{cases} \quad (T = 4)$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } -1 < t < 0 \\ t & \text{if } 0 < t < 1 \end{cases} \quad (T = 2)$$

5. Legyen  $f(x) = 1$  ha  $0 \leq |x| \leq \pi/2$ ,  $f(x) = 0$  ha  $\pi/2 < |x| \leq \pi$ , és legyen  $f$   $2\pi$  szerint periodikus:  $f(x + 2\pi) = f(x)$  minden  $x$ -re.

(a) Keresse meg  $f$  Fourier-sorát!

(b) Mutassa meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = \frac{\pi}{4} !$$

6. Legyen  $f(x) = (\pi - |x|)^2$  a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon és legyen  $f$   $2\pi$  szerint periodikus. Mutassa meg, hogy

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx !$$