

## Házi feladatok #4

1. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket

(i) Gauss-módszerrel;

(ii) Gauss–Jordan-módszerrel!

(iii) Oldja meg a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszereket is (tehát a jobboldali konstansokat helyettesítse 0-val)! Milyen összefüggés van a megfelelő homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldás halmazai között?

(a)

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 & - 3x_4 = -3\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 11x_1 + 7x_2 &= -30\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5\end{aligned}$$

2. Az  $a$  paraméter mely értékeinél oldható meg az alábbi lineáris egyenletrendszer? Adja meg ekkor az összes megoldást!

$$\begin{aligned}ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= a^2\end{aligned}$$

3. Tekintsük az alábbi mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixokat:

- (a)  $B^T$  (a  $B$  transzponáltja)      (b)  $2A - 3B^T$       (c)  $AB$   
 (d)  $BA$       (e)  $(AB)^T - B^T A^T$ . Milyen általános eredményre következtethetünk (c)-ből és (d)-ből, illetve (e)-ből?

4. Egy  $n \times n$ -es mátrixot *diagonális mátrixnak* nevezünk, ha a főátlón kívüli összes eleme zérus. Mit mondhatunk  $n \times n$ -es diagonális mátrixok szorzásáról, illetve általában ilyen mátrixokkal való algebrai műveletek elvégzéséről?
5. Keresse meg az alábbi mátrixok inverzét (ha létezik) elemi sorműveletekkel!

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (\lambda_k \neq 0)$$

6. Az ebben a feladatban szereplő mátrixok mind négyzetes mátrixok.
- (a) Keressen olyan nemnulla, akár  $2 \times 2$ -es  $A$  mátrixot, amelyre  $A^2 = 0$ !
- (b) Keressen olyan csupa nemnulla elemekből álló  $2 \times 2$ -es  $A$  mátrixot, amely nem invertálható!
- (c) Keressen olyan  $2 \times 2$ -es  $A$  mátrixot, amely invertálható! Határozza is meg az inverzét!
- (d) Igaz-e mindig az  $(AB)^2 = A^2 B^2$  egyenlőség?
- (e) Igaz-e mindig az  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  egyenlőség?
- (f) Következik-e az  $AB = AC$ ,  $A \neq 0$  feltételekből, hogy  $B = C$ ? És ha azt is feltesszük, hogy  $A$  invertálható?
- (g) Lássá be, hogy egy olyan mátrix, amelynek van tiszta zérus sora vagy oszlopa, nem lehet invertálható!