

Házi feladatok #5

1. A determináns definíciója segítségével számítsa ki az alábbi determinánsokat!

$$(a) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Elemi sorműveletekkel számítsa ki az alábbi determinánsokat!

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Elemi sorműveletekkel igazolja, hogy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)!$$

4. Legyen egy 3x3-as A mátrix determinánsa 5. Számítsa ki a következő determinánsokat!

$$(a) \det(2A) \quad (b) \det(2A^{-1}) \quad (c) \det((2A)^{-1})$$

5. Számítások nélkül mutassa meg, hogy az alábbi azonosságok igazak!

$$(a) \begin{vmatrix} b+c & a+c & a+b \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1+b_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2+b_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Számítsa ki a 2. feladatbeli determinánsokat a kifejtési tétellel!

7. Számítsa ki az alábbi mátrixok inverzét az $\text{adj}(A)/\det(A)$ képlettel!

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. A Cramer-szabállyal oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 4z &= -4 \end{aligned}$$