Házi feladatok $\sharp 6$

1. Tekintsük az $\mathbf{u}_1 = (-1, 3, 2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 0, 4, -1)$, $\mathbf{u}_3 = (7, 1, 1, 4)$, $\mathbf{u}_4 = (6, 3, 1, 2)$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat.

   (a) Keressen olyan c_1, c_2, c_3, c_4 skalárokat, amelyekkel $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 + c_4\mathbf{u}_4 = (0, 5, 6, -3)$!

   (b) Számítsa ki az $|\mathbf{u}_1|$ és $\left|\frac{1}{|\mathbf{u}_1|}\mathbf{u}_1\right|$ euklideszi hosszakat!

   (c) Számítsa ki az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ vektorok által megadott $\mathbb{R}^4$-beli P_1 és P_2 pontok euklideszi távolságát!

2. Döntse el, hogy az alábbi halmazok a megadott összeadással és számmal szorzással vektorterek-e!

   (a) $\mathbb{R}^3$ azon origóból induló vektorai, amelyek egy az origón átmenő S síkon végződnek, a szokásos vektorműveletekkel.

   (b) $\mathbb{R}^3$ azon origóból induló vektorai, amelyek egy az origón át nem menő S síkon végződnek, a szokásos vektorműveletekkel.

3. Tekintsük az $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$, és $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 2, 1)$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorokat. Lineárisan független-e ez a három vektor? A következő vektorok közül melyek tartoznak $\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$-ba?

   (a) $(2, 3, -7, 3)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$ (c) $(1, 1, 1, 1)$ (d) $(-4, 6, -13, 4)$

4. (a) Mutassa meg, hogy $\mathbb{R}^3$-ban három vektor akkor és csak akkor lineárisan függő, ha egy (origón átmenő) síkban fekszenek!
   (b) Lássa be, hogy négy vektor $\mathbb{R}^3$-ban már mindenképpen lineárisan függő!

5. Keresse meg a következő vektor-halmazok közül azokat, amelyek $\mathbb{R}^3$-ban bázist alkotnak!

   (a) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3,)$

   (b) $(3, 1, -4), (2, 5, 6), (1, 4, 8)$

6. Határozza meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterének dimenzióját és egy bázisát!

   (a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

   (b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

7. A következő mátrix esetében keressük meg (a) a sor-tér egy bázisát; (b) az oszlop-tér egy bázisát; (c) a mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Keresse meg az alábbi vektorok egy olyan részhalmazát, amely az összes vektor által kifeszített altér egy bázisát adja és fejezze ki a bázisba nem tartozó vektorokat a bázis elemeinek lineáris kombinációjával!

$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 5, 2), \mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (4, -5, 9, 4), \mathbf{v}_4 = (0, 4, 2, -3), \mathbf{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$

9. A skalárszorzás axiómáival mutassa meg, hogy az alábbiak skalárszorzások $\mathbb{R}^2$-n, ahol $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v2)$!

(a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 6u_1v_1 + 2u_2v_2$ (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

10. (a) Tekintsük a 2π szerint periodikus, folytonos függvények V vektorterét. Mutassa meg, hogy az

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$$

képlet egy skalárszorzást értelmez az $f, g \in V$ függvények között!
(b) Interpretáljuk ennek fényében az $(1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots)$ trigonometrikus rendszert, mint ortogonális függvényrendszert!
(c) Interpretáljuk egy $f \in V$ függvény Fourier-sorának $s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ részletösszegét, mint V egy véges dimenziós W alterébe eső komponensének ortogonális bázis szerinti előállítását!
(d) Interpretáljuk az átlagos hibanégyzetet f és s_n között, mint a két V-beli pont közötti távolság négyzetét és az s_n részletösszeget, mint az f-et ezen távolság szerint legjobban közelítő W-beli pontot!

11. (a) A Gram–Schmidt-eljárással készítsen az alábbi $\mathbb{R}^3$-beli B_1 bázisból egy ortonormált B_2 bázist!

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_1 = (1, 2, 1)$$

(b) Határozza meg a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit a B_1, illetve a B_2 bázisban! Melyik bázisban egyszerűbb a feladat?

12. Az $\mathbf{u}_1 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$ és $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ ortonormált vektorok egy kétdimenziós W alteret (origón átmenő síkot) feszítenek ki $\mathbb{R}^3$-ban. Fejezze ki a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ vektort $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ alakban, ahol $\mathbf{v}_1$ a W síkban fekszik, $\mathbf{v}_2$ pedig merőleges a W síkra!

13. Legyen $T = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a természetes bázis és $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ egy másik bázis $\mathbb{R}^2$-ben, ahol $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, $\mathbf{u}_1 = (2,1)$ és $\mathbf{u}_2 = (-3,4)$. Írja fel a T bázisból a B bázisba való áttérés mátrixát és számítsa ki a $\mathbf{v} = (3,-5)$ vektor koordinátáit B-ben!

14. Legyen T a természetes bázis $\mathbb{R}^2$-ben és B az a bázis, amit T vektorainak pozitív irányú (vagyis az óramutató járásával ellentétes), α szöggel való elforgatásával kapunk. Lássa be, hogy ekkor a T bázisból a B bázisba való áttérés mátrixa $P = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$! Mutassa meg egy tetszőleges $\mathbf{v} = (x,y)$ vektornak a B-beli (x', y') koordinátáit a P^T-vel való szorzással kaphatjuk meg:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

15. Vegyük a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ és a $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bázisokat $\mathbb{R}^2$-ben, ahol

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Írja fel a B bázisból a B' bázisba való áttérés P mátrixát!
(b) Írja fel a B' bázisból a B bázisba való áttérés mátrixát! (Lássa be, hogy ez P^{-1}.)
(c) Számítsa ki a $\mathbf{v} = (3,-5)$ vektor koordinátáit B-ben és ebből közvetlenül B'-ben!