Házi feladatok $\sharp 7$

1. Döntse el, hogy az alábbi $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ függvények (más néven: leképezések vagy transzformációk) közül melyek lineárisak:

   (a) $F(x,y) = (2x, y)$ (b) $F(x,y) = (x^2, y)$ (c) $F(x,y) = (y, x)$
   (d) $F(x,y) = (0, y)$ (e) $F(x,y) = (x, y+1)$ (f) $F(x,y) = (2x+y, x-y)$
   (g) $F(x,y) = (0, 0)$ (h) $F(x,y) = (1, 1)$

   A lineárisakat írja fel mátrixszorzással!

2. Legyen $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, amelyre

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix},$$

   ahol $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a természetes bázis $\mathbb{R}^3$-ban. Írja fel T mátrixát a természetes bázisban és ennek segítségével számítsa ki a $T(1,3,8)$ vektort!

3. Írja fel annak a $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak a mátrixát, amely 30^0-kal forgat, azután 2 tényezővel nyírást végez az x-tengely irányában, majd tükröz az y-tengelyre, végül pedig 3-szorosra nyújt az y-tengely irányában! Győződjön meg róla, hogy fordított sorrendben elvégezve ezeket más eredmény jön ki!

4. Legyen $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow S$ az a lineáris transzformáció, amely $\mathbb{R}^3$-at az S-sel jelölt $x+y+z=0$ egyenletű síkra vetíti. Írja fel T mátrixát a természetes bázisban és ennek segítségével számítsa ki a $T(3,8,4)$ vektort!

5. Legyen $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amelyre $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x}$-re, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

   (a) Az alábbi vektorok közül melyek esnek T magterébe, $\ker(T)$-be?

$$(3,-8,2,0), (0,0,0,1), (0,-4,1,0)$$

   (b) Az alábbi vektorok közül melyek esnek T képterébe, $R(T)$-be?

$$(0,0,6), (1,3,0), (2,4,1)$$

   (c) Határozza meg T magterének dimenzióját és egy bázisát!
   (d) Határozza meg T képterének dimenzióját (vagyis T rangját) és a képtér egy bázisát!

6. Legyen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, amelyre $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1)$.

   (a) Írja fel T mátrixát a természetes bázisban!

   (b) Írja fel a természetes bázisból a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ bázisba való átmenet P mátrixát, ha $\mathbf{u}_1 = (2,1)$ és $\mathbf{u}_2 = (-3,4)$!

(c) Az előzőek felhasználásával írja fel T mátrixát a B bázisban!

(d) Írja fel a $\mathbf{v} = (8, 3)$ vektor esetén a $T(\mathbf{v})$ vektort a természetes bázisban, illetve a B bázisban!

7. Keresse meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! A sajátaltereknek határozza meg egy bázisát! Azonosítsa a mátrixok által definiált lineáris transzformációk geometriai jelentését is!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(e)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(h)} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(A (d) feladat forgatás: itt a sajátértékek és sajátvektorok komplexek.)

8. Keresse meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! A sajátaltereknek határozza meg egy bázisát!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Igazolja a következő állításokat!

(a) Egy alsó vagy felső háromszögmátrix sajátértékei a főátló elemei.

(b) A $\lambda = 0$ szám akkor és csak akkor sajátértéke egy A mátrixnak, ha A nem invertálható.

(c) Ha λ egy sajátértéke A-nak, akkor λ^n sajátértéke A^n-nek, bármely pozitív egész n esetén.

10. Keresse meg azt a P mátrixot, amely A-t diagonalizálja és írja fel a kapott D diagonális mátrixot! Írja fel az $A = PDP^{-1}$ spektrál-felbontást!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Egy bizonyos egyetemi szakra minden évben 100 hallgatót vesznek fel. Az első évesek 80%-a megy tovább másodévre és 10%-a évet ismétel. (A maradék 10% elhagyja az egyetemet.) A másodévesek 20%-a ismétel évet és 80% tovább megy harmadévre. (Közülük senki nem hagyja már abba az egyetemet.) A kiindulási (nulladik) évben 100 fő jár első és 90 fő jár másodévre. Jelölje p_n az első évesek, és q_n a másodévesek számát a n-edik évben ($n = 0, 1, 2, \dots$).

(a) Lássa be, hogy $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + \mathbf{c}$ és így $\mathbf{x}_{n+1} = A^n\mathbf{x}_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + I)\mathbf{c}$, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Keresse meg A sajátértékeit és sajátvektorait!

(c) Írja fel azt a P mátrixot, amely A-t diagonalizálja és határozza meg P^{-1}-et! Ekkor $D = P^{-1}AP$ és $A = PDP^{-1}$. (Ez A spektrál-felbontása.)

(d) Helyettesítse A-t a fenti képletben a spektrál-felbontásával, és ezzel írja fel zárt alakban $\mathbf{x}_n$-et! Vegye ennek limeszét $n \to \infty$ esetén! Így megkapja, hogy sok év elteltével hány elsőéves és másodéves hallgató lesz a szakon.

12. Keresse meg azt az ortogonális P mátrixot, amely a szimmetrikus A mátrixot diagonalizálja és írja fel a kapott D diagonális mátrixot! Írja fel az $A = PDP^{-1}$ ortogonális spektrál-felbontást!

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

13. (a) Írja fel a $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$ kvadratikus formát $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ alakban, ahol A szimmetrikus mátrix!

(b) Végezze el az előző feladat fordítottját az

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

alakból kiindulva!

14. Döntse el, hogy az előző feladatbeli kvadratikus alakok pozitív definitek, negatív definitek, szemidefinitek vagy indefinitek-e!

15. Keresse meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzformálható és írja fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével!

(a) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$

(b) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

16. A koordináta tengelyek elforgatásával és eltolásával transzformálja a $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + y = 0$ kúpszeletet standard (tiszta négyzet-összeg) alakra!