

## Házi feladatok #8

1. Vázolja fel az alábbi görbék grafikonját! Számítsa ki az érintővektorukat (sebességvektorukat) és a sebesség nagyságát, mint a  $t$  paraméter függvényét! Számítsa ki a görbék hosszát is!

(a)

$$x = t, y = \sqrt{t}, \quad t \in [0, 1]$$

(b)

$$x = 3t, y = 2 - 2t, \quad t \in [0, 1]$$

(c)

$$x = \cos t, y = t + \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(d)

$$x = a \cos t, y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Az ellipszis hosszának kiszámítása nem-elemi integrálra vezet, kivéve, ha az ellipszis  $e = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$  excentricitása 0 (kör) vagy 1 (egyenes szakasz).

(e)

$$\mathbf{r} = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(f)

$$\mathbf{r} = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + (\sqrt{5} t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

2. Nevezze meg az alábbi felületeket és rajzolja fel a grafikonjukat!

(a)

$$z^2 + 4y^2 = 9$$

(b)

$$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$$

(c)

$$y = 1 - x^2 - z^2$$

(d)

$$4x^2 + 9z^2 = 9y^2$$

(e)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} - y^2 = 1$$

(f)

$$x^2 - y^2 = z$$

3. Határozza meg az  $f(x, y) = \sqrt{y - x}$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! Rajzolja fel néhány szintgörbét és grafikonját!

4. Van-e maximuma az  $f(x, y, z) = xyz$  függvénynek az  $x = 20 - t$ ,  $y = t$ ,  $z = 20$  egyenes mentén? Ha igen, mi ez? *Útmutatás:* Helyettesítse be az egyenes egyenletét!

5. Keresse meg a határértékeket!

(a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$$

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1); x \neq 1} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$$

6. A sík mely  $(x, y)$  pontjaiban folytonos a  $\sin \frac{1}{xy}$  függvény?

7. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássa be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  esetén!

(a)

$$f(x, y) = \frac{4xy}{x^2 + y^2}$$

(b)

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

(c)

$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$$

(d)

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 - y}$$

8. Legyen  $f(\mathbf{x}) = |A\mathbf{x}|$ , ahol  $A$  egy rögzített  $2 \times 2$ -es mátrix és  $|\mathbf{x}| \leq 1$ , vagyis  $\mathbf{x} = (x, y)$  az origó középpontú, egység sugarú zárt körlapon változik.

(a) Indokolja meg, hogy  $f$ -nek van maximuma a fenti zárt körlapon! (Ezt a maximumot az  $A$  mátrix normájának nevezik.)

(b) Indokolja meg, hogy  $f$  értékkészlete ezen a körlapon egy zárt és korlátos intervallum!