Házi feladatok $\sharp 9$

1. Keresse meg az alábbi függvények összes elsőrendű parciális deriváltját!

   (a)
   $$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

   (b)
   $$f(\rho,\phi,\theta) = \rho \sin\phi \cos\theta$$

2. Keresse meg az $f(x,y) = \ln(x+y)$ függvény összes másodrendű parciális deriváltját!

3. Milyen sorrendben gyorsabb kiszámítania f''_{xy} értékét: először x szerint, vagy először y szerint differenciálva?

   (a) $f(x,y) = x \sin y + e^x$

   (b) $f(x,y) = 1/x$

   (c) $f(x,y) = y + (x/y)$

   (d) $f(x,y) = y + x^2 y + 4y^3 - \ln(y^2+1)$

4. Mutassa meg, hogy az $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ függvény egy megoldása a
   $$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
   Laplace-egyenletnek a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományban! (Egy ilyen f függvényt *harmonikus függvénynek* nevezünk D-ben.)

5. Mutassa meg, hogy a $w = \sin(x+ct)$ egy megoldása az alábbi hullámegyenletnek! Ha a vízben állunk, érezhetjük a víz fel-le mozgását, ahogy a hullámok elhaladnak mellettünk. A fizikában a periódikusan elhaladó hullámok mozgását fejezi ki az alábbi hullámegyenlet:
   $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
   ahol w a hullám magassága, x a térbeli távolságot leíró változó, t az idő múlását leíró változó, és c a hullámok terjedési sebessége.

6. Számítsa ki a dw/dt deriváltat a lánc-szabállyal, majd határozza meg a derivált értékét a $t = 3$ pontban!
   $$w = \ln(x^2+y^2+z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}.$$

7. *Változó feszültség egy áramkörben.* Az $U = IR$ Ohm-törvény által leírt egyszerű áramkörben a feszültség lassan csökken, ahogy az elem kimerül. Egyidejűleg az ellenállás növekszik, ahogy az ellenállás melegszik. A lánc-szabály segítségével keresse meg, hogyan változik az áramerősség, ha $R = 600\,\Omega$, $I = 0.04$ A, $dR/dt = 0.5\,\Omega/\text{s}$, and $dU/dt = -0.01$ V/s.

8. Legyen $f(0,0) = 0$ és

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad \text{ha} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Mutassa meg, hogy $\mathbb{R}^2$ minden pontjában léteznek a $\partial f/\partial x$ és $\partial f/\partial y$ parciális deriváltak, de f mégsem folytonos a $(0,0)$ pontban!

9. Legyen $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Keresse meg $\nabla f = \text{grad} f$ értékét a $P_0(1,1)$ pontban! Rajzolja fel a ∇f vektort és f-nek a P_0 ponton áthaladó szintgörbéjét!

10. Keresse meg az $f(x,y) = 3e^x \cos y$ függvény $P_0(0,0)$ pontbeli, az $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ vektor irányában vett deriváltját!

11. Milyen irányokban zérus az $f(x,y) = xy + y^2$ függvény deriváltja a $(3,2)$ pontban?

12. Határozza meg a függvények gradiensét, ha $\mathbf{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$!

    (a) $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}| \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$

    (b) $f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \quad (\mathbf{r} \neq \mathbf{0})$

13. Keresse meg az alábbi felületek érintősíkjának egyenletét a megadott pontban!

    (a) $z = \ln(x^2+y^2), \qquad (x_0, y_0) = (1,0)$

    (b) $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \qquad P_0(0,1,2)$

    Útmutatás (b)-hez: A $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \text{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ vektor merőleges az $f(x,y,z) = c$ szintfelület érintősíkjára a $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pontban, ha $c = f(x_0,y_0,z_0)$.

14. (a) Keresse meg az alábbi f függvény linearizálását (= standard lineáris közelítését = elsőfokú kétváltozós Taylor-polinomját) az adott P_0 középpont körül! Adja meg a közelítés hibájának egy felső korlátját is az adott T téglalapon!

    $$f(x,y) = e^x \cos y, \quad P_0(0,0), \quad T = \{(x,y) : |x| \leq 0.1, \quad |y| \leq 0.1\}$$

    (b) Keresse meg az f másodfokú kétváltozós Taylor-polinomját is a P_0 pontban!

15. *Ingadozás az elektromos ellenállásban* A párhuzamosan kapcsolt R_1 és R_2 ellenállások eredő R ellenállása, mint jól ismert, megkapható a következő egyenletből:

    $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

    (a) Mutassa meg, hogy

    $$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2.$$

    (b) Egy áramkörben a párhuzamosan kapcsolt $R_1 = 100$ Ohm és $R_2 = 400$ Ohm ellenállások értékei gyártási okok miatt nem pontosak. Az eredő R ellenállás az R_1 vagy az R_2 hibájára lesz érzékenyebb?

16. Ha $|a|$ sokkal nagyobb, mint $|b|$, $|c|$ és $|d|$, az a, b, c és d értékek közül melyiknek a hibájára lesz az

$$f(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determináns a legérzékenyebb?

17. Keresse meg az alábbi függvények lokális maximumait, minimumait és nyeregpontjait!

    (a) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$
    (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 8$
    (c) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

18. Keresse meg az $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ függvény maximumát és minimumát a $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, \quad 2x \le y \le 2\}$ zárt háromszöglapon!

19. Egy lapos körlap alakú tányér alakját a $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x,y) pontban a hőmérséklet értéke $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Ábrázolja a hőmérséklet néhány szintgörbéjét D-ben (az ún. izotermákat). Keresse meg a tányér legforróbb és leghidegebb pontját!

20. Keresse meg az $f(x,y) = xy$ függvény maximumát és minimumát az $x^2 + 4y^2 = 8$ görbén! Rajzolja fel a görbét és a függvény néhány szintgörbéjét!