Mi is (és mire is jó) egy tiszta Hodge-struktúra?

Szabó Szilárd

Egyenletrendszerek megoldásai, így áttételesen az algebrai varietások vizsgálata a matematika egyik legrégebbi problémája. A számelmélet sok alapvető kérdése nyilvánvaló módon átfogalmazható egy X algebrai varietás racionális pontjainak létezésére vonatkozó kérdéssé. Például, az előző lapszámban Tóth Árpád cikkében taglalt, A. Wiles által 1994-ben belátott nagy Fermat-sejtés azzal ekvivalens, hogy az

$$x^n + y^n - z^n = 0, \quad n \geq 3$$

egyenlet által meghatározott görbének nincs nem-triviális (az $x = z, y = 0$ és $y = z, x = 0$ triviális megoldásoktól különböző) megoldása $\mathbf{Q}$ felett; ennek köze van az e lapszámban részletesen vizsgált

$$y^2 - x^3 - Ax - B = 0$$

egyenletű elliptikus görbék tulajdonságaihoz. Az együtthatók legkisebb közös többszörösével beszorozva látható, hogy minden $\mathbf{Q}$-együtthatós egyenletrendszer ekvivalens egy $\mathbf{Z}$-együtthatóssal. Amennyiben az egyenletrendszer homogén polinomokból áll (azaz minden tag össz-fokszáma megegyezik, mint pl. a Fermat-egyenletben), akkor az így kapott varietás projektív lesz: mivel ekkor minden (x, y, z) megoldás és minden 0-tól különböző t testbeli elemre (tx, ty, tz) is nyilván megoldás, ezért a "lényegesen" különböző (tehát, nem csak egy megoldáshármas minden elemét ugyanazzal az állandóval megszorozva kapott) megoldásokat úgy nyerjük, hogy a teljes megoldás-halmazt a $\mathbf{Q}^*$ multiplikatív csoporttal leosztjuk. Az így kapott megoldáshalmaz esetünkben a

$$\mathbf{Q}P^2 = (\mathbf{Q}^3 \setminus \vec{0})/\mathbf{Q}^*$$

racionális projektív sík részhalmaza. Hasonló érvelés bármely változószámú, csupa homogén polinomból álló rendszerre is érvényes, azzal a különbséggel hogy a megoldás-halmaz esetleg valamely 2-től eltérő dimenziós projektív tér része. Amennyiben az egyenleteink nem homogének, akkor egy egyszerű eljárással azzá tehetők: bevezetünk egy új változót, és minden monomot megszorzunk az új változó valamely hatványával. Az elliptikus görbe esetében például z-vel jelölve az új változót ennek eredménye az

$$y^2 z - x^3 - Axz^2 - Bz^3 = 0$$

egyenlet. Természetesen, ezt az új változó lehető legalacsonyabb hatványaival hajtjuk végre.

Adott egész-együtthatós egyenletrendszer esetén bármely q prímhatványra redukcióval származtathatunk egy $\mathbf{F}_q$-együtthatós egyenletrendszert, ahol $\mathbf{F}_q$ a q-elemű véges testet jelöli. Szintén érdekes kérdés az így nyert algebrai egyenletrendszerek megoldhatósága egyre bővebb véges testekben: az úgynevezett

Hasse-elv értelmében ilyen (és valós) megoldások bizonyos rendszereiből ugyanis néha konstruálható egész értékű megoldás. Az egyenletrendszert ismét tekinthetjük egy X algebrai varietás definiáló egyenleteinek $\mathbf{F}_q$ felett. A véges testek feletti eset előnye, hogy a megoldás létezésén túl azok számát is vizsgálhatjuk, azaz bevezethetünk egy

$$|X(\mathbf{F}_{q^n})|$$

leszámláló-függvényt, ahol $X(\mathbf{F}_{q^n})$ az X definiáló egyenleteinek $\mathbf{F}_{q^n}$ feletti megoldáshalmazát jelöli.

Egy $\mathbf{Q}$ feletti X algebrai varietáshoz természetes és egyértelmű módon társítható egy komplex algebrai varietás is: az azt megadó egyenletrendszer komplex test feletti megoldásainak halmaza. Egy sima komplex algebrai varietáson viszont többek között természetes módon adott egy $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaság-struktúra is: ez azt jelenti, hogy minden pontjának egy elegendően szűk környezetében bevezethetők a megszokott d-dimenziós komplex vektortéréhez hasonló $z_1, \ldots, z_d$ koordináták. Amennyiben $X_{\mathbf{C}}$ teljesít egy topologikus feltételt (az összefüggőséget), akkor az itt szereplő d érték független a tekintett ponttól, és X dimenziójának nevezzük. Ha pedig X projektív, akkor a kapott $X_{\mathbf{C}}$ kompakt. A továbbiakban X-ről feltesszük, hogy sima és projektív.

A fentiek alapján vizsgálhatjuk az X-hez rendelt $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaságon az ilyen sokaságokhoz rendelt algebrai invariánsokat. Az egyik ilyen invariáns-fajta az úgynevezett komplex együtthatós de Rham kohomológia-csoportok, amelyek valójában véges dimenziós komplex vektorterek. Konkrétan, minden X komplex d-dimenziós sokasághoz és $k \in \{0, \ldots, 2d\}$ számhoz tartozik egy $H^k_{dR}(X, \mathbf{C})$ véges dimenziós komplex vektortér. A de Rham-kohomológia értelmezéséhez szükség van az úgynevezett komplex-értékű k-adfokú differenciál-forma fogalmára. Lokális komplex analitikus koordinátákban egy k-forma egy

$$\alpha = \sum_{\vec{n},\vec{m}} f_{\vec{n},\vec{m}}(z_1, \ldots, z_d) \mathrm{d}z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{n_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_q} \tag{1}$$

alakú kifejezés valamely sima $f_{\vec{n},\vec{m}}$ komplex-értékű függvényekre, ahol az összegzés az összes lehetséges

$$k = p + q \tag{2}$$

felbontásra[1], és

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (n_1, \ldots, n_p), \qquad & 0 < n_1 < \cdots < n_p < d \\ \vec{m} &= (m_1, \ldots, m_q), \qquad & 0 < m_1 < \cdots < m_q < d \end{aligned}$$

vektorokra fut. Rögzített (p, q) pár esetén a megfelelő α formát tiszta (p, q)-típusúnak nevezzük; komplex analitikus sokaságon egy k-forma (p, q)-típusú része jól meghatározott (azaz, a lokális koordinátarendszer választásától független). Az $X_{\mathbf{C}}$-n értelmezett k-formák vektorterét $\Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$-val, a tiszta (p, q)-típusú formák vektorterét pedig $\Omega^{p,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$-val jelöljük. Minden, az (2) egyenletet teljesítő rögzített (p, q, k) számhármas esetén természetesen adódik tehát egy

$$\begin{aligned} \pi_{p,q} :& \Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \to \Omega^{p,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \\ \alpha \mapsto & \sum_{|\vec{n}|=p, |\vec{m}|=q} f_{\vec{n},\vec{m}}(z_1, \ldots, z_d) \mathrm{d}z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{n_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_q} \end{aligned}$$

[1] Remélhetőleg, az olvasó nem téveszti össze az itt bevezetett q számot a korábban szintén q-val jelölt prímhatvánnyal — mivel mindkét jelölés bevett az elméletben, a szerző nem kíván eltérni egyiktől sem.

projektor, ahol α lokálisan (1) által adott, és a fenti összegzés az összes rögzített p hosszúságú $\vec{n}$ vektorra fut. A $\pi_{p,q}$ leképezés globális jól-definiáltsága a komplex sokaság-struktúrából következik.

Mivel minden komplex analitikus sokaság egyúttal valós analitikus sokaság is, emiatt értelmezhető a differenciál-formákon egy természetes elsőrendű lineáris differenciál-operátor, a külső deriválás. Bizonyos értelemben a külső deriválás analóg a szemléletes geometriai perem-fogalmunkkal: ahogyan egy k-dimenziós szimpliciális komplexus pereme egy $(k-1)$-dimenziós szimpliciális komplexus, éppúgy egy $\alpha \in \Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ differenciál-forma külső deriváltja egy $(k+1)$-edfokú $\mathrm{d}\alpha \in \Omega^{k+1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ differenciál-forma. Vagyis, minden k-ra adódik

$$\mathrm{d} : \Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \to \Omega^{k+1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}).$$

Egy komplex sokaság esetében ennek az operátornak a konkrét alakját a linearitás miatt elegendő (1) egy tagjára megadni:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(f_{\vec{n},\vec{m}}(z_1, \ldots, z_d)\mathrm{d}z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{n_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_q}) \\
&= \sum_{s=1}^{d} \left(\frac{\partial f_{\vec{n},\vec{m}}}{\partial z_s} \mathrm{d}z_s + \frac{\partial f_{\vec{n},\vec{m}}}{\partial \bar{z}_s} \mathrm{d}\bar{z}_s \right) \wedge \mathrm{d}z_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}_{m_q}.
\end{aligned}$$

Az itt szereplő differenciálások a szokásos $z = x + iy$ valós-képzetes felbontásban a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Cauchy–Riemann operátor, valamint annak konjugáltja:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Ahhoz, hogy a külső deriváltban kapott $\mathrm{d}z_s$ és $\mathrm{d}\bar{z}_s$ formákkal bővített rendszert újra növekvő sorrendbe rendezhessük, a következő relációkat használhatjuk:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_s \wedge \mathrm{d}z_r &= -\mathrm{d}z_r \wedge \mathrm{d}z_s \\
\mathrm{d}\bar{z}_s \wedge \mathrm{d}z_r &= -\mathrm{d}z_r \wedge \mathrm{d}\bar{z}_s \\
\mathrm{d}\bar{z}_s \wedge \mathrm{d}\bar{z}_r &= -\mathrm{d}\bar{z}_r \wedge \mathrm{d}\bar{z}_s.
\end{aligned}$$

Azt mondjuk hogy α zárt, ha $\mathrm{d}\alpha = 0$, és α egzakt, ha $\alpha = \mathrm{d}\beta$ valamely $\beta \in \Omega^{k-1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ formára. Kiderül, hogy minden egzakt forma zárt, ennek fordítottja azonban általában nem igaz. A k-adik de Rham-kohomológia csoport pontosan azt méri, hogy ez mennyire nem teljesül: a $H^k_{dR}(X, \mathbf{C})$ vektorér definíció szerint a zárt k-formák vektortere leosztva az egzakt k-formák vektorterével.

Algebrailag az előbb bevezetett hányados minden további meggondolás nélkül értelmes, az azonban nem világos, hogy véges dimenziós-e. Ennek megvizsgálásához hasznos W. Hodge tétele, amely kimondja, hogy a fenti hányados izomorf egy bizonyos X-en adott másodrendű elliptikus lineáris parciális differenciál-egyenlet L^2 megoldásterével. Az derül ki ugyanis, hogy ha X sima projektív, akkor az $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaságra a projektív térről egy speciális tulajdonságokkal rendelkező, úgynevezett Kähler-metrika öröklődik. A Kähler-metrika segítségével bevezethetjük az úgynevezett

$$\Delta_{\mathrm{d}} = \mathrm{d}^*\mathrm{d} + \mathrm{d}\mathrm{d}^*$$

Hodge–Laplace operátort a $\Omega^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ téren, ahol d^*-vel d adjungált operátorát jelöljük az L^2 metrikára. A következő eredmény ma már klasszikusnak számít [5]:

Tétel 1 (Hodge)**.** *Legyen $X_{\mathbf{C}}$-n adott egy Kähler metrika. Jelöljük $\mathcal{H}^k(X_{\mathbf{C}})$-vel a belőle származtatott Hodge–Laplace operátor L^2 magját. Ekkor*

$$H^k_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \cong \mathcal{H}^k(X_{\mathbf{C}}).$$

A $\mathcal{H}^k(X_{\mathbf{C}})$ elemeit $X_{\mathbf{C}}$ feletti harmonikus k-formáknak nevezzük. A kompakt sokaságokon definiált elliptikus lineáris parciális differenciál-egyenletek általános elmélete ekkor garantálja, hogy $X_{\mathbf{C}}$ de Rham kohomológia-terei véges dimenziósak.

A külső deriválásnak minden komplex sokaságon van egy természetes felbontása

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$$

alakban, ahol minden $\alpha \in \Omega^{p,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ esetén

$$\partial\alpha = \pi_{p+1,q}(\mathrm{d}\alpha) \in \Omega^{p+1,q}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$$
$$\bar{\partial}\alpha = \pi_{p,q+1}(\mathrm{d}\alpha) \in \Omega^{p,q+1}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}).$$

Hasonlóan a Hodge–Laplace operátorhoz, bevezethetjük a

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^*$$

Dolbeault–Laplace operátort. Könnyen látszik, hogy ez az operátor egy tiszta (p,q)-típusú formát ugyanilyen típusú formába képez. A Kähler-geometria alapvető azonossága ekkor azt mondja ki, hogy

$$\Delta_{\mathrm{d}} = 2\Delta_{\bar{\partial}}.$$

Ebből és az előző észrevételből azonnal következik, hogy a harmonikus k-formák vektortere felbomlik típus szerint:

$$\mathcal{H}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X),$$

ahol $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ a tiszta (p,q)-típusú harmonikus formák tere. Továbbá, mivel Δ_{d} könnyen láthatóan valós operátor (azaz, kommutál a komplex konjugálással), azért létezik egy

$$\overline{\mathcal{H}^{p,q}(X)} = \mathcal{H}^{q,p}(X)$$

izomorfizmus. A fenti fogalmak és eredmények részletesebb kifejtése megtalálható például a [4] tankönyv bevezető fejezetében.

Az előző paragrafusban nyert struktúrát tetszőleges V véges-dimenziós, komplex konjugálással ellátott komplex vektortéren értelmezhetjük: azt mondjuk, hogy V-n egy

$$V = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}$$

direkt-összeg felbontás megad egy tiszta k-súlyú komplex Hodge-struktúrát, ha minden p,q párosra teljesül a következő feltétel:

$$\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Ezzel a terminológiával élve tehát Hodge tétele azt mondja ki, hogy a $H^k_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ de Rham kohomológia-téren létezik egy természetes tiszta k súlyú Hodge-struktúra.

Kanyarodjunk vissza a kiinduló-pontunkhoz: a véges testek feletti algebrai varietások racionális pontjainak kérdéséhez, amelyről 1949-ben A. Weil négy mély tulajdonságot sejtett meg. A Weil-sejtések teljes bizonyítása P. Deligne nevéhez fűződik [1], amely eredményéért 1978-ban Fields-éremmel jutalmazták. Magukat a sejtéseket itt teljes részletességgel nem közöljük, csupán egy azokból következő, első látásra talán meglepő összefüggést egy X algebrai varietás leszámláló–függvénye és az X-hez rendelt $X_{\mathbf{C}}$ komplex analitikus sokaság de Rham kohomológia-tereinek dimenziói között.

Tétel 2 (Deligne)**.** *Legyen X egy sima projektív algebrai varietás $\mathbf{Q}$ felett. Tegyük fel, hogy véges sok prím q hatványaitól eltekintve X leszámláló–függvénye polinom alakú:*

$$|X(\mathbf{F}_q)| = b_d q^d + b_{d-1} q^{d-1} + \cdots + b_0$$

valamely (q-tól független) $b_0, \ldots, b_d$ együtthatókra[2]*. Ekkor, minden $k \in \{0, \ldots, d\}$ esetén*

$$b_k = dim_{\mathbf{C}} H^{2k}_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$$

és minden $k \in \{0, \ldots, d-1\}$ esetén

$$dim_{\mathbf{C}} H^{2k+1}_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = 0.$$

A tétel feltétele erősnek tűnhet, ám kiderül hogy az így is lefed számos érdekes esetet. Lássunk ezek közül egyet!

Példa 1. *Legyen X a Fermat-görbe az $n = 2$ esetben, amelynek egyenlete könnyen láthatóan*

$$x^2 = (z - y)(z + y)$$

alakra hozható. Tegyük fel, hogy $q \neq 2$. Mivel a megoldásokat átskálázás erejéig azonosnak tekintjük, különböztessük meg az $x \neq 0$ és $x = 0$ eseteket. Az első esetben elérhetjük, hogy $x = 1$ legyen, és bevezethetjük az $u = z - y, v = z + y$ új koordinátákat. Ekkor minden rögzített $u \neq 0$ érték esetén $v = u^{-1}$ már egyértelműen meghatározott. Mivel $q \neq 2$, azért u és v pedig meghatározzák y és z értékét:

$$y = 2^{-1}(v - u), \quad z = 2^{-1}(v + u).$$

Látjuk tehát, hogy a $\mathbf{F}_q P^2$ projektív síkon $q - 1$ ilyen megoldás van: minden $u \in \mathbf{F}_q \setminus \{0\}$ esetén $[2 : u^{-1} - u : u^{-1} + u]$. Másrészről, amennyiben $x = 0$ akkor sem y sem z nem lehet 0, így átskálázással elérhetjük hogy $y = 1$ legyen. Ekkor azonban $z = \pm 1$, amely a $q \neq 2$ esetben két egymástól különböző megoldást ad. Összeadva a különböző megoldások számát tehát megkapjuk a leszámláló–függvényt:

$$|X(\mathbf{F}_q)| = q + 1.$$

Mivel ez polinom, ezért alkalmazható Deligne tétele, és azt kapjuk hogy

$$dim_{\mathbf{C}} H^0_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = 1 = dim_{\mathbf{C}} H^2_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}),$$

[2] A tétel ennél gyengébb feltételek mellett is igaz, amelyek kimondása azonban itt túl technikai lenne.

és

$$dim_{\mathbf{C}} H^1_{dR}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) = 0.$$

Ellenőrizzük most le geometriailag a kapott eredményt! A Fermat-egyenlet $n = 2$ *esete egy sima másodfokú görbét határoz meg a projektív síkon. Ismert elemi projektív geometriából, hogy a komplex számok felett bármely sima másodfokú görbe homeomorf egy két-dimenziós* S^2 *gömbbel. Az* S^2 *kohomológia-csoportjainak dimenziója bizonyos standard technikák alkalmazásával egyszerűen kiszámolhatók: a* 0*-adik kohomológia-csoportját az állandó függvények alkotják, amelyek értelemszerűen* 1*-dimenziós vektorteret határoznak meg. A második kohomológia-csoportját bármely rögzített térfogati formájának többszörösei alkotják. Végül, azt hogy az első kohomológia-csoportja eltűnik, kicsit körülményesebb szabatosan belátni; következik például abból a szemléletesen (de matematikailag nem teljesen) nyilvánvaló észrevételből, hogy* S^2*-n minden hurok "pontra húzható".*

Noha Deligne tételeinek kimondása nem használja a Hodge-struktúra fogalmát, a bizonyítás technikai részletei sokat merítenek a tiszta Hodge-struktúrák egy általánosításának, az úgynevezett kevert Hodge-struktúrák tulajdonságaiból, amelyek kidolgozása szintén Deligne érdeme [2], [3]. Továbbá, N. Katz általánosította Deligne tételeinek fenti következményét arra az esetre, amikor X nem feltétlenül sima projektív [6]; ennek az általánosításnak már a kimondása is a kevert Hodge-struktúrákon alapul. Ezen további elméletek magyarázata azonban már túlmutat jelen cikkünk keretein.

References

[1] P. Deligne, *La conjecture de Weil: I*, Publ. Math. IHES, **43**, 1974.

[2] P. Deligne, *Théorie de Hodge. II*, Publ. Math. IHES, **40**, 1971.

[3] P. Deligne, *Théorie de Hodge. III*, Publ. Math. IHES, **44**, 1974.

[4] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.

[5] W. Hodge, *The Theory and Application of Harmonic Integrals*, Cambridge University Press, New York, 1941.

[6] N. Katz, *E-polynomials, zeta-equivalence and polynomial count varieties*, függelék itt: T. Hausel, F. Rodriguez-Villegas, *Mixed Hodge polynomials of character varieties*, Invent. Math. **174**, 2008.