

Differenciálgeometria
Előadás jegyzetek
BME 3. félév

Dr. Szabó Szilárd

KIVONAT. Ezek a jegyzetek a 2007. I. félévben, a Budapesti Műszaki Egyetemen tartott Differenciálgeometria kurzusomhoz készültek.

Tartalomjegyzék

I. Rész Topológiai alapfogalmak	5
1. Fejezet Általános topológia	7
1.1. Metrikus terek	7
1.2. Topologikus terek	12
1.3. Műveletek topologikus terekkel	18
1.4. Összefüggőség	24
1.5. Kompaktság	30
2. Fejezet Alapvető algebrai topológia	35
2.1. Homotópia és fundamentális csoport	35
2.2. Fedőleképezések	44
II. Rész Riemann-felületek geometriája	73
3. Fejezet A Riemann-felülettel kapcsolatos definíciók	75
3.1. Sokaságok, differenciálható struktúrák	75
3.2. Peremes sokaságok és sokaságok összefüggő összege	80
3.3. Sima részsokaságok	82
3.4. Differenciálható sokaság euklideszi térbe való beágyazhatósága	85
3.5. Differenciálható csoporthatások	87
3.6. Irányíthatóság	90
3.7. Komplex koordináták	94
3.8. Érintőtér, lokális koordinátázás	97
3.9. Riemann-féle metrika	99
3.10. Gauss-féle metszet-görbület	102
4. Fejezet A Riemann-felületek osztályozása	105
4.1. A hiperbolikus sík	105
4.2. A Riemann-féle gömb	110
4.3. Az uniformizációs tétel	110
5. Fejezet A Gauss-Bonnet tétel	113
5.1. Az Euler-Poincaré karakterisztika	113
5.2. Felületelem, integrálás	113
5.3. A tétel	113
Irodalomjegyzék	115

I. Rész

Topológiai alapfogalmak

1. FEJEZET

Általános topológia

Ebben a fejezetben — amennyiben nem jelentjük ki az ellenkezőjét — X egy tetszőleges halmazt jelöl.

1.1. Metrikus terek

Jelöljük $\mathbf{R}$ -rel a valós számok és $\mathbf{R}_+$ -szal a pozitív valós számok halmazát.

DEFINÍCIÓ 1.1. Egy *metrika* X -en egy olyan

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$$

leképezés, amely teljesíti a következő feltételeket:

- (i) pozitivitás: $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor ha $x = y$,
- (ii) szimmetria: minden $x, y \in X$ -re $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) háromszög-egyenlőtlenség: minden $x, y, z \in X$ -re $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Amenyiben az X halmazon adott egy d metrika, az (X, d) párt *metrikus térnek* nevezzük.

Emlékeztessünk a normált vektortér fogalmára.

DEFINÍCIÓ 1.2. Legyen V egy (véges- vagy végtelen-dimenziós) valós vektortér. Egy *norma* V -n egy

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$$

leképezés, amely teljesíti a következő feltételeket:

- (i) $\|v\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $v = 0$,
- (ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ minden $v, w \in V$ -re,
- (iii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ minden $v \in V$ -re és $\lambda \in \mathbf{R}$ -re.

Ha $X = V$ egy valós vektortér és $\|\cdot\|$ egy norma V -n, akkor $\|\cdot\|$ indukál egy metrikát V -n a

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

képlet által. Ismert, hogy az ellenkező irányú állítás nem igaz.

A következő példák közül pontosan az (i)-(v) pontbeli metrikák származnak normából.

PÉLDA 1.3. (i) Az egyik legfontosabb példa az $X = \mathbf{R}$, $d_{\text{eukl}}(x, y) = |x - y|$ ún. egydimenziós *euklideszi tér*.

- (ii) Ennek általánosítása tetszőleges dimenzióra: $X = \mathbf{R}^n$, és tetszőleges $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ vektorokra

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

az n -dimenziós euklideszi tér.

- (iii) A (i) egy másik általánosítása: X az $\mathbf{R}^n$ tér a *taxisofőr*-, vagy l^1 -metrikával:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Az $n = 2$ esetben ez szemléletesen egy csak derékszögű útkereszteződésekben álló városban a két pont közötti legrövidebb út hossza.

- (iv) Egy harmadik általánosítás $X = \mathbf{R}^n$ -re a

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$$

supremum-, vagy L^∞ -metrika.

- (v) Végül egy végtelen-dimenziós normált vektortér, amely analóg az előző példával: legyen X a $[0, 1]$ intervallumon folytonos valós függvények $\mathcal{C}([0, 1])$ halmaza,

$$d_\infty(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|,$$

a *supremum*-, vagy L^∞ -metrika.

- (vi) A legriválisabb metrika a *diszkrét metrika*: X tetszőleges, $d_{\text{diszkr}}(x, y) = 1$ bármely $x \neq y$ -ra.
- (vii) Legyen $X = \mathbf{Q}$ és p egy tetszőleges prímszám. Legyen

$$|\cdot|_p : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$$

a következőképpen definiálva: egyrészt, legyen $|0|_p = 0$; másrészt, tetszőleges $q = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ -t felírhatunk egyértelműen $p^v \frac{m_1}{n_1}$ alakban, ahol $v \in \mathbf{Z}$, m_1 és n_1 relatív prímek és $n_1 > 0$; legyen ekkor $|q|_p = p^{-v}$. Ha $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$, akkor definiáljuk a $d_p(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|_p$ metrikát, amelyet *p-adikus metrikának* nevezünk.

DEFINÍCIÓ 1.4. Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek, és $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f *izometria*, ha bijektív és távolságtartó: minden $x_1, x_2 \in X$ -re

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Amennyiben f csak injektív és távolságtartó, akkor *izometrikus beágyazásnak* nevezzük.

MEGJEGYZÉS 1.5. Az izometrikus beágyazás definíciójából kihagyhatnánk az injektivitást, és akkor is ekvivalens fogalmat kapnánk – miért?

FELADAT 1.6. Bizonyítsuk be, hogy az $(\mathbf{R}^n, d_2)$ euklideszi tér tetszőleges saját magával való izometriája szükségszerűen affin leképezés!

A következőben leírunk néhány konstrukciót új metrikus terek értelmezésére.

1.1.1. Metrika megszorítása egy altérre. Legyen (X, d) egy metrikus tér, és $Y \subseteq X$ egy részhalmaza.

DEFINÍCIÓ 1.7. d megszorítása Y -ra az a $d|_Y$ metrika Y -on, amelyre minden $y_1, y_2 \in Y$ -ra

$$d|_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2).$$

Az $(Y, d|_Y)$ metrikus teret az (X, d) metrikus alterének nevezzük.

MEGJEGYZÉS 1.8. Tetszőleges $(Y, d|_Y) \subseteq (X, d)$ metrikus altérre az inklúzió izometrikus beágyazás.

- PÉLDA 1.9.**
- (i) Az $(\mathbf{R}^n, d_2)$ n -dimenziós euklideszi tér megszorítása az $\mathbf{R} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ alterére az 1-dimenziós euklideszi tér.
 - (ii) Az $(\mathbf{R}^n, d_1)$ metrikus tér megszorítása az $\mathbf{R} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ alterére szintén az 1-dimenziós euklideszi tér. E terek tehát ebben az értelemben általánosításaik $(\mathbf{R}, d_2)$ -nak.

FELADAT 1.10. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

- (i) $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ megszorítása az állandó függvényekre az 1-dimenziós euklideszi tér.
- (ii) Bármely $m > 1$ -re az $(\mathbf{R}^m, d_1)$ tér *nem* metrikus vektor-altere az n -dimenziós euklideszi térnek semmelyik $n \in \mathbf{N}$ -re sem.
- (iii) Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ -re egy $(n + 1)$ -elemű halmaz a diszkrét metrikával metrikus altere az n -dimenziós euklideszi térnek.
- (iv) Ugyanez nem igaz az $(n - 1)$ -dimenziós euklideszi térre.
- (v) $(\mathbf{R}^2, d_2)$ metrikus vektor-altere $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ -nek.
- (vi) $(\mathbf{R}^2, d_1)$ metrikus vektor-altere $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ -nek.

1.1.2. Szorzat-terek. Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek. Ebben az esetben $X \times Y$ -on többféleképpen is értelmezhetünk metrikát:

- (i) $d_{\text{eukl}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$,
- (ii) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$,
- (iii) $d_{\text{sup}}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$.
- (iv) Az előző példák speciális esetei a következő konstrukciónak: legyen $p \in [1, +\infty]$ tetszőleges, és

$$d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p)^{\frac{1}{p}}.$$

FELADAT 1.11. Mutassuk meg, hogy ezen kifejezések mindegyike teljesíti a metrika definícióját!

Ezen konstrukciók mindegyike általánosítható véges sok tér szorzatára, megfelelő módosításokkal pedig végtelen sok tér szorzatára is.

PÉLDA 1.12. Könnyen látható, hogy az $(\mathbf{R}^n, d_2)$ és $(\mathbf{R}^n, d_1)$ terek az $(\mathbf{R}, d_{\text{eukl}})$ tér önmagával vett n -szeres szorzataként kaphatók meg az (i) illetve (ii) értelemben.

1.1.3. Folytonosság és nyílt halmazok. A valós analízisből ismert folytonosság-fogalom azonnal általánosítható metrikus terek közötti leképezésekre.

DEFINÍCIÓ 1.13. Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek, és $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f *folytonos* valamely $x \in X$ -ben, ha bármely $\varepsilon > 0$ -ra létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x' \in X$ olyan hogy $d_X(x, x') < \delta$, mindannyiszor $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Azt mondjuk, hogy f *mindenütt folytonos*, ha minden $x \in X$ -ben folytonos.

FELADAT 1.14. Legyenek (X, d_X) , (Y, d_Y) és (Z, d_Z) metrikus terek. Lássuk be, hogy ha $f : X \rightarrow Y$ és $g : X \rightarrow Z$ folytonosak, akkor $(f, g) : X \rightarrow Y \times Z$ is folytonos a szorzat-metrika mindhárom definíciójával.

DEFINÍCIÓ 1.15. Legyen (X, d_X) egy metrikus tér, $x \in X$ és $\varepsilon > 0$. Azon x' pontok halmazát, amelyekre $d_X(x, x') < \varepsilon$, az x *középpontú ε sugarú nyílt gömbnek* nevezzük, és $B_\varepsilon(x)$ -szel jelöljük.

- PÉLDA 1.16.** (i) $(\mathbf{R}, d_{\text{eukl}})$ -on $B_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
(ii) $(\mathbf{R}^2, d_2)$ -on $B_\varepsilon(x)$ egy x középpontú ε sugarú körlap, a határvonala nélkül.

Ezen példák indokolják a “nyílt” elnevezést.

FELADAT 1.17. Határozzuk meg a 0 középpontú ε sugarú nyílt gömböt a következő terekben!

- (i) $(\mathbf{R}^2, d_1)$
(ii) $(C([0, 1]), d_\infty)$

ÁLLÍTÁS 1.18. Legyen (X, d_X) egy metrikus tér. Ekkor bármely $B_\varepsilon(x)$ nyílt gömb bármely x' pontjához létezik olyan $\varepsilon' > 0$, amelyre $B_{\varepsilon'}(x') \subseteq B_\varepsilon(x)$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $d(x, x') = \delta$. Ekkor, mivel $x' \in B_\varepsilon(x)$, ezért $\delta < \varepsilon$. Válasszuk ε' -t úgy, hogy $0 < \varepsilon' < \varepsilon - \delta$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt, ha $d(x', x'') < \varepsilon'$, akkor $d(x, x'') < \varepsilon$. $\square$

Az x pontbeli folytonosság definícióját a nyílt gömb fogalma segítségével átfogalmazhatjuk a következőképpen: bármely $\varepsilon > 0$ -ra létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \supset B_\delta(x)$.

DEFINÍCIÓ 1.19. Legyen (X, d_X) egy metrikus tér és $V \subseteq X$. Azt mondjuk, hogy V *nyílt halmaz*, ha üres vagy bármely $x' \in V$ pontjához létezik olyan $\varepsilon' > 0$, amelyre $B_{\varepsilon'}(x') \subseteq V$.

MEGJEGYZÉS 1.20. Az 1.18 Állítás értelmében minden nyílt gömb nyílt halmaz.

TÉTEL 1.21. Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek, és $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. A következő állítások ekvivalensek:

- (i) f mindenütt folytonos.
- (ii) Minden Y -beli nyílt gömb ősképe nyílt halmaz.
- (iii) Minden Y -beli nyílt halmaz ősképe nyílt halmaz.

BIZONYÍTÁS.

- (i) $\Rightarrow$ (ii): Legyen $B_\varepsilon(y)$ tetszőleges nyílt gömb Y -ban, és $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(y))$. Ez azt jelenti, hogy $d_Y(f(x), y) < \varepsilon$. Legyen $\eta = \varepsilon - d_Y(f(x), y) > 0$. Mivel f folytonos x -ben, ezért létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f^{-1}(B_\eta(f(x))) \supset B_\delta(x)$. Másrészt nyilván $f^{-1}(B_\eta(f(x))) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(y))$, tehát utóbbi nyílt halmaz.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii): Legyen $V \subseteq Y$ egy tetszőleges nyílt halmaz, és $x \in f^{-1}(V)$. Mivel V nyílt, ezért tartalmaz egy $B_\varepsilon(f(x))$ nyílt gömböt. Alkalmazzuk (ii)-t erre a gömbre: létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \supset B_\delta(x)$. Másrészt nyilván $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(V)$, tehát ez utóbbi nyílt halmaz.
- (iii) $\Rightarrow$ (i): Legyen $x \in X$ és $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen. Legyen $V = B_\varepsilon(f(x))$. Ekkor (iii) miatt $f^{-1}(V)$ nyílt halmaz, amely nyilván tartalmazza x -et. Ezért tartalmaz egy x körüli valamely $\delta > 0$ sugarú nyílt gömböt. Tehát f folytonos x -ben. $\square$

A tétel alapján nyilvánvaló, hogy a nyílt halmazok fontos szerepet játszanak a folytonos leképezések vizsgálatában. Vizsgáljuk most meg a legfontosabb tulajdonságait.

TÉTEL 1.22. *Legyen (X, d) egy metrikus tér.*

- (i) X -beli nyílt halmazok tetszőleges egyesítése is nyílt halmaz X -ben.
- (ii) Véges sok X -beli nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz X -ben.
- (iii) Minden X -beli nyílt halmaz előáll X -beli nyílt gömbök egyesítéseként.

BIZONYÍTÁS.

- (i) Tegyük fel hogy valamely I indexhalmazra minden $i \in I$ esetén $V_i \subseteq X$ nyíltak. Legyen $V = \cup_{i \in I} V_i$, és $x \in V$. Ekkor $x \in V_i$ valamely $i \in I$ -re, és mivel V_i nyílt, ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$ amelyre $B_\varepsilon(x) \subseteq V_i$. Ebből következik $B_\varepsilon(x) \subseteq V$.
- (ii) Legyenek V_i nyíltak $i \in \{1, \dots, n\}$ -re, és tegyük fel hogy $x \in \cap_{i=1}^n V_i$. (Ha $\cap_{i=1}^n V_i = \emptyset$, akkor definíció szerint kész vagyunk.) Ekkor minden i -re létezik olyan $\varepsilon_i > 0$, amelyre $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq V_i$. Legyen $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i > 0$. Ekkor $B_\varepsilon(x) \subseteq \cap_{i=1}^n V_i$.
- (iii) Legyen $V \subseteq X$ nyílt halmaz. Definíció szerint minden $x \in V$ -re létezik olyan $\varepsilon_x > 0$ amelyre $B_{\varepsilon_x}(x) \subset V$. A kiválasztási axióma értelmében választhatunk minden x -re egy ilyen ε_x -et. Ekkor $V = \cup_{x \in V} B_{\varepsilon_x}(x)$. $\square$

1.2. Topologikus terek

A 1.22 Tétel (iii) pontját úgy szokás kifejezni, hogy a nyílt gömbök családja a nyílt halmazok családjának egy *bázisát* alkotják (az egyesítésre nézve). Ahogy az például a 1.21 Tételből is látszik, sok tulajdonság ellenőrzéséhez elegendő az összes nyílt halmaz helyett a bázis elemeire korlátozódni. Ez egy általános érvényű elv, amely elvezet a topológia fogalmához. Ez a mostani szakasz témája.

1.2.1. Topológia, bázis, folytonosság.

DEFINÍCIÓ 1.23. Egy X halmaz részhalmazainak olyan $\mathcal{U}$ családját, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,
- (ii) $\mathcal{U}$ zárt teszőleges egyesítésre,
- (iii) $\mathcal{U}$ zárt véges metszetre,

X -en értelmezett *topológiának*, az $(X, \mathcal{U})$ párt pedig *topologikus térnek* nevezzük. Ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$ -beli részhalmazok egy olyan részcsaládja, hogy bármely $\mathcal{U}$ -beli részhalmaz előáll $\mathcal{B}$ -beli részhalmazok egyesítéseként, akkor $\mathcal{B}$ -t a topológia egy *bázisának* nevezzük. Végül, azt mondjuk hogy $\mathcal{B}$ *generálja* a topológiát.

- PÉLDA 1.24.
- (i) Tetszőleges X halmazra az az $\mathcal{U}_{\text{triv}}$ amely csak $\emptyset$ -t és X -et tartalmazza, topológiát ad meg X -en, melynek neve: a *triviális topológia*, és egy bázisát alkotja $\mathcal{B} = \{X\}$.
 - (ii) Tetszőleges X halmazra az $\mathcal{U}_{\text{diszkr}} = \mathcal{P}(X)$ összes részhalmaz családja a *diszkrét topológiát* határozza meg X -en. Ennek egy bázisát alkotják az egyelemű halmazok.
 - (iii) Ha d egy metrika X -en, akkor az előző szakaszban értelmezett nyílt halmazok összessége egy $\mathcal{U}_d$ topológiát ad meg X -en, és a nyílt gömbök családja bázisa e topológiának, ld. 1.22 Tétel. $\mathcal{U}_d$ -t a d metrika által *indukált* topológiának hívjuk.
 - (iv) Az előző pont speciális esete: $M(n, \mathbf{R})$ (illetve $M(n, \mathbf{C})$), az $\mathbf{R}$ (illetve $\mathbf{C}$) feletti n -szer n -es mátrixok halmaza azonosítható $\mathbf{R}^{n^2}$ -tel (illetve $\mathbf{C}^{n^2}$ -tel), tehát a d_2 euklideszi metrika indukál rajta egy topológiát.
 - (v) Legyen $X = \mathbf{Z}$, és minden $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \geq 2$ számokra legyen

$$V_{a,b} = \{n \in \mathbf{Z} : n \equiv b \pmod{a}\}.$$

Ekkor az a $\mathcal{B}_{\text{arit}}$ család, amelynek elemei $V_{a,b}$ -k az összes (a, b) párra, generál $\mathbf{Z}$ -n egy $\mathcal{U}_{\text{arit}}$ topológiát.

- (vi) Legyen $X = \mathbf{C}$, és minden véges $S \subset \mathbf{C}$ pontthalmazra legyen $V_S = \mathbf{C} \setminus S$. Ekkor az összes ilyen halmazok $\mathcal{U}_{\text{zar}} = \{V_S\}_S$ családja az ún. *Zariski-topológiát* értelmezi $\mathbf{C}$ -n.

MEGJEGYZÉS 1.25. Egy topológiának több bázisa is lehet, és két bázisnak a számossága nem feltétlen egyezik meg. Például, $\mathcal{B} = \mathcal{U}$ mindig bázisa a topológiának, de ettől különböző bázisai is lehetnek.

FELADAT 1.26. Adjuk meg a $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ tér egy megszámlálható bázisát!

ÁLLÍTÁS 1.27. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ részhalmazok egy családja. Ahhoz, hogy $\mathcal{B}$ bázisa legyen valamely topológiának, szükséges és elegendő a következő két feltétel:

- (i) minden $x \in X$ -re létezik olyan $B \in \mathcal{B}$, amelyre $x \in B$ ($\mathcal{B}$ elemei lefedik X -et),
- (ii) bármely $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ -re és $x \in B_1 \cap B_2$ -re létezik olyan $B_3 \in \mathcal{B}$, amelyre $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Ha ezen feltételek teljesülnek, akkor $\mathcal{B}$ pontosan egy topológia bázisa; ennek neve a $\mathcal{B}$ által generált topológia.

BIZONYÍTÁS. Szükségesség: (i) a bázis definíciójából és $X \in \mathcal{U}$ -ból rögtön következik. Ha $\mathcal{B}$ generál egy $\mathcal{U}$ topológiát, akkor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, tehát minden $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ -re $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}$. Ha ez a metszet nem üres, akkor előáll $\mathcal{B}$ -beli részhalmazok egyesítéseként. Tehát minden $B_1 \cap B_2$ -beli x elem benne van valamely $B_3 \in \mathcal{B}$ -ben, ami pontosan (ii).

Elegendőség: Legyen $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ az összes olyan halmaz, amely előáll $\mathcal{B}$ -beli halmazok egyesítéseként. Ekkor $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ -re a topológia első két tulajdonsága triviálisan teljesül, a véges metszetre való zárttságot pedig elegendő két halmaz metszetére belátni. Legyen tehát $U_1 = \cup_{i \in I} A_i$ és $U_2 = \cup_{j \in J} B_j$, ahol $A_i, B_j \in \mathcal{B}$, és $x \in U_1 \cap U_2$ tetszőleges. Ekkor létezik $i_0 \in I$ és $j_0 \in J$ amelyre $x \in A_{i_0}$ és $x \in B_{j_0}$. Ezért, a (ii) feltétel miatt létezik $C = C_x \in \mathcal{B}$ amelyre $x \in C_x \subseteq A_{i_0} \cap B_{j_0}$. Válasszunk minden $x \in U_1 \cap U_2$ -re egy ilyen C_x halmazt. Ekkor $U_1 \cap U_2 = \cup_{x \in U_1 \cap U_2} C_x$, tehát $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_\mathcal{B}$.

Egyértelműség: tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ két különböző $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ topológiának is bázisa. Legyen $U \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2$. Ekkor $U = \cup_{i \in I} B_i$ valamely I indexhalmazzal és $B_i \in \mathcal{B}$ halmazokra, mert $\mathcal{B}$ generálja $\mathcal{U}_1$ -et. Másrészt, mivel $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}_2$, ezért minden $B_i \in \mathcal{U}_2$, és mivel $\mathcal{U}_2$ zárt tetszőleges egyesítésre, ezért $U \in \mathcal{U}_2$. Ez ellentmondás. $\square$

MEGJEGYZÉS 1.28. A topologikus tér fogalma általánosabb a metrikus tér fogalmánál. Általában nehéz feladat eldönteni egy topologikus térről, hogy valamely metrika indukálja-e. Az olyan topologikus tereket, amelyekre a válasz igen, *metrizálható* tereknek nevezzük.

- FELADAT 1.29.
- (i) Lássuk be, hogy a triviális topológia egy 1-nél nagyobb elemszámú halmazon nem metrizálható!
 - (ii) Lássuk be, hogy a diszkrét topológiát a diszkrét metrika indukálja!
 - (iii) Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{R}^n$ -en a d_2 és a d_1 metrikák ugyanazt a topológiát indukálják! Ezt a topológiát $\mathbf{R}^n$ *standard topológiájának* nevezzük.
 - (iv) Adjunk meg az $(\mathbf{R}^n, d_2)$ metrikus tér által indukált topológiának egy megszámlálható végtelen bázisát!

(v) Mutassuk meg, hogy a Zariski-topológia nem metrizálható!

Ezek után általánosíthatjuk a folytonosság fogalmát topologikus terekre.

DEFINÍCIÓ 1.30. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, és legyen $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f *folytonos*, ha minden $V \in \mathcal{U}_Y$ -re $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_X$. Azt mondjuk, hogy f *homeomorfizmus*, amennyiben bijektív, és inverzével együtt folytonos. Végül, X és Y *homeomorfak*, ha létezik közöttük homeomorfizmus.

A topologikus terek körében a homeomorfizmus ekvivalencia-reláció. A topológiában a homeomorf terek megkülönböztethetetlenek, azaz minden topológiai állítás, amely igaz valamely térre, igaz minden vele homeomorf térre is.

ÁLLÍTÁS 1.31. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ és $(Z, \mathcal{U}_Z)$ topologikus terek, $f : X \rightarrow Y$ és $g : Y \rightarrow Z$ folytonos leképezések. Ekkor $g \circ f : X \rightarrow Z$ is folytonos.

BIZONYÍTÁS. Tetszőleges $U \in \mathcal{U}_Z$ -re $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Mivel g folytonos, ezért $g^{-1}(U) \in \mathcal{U}_Y$. Ezért f folytonosságából következik, hogy $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{U}_X$. $\square$

DEFINÍCIÓ 1.32. Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ egy topologikus tér és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy az $N \subseteq X$ halmaz egy *környezete* x -nek, ha létezik olyan $V \in \mathcal{U}_X$, amelyre $x \in V \subseteq N$.

Topologikus terek körében is értelmezhetjük az egy pontbeli folytonosságot.

DEFINÍCIÓ 1.33. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, és legyen $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az $x \in X$ pontban*, ha $f(x)$ -nek bármely M környezetéhez létezik x -nek olyan N környezete, amelyre $f(N) \subseteq M$. Azt mondjuk továbbá, hogy f *mindenütt folytonos*, ha minden $x \in X$ -ben folytonos.

Az 1.21 Tétel bizonyításának nyilvánvaló módosítása most a következő adja:

TÉTEL 1.34. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, és $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. A következő feltételek ekvivalensek:

- (i) f mindenütt folytonos,
- (ii) $\mathcal{U}_Y$ tetszőleges $\mathcal{B}_Y$ bázisára minden báziselem ősképe nyílt,
- (iii) f folytonos.

Hasonlóan a folytonossághoz, a sorozatok határértéke is értelmezhető a topologikus terek körében.

DEFINÍCIÓ 1.35. Legyen X egy topologikus tér. Egy *sorozat* X -ben egy $x : \mathbf{N} \rightarrow X$ leképezés. Az $x(n) \in X$ elemet általában x_n -nel jelöljük, magát az x leképezést pedig $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ -nel. Azt mondjuk,

hogy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergál $x \in X$ -hez, ha x tetszőleges N környezetére véges sok kivétellel teljesül $x_n \in N$. Ekkor x -et az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat *határértékének* nevezzük, jelölésben: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$.

Az X -en értelmezett topológiák között létezik egy természetes részben rendezés.

DEFINÍCIÓ 1.36. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ két topológia X -en. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}_1$ *finomabb* $\mathcal{U}_2$ -nél (vagy ekvivalens módon, $\mathcal{U}_2$ *durvább* $\mathcal{U}_1$ -nél), ha minden $\mathcal{U}_2$ -beli V -hez és $x \in V$ -hez létezik olyan U eleme $\mathcal{U}_1$ -nek, amelyre $x \in U \subseteq V$. Jelölés: $\mathcal{U}_2 \preceq \mathcal{U}_1$.

FELADAT 1.37. Igazoljuk a következőket!

- (i) Minden topológia X -en finomabb a triviális topológiánál, és durvább a diszkrét topológiánál.
- (ii) Az $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ számsíkon a Zariski-topológia durvább a szokványosnál.
- (iii) $\mathcal{U}_1$ akkor és csak akkor finomabb $\mathcal{U}_2$ -nél, ha az identikus leképezés $(X, \mathcal{U}_1)$ -ből $(X, \mathcal{U}_2)$ -be folytonos.

Végezetül, a nyílt halmazokhoz hasonlóan értelmezhető a zárt halmaz fogalma is.

DEFINÍCIÓ 1.38. Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ egy topologikus tér. Egy olyan Z halmazt, amelyre $X \setminus Z \in \mathcal{U}$, *zárt halmaznak* nevezzük. A zárt halmazok családját $\mathcal{Z}$ -vel jelöljük. Legyen $Y \subseteq X$ egy tetszőleges részhalmaz. Ekkor X legszűkebb olyan zárt részhalmazát, amely tartalmazza Y -t, az Y *lezártjának* nevezzük, és $\overline{Y}$ -val jelöljük.

Az, hogy Y lezártja létezik, a Zorn-lemmából következik. Az egyértelműség ekkor amiatt teljesül, hogy ha két zárt halmaz Z_1 és Z_2 tartalmazza Y -t, akkor $Z_1 \cap Z_2$ is zárt és tartalmazza Y -t, tehát a legszűkebb elem előáll mint

$$\overline{Y} = \cap Z,$$

ahol a metszet az összes Y -t tartalmazó zárt halmazra vonatkozik. A definícióból azonnal következik, hogy minden zárt halmaz lezártja saját maga.

ÁLLÍTÁS 1.39. Ha $V \subseteq X$ nyílt és $V \cap Y = \emptyset$, akkor $V \cap \overline{Y} = \emptyset$.

BIZONYÍTÁS. Ellenkező esetben teljesülnének a

$$Y \subseteq \overline{Y} \setminus V \subset \overline{Y}$$

tartalmazások. Mivel $\overline{Y}$ zárt és V nyílt, azért $\overline{Y} \setminus V$ zárt, ellentmondva annak, hogy $\overline{Y}$ a legszűkebb zárt halmaz ami tartalmazza Y -t. $\square$

FELADAT 1.40. (i) Mutassuk meg, hogy

- (a) $\emptyset, X \in \mathcal{Z}$,
- (b) $\mathcal{Z}$ zárt tetszőleges számú metszetre,
- (c) $\mathcal{Z}$ zárt véges számú egyesítésre!

- (ii) Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, és legyen $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor folytonos, ha minden zárt halmaz ösképe zárt!

FELADAT 1.41 (H. Fürstenberg). Legyen $X = \mathbf{Z}$, az $\mathcal{U}_{\text{arit}}$ topológiával.

- (i) Lássuk be, hogy minden nemüres nyílt halmaz tartalmaz legalább egy számtani sorozatot; többek közt, végtelen!
- (ii) Lássuk be, hogy a $V_{a,b}$ halmazok egyben zártak is!
- (iii) Lássuk be, hogy minden $n \notin \{-1, 1\}$ -re létezik olyan p prímszám, amelyre $n \in V_{p,0}$!
- (iv) Vezessük le az eddigiekből, hogy végtelen sok prímszám létezik!

1.2.2. Albázisok. Legyen X egy halmaz, és $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tetszőleges. Ekkor megkérdezhetjük, hogy mely topológiákban nyílt $\mathcal{S}$ minden eleme. Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{U}_{\text{diszkr}}$ diszkrét topológiára ez igaz. Továbbá, ha igaz valamely $\mathcal{U}$ topológiára, akkor igaz minden $\mathcal{U}$ -nál finomabb topológiára is. Természetes kérdés tehát, hogy melyik a legdurvább topológia, amelyre teljesül.

DEFINÍCIÓ 1.42. A legdurvább olyan $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ topológia, amely tartalmazza $\mathcal{S}$ minden elemét, az $\mathcal{S}$ által *generált* topológia. Ebben az esetben $\mathcal{S}$ -et $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ egy *albázisának* hívjuk.

MEGJEGYZÉS 1.43. Egy $\mathcal{U}$ topológia bármely $\mathcal{B}$ bázisa egyben albázisa is. A különbség a két fogalom között az, hogy előbbi esetében azt is megköveteljük, hogy a topológia minden eleme előálljon báziselemek egyesítéseként.

- FELADAT 1.44. (i) Bizonyítsuk be, hogy a 1.24, (v) Példában azok a $V_{a,b}$ halmazok, amelyekre $a = p^r$ prímszámhatvány, az $\mathcal{U}_{\text{arit}}$ topológiának egy albázisát alkotják, amely azonban nem bázis!
- (ii) Bizonyítsuk be, hogy a $] -\infty, a[$ és $]a, \infty[$ alakú intervallumok összessége (ahol $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges) albázisa $(\mathbf{R}, d_{\text{eukl}})$ -nek, de nem bázisa!

ÁLLÍTÁS 1.45. Bármely $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ részhalmaz által generált topológiának bázisa az $\mathcal{S}$ -beli elemek véges metszeteiből álló

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n S_i : S_i \in \mathcal{S} \right\}$$

család.

MEGJEGYZÉS 1.46. Itt használjuk azt az általában elfogadott meg egyezést, miszerint $\emptyset$ halmaz metszete a teljes tér, tehát $X \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}}$.

BIZONYÍTÁS. A $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ által generált topológia nyilván tartalmazza $\mathcal{S}$ minden elemét. Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{U}$ topológia tartalmazza $\mathcal{S}$ minden elemét. Ekkor, mivel $\mathcal{U}$ zárt véges metszetre, ezért tartalmazza $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ -et, és így az általa generált topológiát is. $\square$

FELADAT 1.47. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, $\mathcal{S}_Y$ az $\mathcal{U}_Y$ egy albázisa, és legyen $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Mutassuk meg, hogy f akkor és csak akkor folytonos, ha minden $S \in \mathcal{S}$ -re $f^{-1}(S) \in \mathcal{U}_X$!

1.2.3. Hausdorff-terek. A topologikus terek egy fontos osztályát alkotják a Hausdorff-terek.

DEFINÍCIÓ 1.48. Legyenek x és y egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér különböző pontjai. Azt mondjuk, hogy x és y *szétválaszthatók*, ha létezik olyan $U_x, U_y \in \mathcal{U}$ nyílt környezetei x -nek és y -nak, amelyekre $U_x \cap U_y = \emptyset$. Egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus teret *Hausdorff-térnek* nevezünk, ha tetszőleges két különböző pontja szétválasztható.

ÁLLÍTÁS 1.49. Legyen $(X, \mathcal{U})$ Hausdorff-tér, és $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ egy sorozat X -ben. Ekkor a sorozat határértéke (amennyiben létezik) egyértelműen meghatározott. Fordítva, ha az $(X, \mathcal{U})$ megszámlálható bázisú topologikus tér olyan, hogy benne minden sorozat határértéke egyértelműen meghatározott, akkor $(X, \mathcal{U})$ Hausdorff.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $x \neq y \in X$ olyanok, hogy $x_n \rightarrow x$ és $x_n \rightarrow y$ is teljesül. Legyenek $U_x, U_y \in \mathcal{U}$ szétválasztó környezetei x -nek és y -nak. Ekkor a konvergencia definíciója alapján elegendően nagy n -re $x_n \in U_x$ és $x_n \in U_y$ is teljesül, ami nyilván ellentmond $U_x \cap U_y = \emptyset$ -nek.

Ellenkező irányban, tegyük fel, hogy $(X, \mathcal{U})$ nem Hausdorff: ekkor tehát léteznek olyan $x, y \in X$ különböző pontok, amelyek minden U_x, U_y nyílt környezetére $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Legyen $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ és $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ az x és y pontok nyílt környezeteinek egy-egy megszámlálható bázisa. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy minden n -re $U_n \supseteq U_{n+1}$ és $V_n \supseteq V_{n+1}$ (különben tegyük $U'_n = \bigcap_{j=1}^n U_j$ -et). Feltétel szerint, $U_n \cap V_n \neq \emptyset$; legyen $x_n \in U_n \cap V_n$. Ekkor az $\{x_n\}$ sorozat mind x -hez, mind y -hoz tart: ha ugyanis U egy tetszőleges x -et tartalmazó nyílt halmaz, akkor valamely N értékre $U_N \subset U$ (hiszen $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ környezetbázis), ekkor azonban minden $n \geq N$ -re is teljesül $U_n \subset U$, tehát minden $n \geq N$ -re $x_n \in U$. $\square$

ÁLLÍTÁS 1.50. Minden metrikus tér Hausdorff.

BIZONYÍTÁS. Legyen (X, d) egy metrikus tér, és $x, y \in X$ különböző pontjai. Ekkor definíció szerint, $2\varepsilon = d(x, y) > 0$. Legyen $U_x = B_\varepsilon(x)$ és $U_y = B_\varepsilon(y)$. Könnyen látható, hogy U_x és U_y szétválasztják x -et és y -t. $\square$

Így tehát kaptunk sok példát Hausdorff-térre. Lássunk most néhány ellenpéldát:

FELADAT 1.51. A következő topologikus terek nem Hausdorffak:

- (i) a Zariski-topológia $\mathbb{C}$ -n,
- (ii) a triviális topológia egy legalább kételemű halmazon.

FELADAT 1.52. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Z}$ az $\mathcal{U}_{\text{arit}}$ topológiával Hausdorff!

1.3. Műveletek topologikus terekkel

1.3.1. Altér-topológia. Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ egy topologikus tér és $Y \subseteq X$ egy tetszőleges részhalmaza.

DEFINÍCIÓ 1.53. Az X által indukált topológia Y -on az az $\mathcal{U}_Y$ topológia, amelynek nyílt halmazai az összes $U \cap Y$ alakú halmaz, valamely $U \in \mathcal{U}_X$ -re.

- PÉLDA 1.54.**
- (i) Az $\mathbf{R}$ által indukált topológia $\mathbf{Z}$ -n a diszkrét topológia.
 - (ii) Bármely $Y \subset X$ -re, a diszkrét topológia által indukált topológia Y -on szintén a diszkrét topológia.
 - (iii) Az $\mathbf{R}^n$ standard topológiája által indukált topológia bármely $\mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^n$ lineáris alterén a standard topológia $\mathbf{R}^m$ -en.
 - (iv) Az $\mathbf{R}^2$ által indukált topológia az $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ körön definíció szerint a *kör szokványos topológiája*.
 - (v) Nevezzük *valós (illetve komplex) általános lineáris csoportnak* és jelöljük $\text{Gl}(n, \mathbf{R}) \subset M(n, \mathbf{R})$ -rel (illetve $\text{Gl}(n, \mathbf{C}) \subset M(n, \mathbf{C})$ -vel) a nemeltűnő determinánsú n -szer n -es valós (illetve komplex) mátrixok halmazát. Láttuk, hogy $M(n, \mathbf{R})$ -en (illetve $M(n, \mathbf{C})$ -en) az euklideszi metrika indukál egy topológiát. Ez tovább indukál egy topológiát $\text{Gl}(n, \mathbf{R})$ -en és $\text{Gl}(n, \mathbf{C})$ -n is.
 - (vi) Az előző ponthoz hasonlóan, legyen $\text{Sl}(n, \mathbf{R})$ (illetve $\text{Sl}(n, \mathbf{C})$) az 1 determinánsú n -szer n -es valós (illetve komplex) mátrixok halmaza; $\text{Sl}(n)$ -t *speciális lineáris csoportnak* hívjuk. Jelölje továbbá $\text{O}(n)$ és $\text{U}(n)$ az n -szer n -es valós ortogonális és n -szer n -es unitér mátrixok halmazait, és legyen $\text{SO}(n) = \text{O}(n) \cap \text{Sl}(n, \mathbf{R})$ és $\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{Sl}(n, \mathbf{C})$. Ekkor az euklideszi metrika megszorítása indukál egy topológiát ezeken a halmazokon.

Az indukált topológia jól viselkedik a folytonosságra vonatkozóan:

ÁLLÍTÁS 1.55. Legyen $Y \subset X$, és $f : X \rightarrow X'$ folytonos leképezés. Ekkor f megszorítása Y -ra is folytonos.

BIZONYÍTÁS. Jelöljük $f|_Y$ -nal f megszorítását Y -ra. Egy tetszőleges $U \subseteq X'$ nyílt halmazra $f|_Y^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap Y$, s ez utóbbi nyílt az indukált topológiában. $\square$

FELADAT 1.56. Mutassuk meg, hogy ha $(X, \mathcal{U}_X)$ Hausdorff, akkor Y az indukált topológiával is az!

1.3.2. Folytonos leképezés által indukált topológia. Az altér-topológia egy módosítása a következő konstrukció.

Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ egy topologikus tér, Y egy tetszőleges halmaz és $f : Y \rightarrow X$ egy leképezés.

ÁLLÍTÁS 1.57. *Létezik egy (egyértelmű) legdurvább $\mathcal{U}_Y$ topológia Y -on, amelyre f folytonos.*

BIZONYÍTÁS. Az egyértelműség triviális. Legyen

$$\mathcal{U}_Y = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_X\}.$$

Lássuk be, hogy $\mathcal{U}_Y$ egy topológia Y -on: nyilván $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ és $f^{-1}(X) = Y$. Másrészt, legyen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_X$; ekkor $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2)$, tehát $\mathcal{U}_Y$ zárt véges metszetre. Végül, ha $f^{-1}(U_i)$ $\mathcal{U}_Y$ -beli halmazok egy családja, akkor $\cup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\cup_{i \in I} U_i) \in \mathcal{U}_Y$. Ekkor f triviálisan folytonos ezekre a topológiákra nézve. $\square$

1.3.3. Szorzat-topológia. Legyenek $(X_i, \mathcal{U}_i)$ topologikus terek valamely $i \in I$ indexhalmazra.

DEFINÍCIÓ 1.58. Az $(X_i, \mathcal{U}_i)$ topologikus terek szorzata az a tér, amelynek alaphalmaza $X = \prod_i X_i$ a halmazok Descartes-szorzata, és amelynek egy bázisa az összes

$$\prod_{i \in I_0} U_i \times \prod_{i \in I \setminus I_0} X_i$$

alakú halmaz, ahol $I_0 \subseteq I$ véges és minden $i \in I_0$ esetén $U_i \in \mathcal{U}_i$.

- PÉLDA 1.59.**
- (i) Ha $I = \{1, \dots, n\}$ véges, akkor a szorzat-topológiát ekvivalens módon értelmezhetjük a $\prod_{i \in I} U_i$ alakú halmazokból álló bázissal.
 - (ii) Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ az $\mathbf{R}$ tér a standard topológiával ellátva. Az X saját magával vett n -szeres szorzata az $\mathbf{R}^n$ tér a standard topológiával.
 - (iii) Bármely $(X, \mathcal{U}_X)$ szorzata a véges elemszámú $(Y, \mathcal{U}_{\text{diszkr}})$ térrel az a tér, amelynek minden $y \in Y$ -ra egy $(X, \mathcal{U}_X)$ -szel homeomorf komponense van.
 - (iv) Bármely $(X, \mathcal{U}_{\text{diszkr}})$ szorzata $(Y, \mathcal{U}_{\text{diszkr}})$ -rel a diszkrét topologikus tér $X \times Y$ -on.
 - (v) Legyen $X_1, \dots, X_n$ az S^1 kör n példánya, mindegyikük a szokványos topológiával ellátva. Az $X_1 \times \dots \times X_n$ teret az n -dimenziós *tórusznak* nevezzük, és T^n -nel jelöljük.

Lássuk, miért természetes ez a definíció:

ÁLLÍTÁS 1.60. *Legyenek $(X, \mathcal{U})$ illetve $(Y_j, \mathcal{V}_j)$ topologikus terek valamely $j \in J$ indexhalmazra, és minden $j \in J$ -re egy $f_j : X \rightarrow Y_j$ leképezés. Képezzük az $f = (f_j)_{j \in J}$ leképezést X -ból $Y = \prod_j Y_j$ -be. Ekkor f pontosan akkor folytonos, ha minden f_j is az.*

BIZONYÍTÁS. Lássuk be először, hogy ha f folytonos, akkor minden f_j is az. Vegyük észre, hogy

$$f_j = \pi_j \circ f,$$

ahol

$$\pi_j : Y \rightarrow Y_j$$

a j -edik tényezőre való vetítés. Ezért a 1.31 Állítás értelmében elég belátni, hogy π_j folytonos. Ez következik abból, hogy bármely $V_j \in \mathcal{V}_j$ -re $\pi_j^{-1}(V_j) = V_j \times \prod_{l \neq j} Y_l$ nyílt.

Mutassuk meg most az ellenkező irányt. Tegyük fel tehát, hogy minden f_j folytonos. Az 1.34 Tétel miatt elég belátni, hogy Y minden báziselemének ősképe nyílt X szorzat-topológiájában. Legyen tehát valamely véges $J_0 \subseteq J$ részhalmaz és $V_j \subseteq Y_j$ ($j \in J_0$) nyílt halmazokkal $V = \prod_{j \in J_0} V_j \times \prod_{j \in J \setminus J_0} Y_j$ egy báziselem Y szorzat-topológiájában, valamint $x \in f^{-1}(V)$. Azt kell belátnunk, hogy x -nek létezik olyan U környezete, amelyet tartalmaz $f^{-1}(V)$. Mivel minden f_j folytonos, ezért választhatók minden $j \in J_0$ -hoz olyan U^j nyílt halmazok X -ben, amelyekre teljesül

$$x \in U^j \subseteq f_j^{-1}(V).$$

Legyen most

$$U = \bigcap_{j \in J_0} U^j.$$

Ekkor, mivel minden U^j nyílt X -ben és a metszet véges, ezért U is nyílt X -ben. Könnyen leellenőrizhető, hogy ezen U -ra teljesül a kívánt tartalmazás. $\square$

FELADAT 1.61. Bizonyítsuk be, hogy véges sok Hausdorff-tér szorzata is Hausdorff!

1.3.4. Hányados-topológia. Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér, Y egy halmaz, és $q : X \rightarrow Y$ egy szürjektív leképezés. Defináljuk a következő $\sim$ ekvivalencia-relációt X pontjain: $x_1 \sim x_2$ akkor és csak akkor, ha $q(x_1) = q(x_2)$. Jelöljük $X/\sim$ -mal a $\sim$ ekvivalenciaosztályainak halmazát. Ekkor $X/\sim$ bijekcióban áll Y -nal.

DEFINÍCIÓ 1.62. Az $(X, \mathcal{U})$ *hányados-topológiája* q -ra (vagy $\sim$ -ra) vonatkozóan az a topológia Y -on, amelynek egy bázisát alkotják az olyan U részhalmazok, amelyekre $q^{-1}(U) \in \mathcal{U}$.

MEGJEGYZÉS 1.63. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ilyen U -k családja teljesíti az 1.27 Állítás feltételeit, tehát egy (egyértelműen meghatározott) topológia bázisát alkotja. A hányados-topológia a legfinomabb topológia Y -on, amelyre q folytonos.

Teljesül ekkor a következő tulajdonság.

ÁLLÍTÁS 1.64. Legyen $Y = X/\sim$ a hányados-topológiával, Z tetszőleges topologikus tér és $f : X \rightarrow Z$ folytonos leképezés. Tegyük fel, hogy

bármely $x, x' \in X$ esetén, valahányszor $q(x) = q(x')$, mindannyiszor $f(x) = f(x')$. Ekkor, az az

$$\tilde{f} : Y \rightarrow Z[x] \quad \mapsto f(x)$$

leképezés jól értelmezett és folytonos.

BIZONYÍTÁS. A jól-értelmezettség nyilvánvaló. A folytonossághoz legyen $V \subset Z$ tetszőleges nyílt halmaz. Be kell látnunk, hogy ekkor $\tilde{f}^{-1}(V)$ nyílt Y hányados-topológiájában. Ám f folytonossága miatt $q^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$ nyílt X -ben, tehát $\tilde{f}^{-1}(V)$ is nyílt Y -ban. $\square$

- PÉLDA 1.65.** (i) X az S^2 két-dimenziós gömb $\mathbf{R}^3$ -ban, és $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$ az antipodális szimmetria. Az így kapott tér neve *valós projektív sík*, jelölése $\mathbf{RP}^2$.
- (ii) $X = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, és $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ minden $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ -ra, minden más pontpár nem ekvivalens. Ekkor a kapott hányados-tér szintén $\mathbf{RP}^2$.
- (iii) Az előző pont általánosítása magasabb dimenzióra: legyen $X = \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, és $(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ minden $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ -ra, minden más pontpár nem ekvivalens. Az így kapott hányados-teret az n -dimenziós *valós projektív térnek* hívjuk, és $\mathbf{RP}^n$ -nel jelöljük.
- (iv) Az előző konstrukciót elvégezhetjük a komplex számtest felett is: $X = \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, és $(z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$ minden $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ -ra, minden más pontpár nem ekvivalens. Az így kapott hányados-teret az n -dimenziós *komplex projektív térnek* hívjuk, és $\mathbf{CP}^n$ -nel jelöljük. Többek között, $\mathbf{CP}^1$ -et *komplex projektív egyenesnek* vagy *Riemann-féle számgömbnek*, $\mathbf{CP}^2$ -t *komplex projektív síknak* nevezzük.
- (v) A $\mathbf{CP}^1$ példát egy másik irányba általánosítva: legyen $X = \text{Gl}(n, K)$ (ahol $K = \mathbf{R}$ vagy $\mathbf{C}$), és azonosítsunk minden $A \in \text{Gl}(n, K)$ elemet minden λA alakú elemmel, ahol $\lambda \in K \setminus \{0\}$, és semmelyik másik elemmel. A kapott hányados-teret a K feletti $n \times n$ -es *projektív lineáris csoportnak* hívjuk, és $\text{PGL}(n, K)$ -val jelöljük. Ez a hányados $\text{Gl}(n, K)/(\mathbf{K} \setminus \{0\})$ -ként is írható, és mivel $K \setminus \{0\}$ normálosztó (hiszen $\text{Gl}(n, K)$ centruma), ezért a hányados is csoport lesz, tehát az elnevezés jogos.
- (vi) $X = [0, 1] \times [0, 1]$ a szorzat-topológiával, és minden $y \in [0, 1]$ -re $(0, y) \sim (1, 1 - y)$, minden más pont csak magával ekvivalens. Az így kapott tér neve *Möbius-szalag*.
- (vii) $X = [0, 1] \times [0, 1]$ a szorzat-topológiával, és minden $y \in [0, 1]$ -re $(0, y) \sim (1, y)$, minden $x \in [0, 1]$ -re $(x, 0) \sim (x, 1)$, minden más pont csak magával ekvivalens. Lássuk be, hogy az így kapott tér homeomorf a T^2 két-dimenziós tóruszal!

- (viii) Az előző példát módosíthatjuk ekképpen: $X = [0, 1] \times [0, 1]$ a szorzat-topológiával, és minden $y \in [0, 1]$ -re $(0, y) \sim (1, 1 - y)$, minden $x \in [0, 1]$ -re $(x, 0) \sim (x, 1)$, minden más pont csak magával ekvivalens. Az így kapott K tér neve *Klein-kancsó*.

FELADAT 1.66. Határozzuk meg a hányados-topológiát az alábbi esetekben!

- (i) $X := \mathbf{R}^2$ és $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ pontosan akkor, ha $x_1 = y_1$.
- (ii) $X := \mathbf{R}$ és $x \sim y$ pontosan akkor, ha létezik olyan $n \in \mathbf{Z}$ amelyre $x = y + n$.
- (iii) $X := [0, 1]$ és $0 \sim 1$, minden más pont csak magával ekvivalens.
- (iv) $X := \overline{B_1(0)} = D^2 \subset \mathbf{R}^2$ a zárt egységlemez. Legyen $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ pontosan akkor, ha $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$.
- (v) $(X, \mathcal{U}_{\text{diszkr}})$ egy diszkrét topologikus tér, és $f : X \rightarrow Y$ egy tetszőleges szürjektív leképezés.
- (vi) $(X, \mathcal{U}_{\text{triv}})$ egy triviális topologikus tér, és $f : X \rightarrow Y$ egy tetszőleges szürjektív leképezés.
- (vii) $X = [0, 1] \times [0, 1]$ a szorzat-topológiával, és minden $x \in [0, 1]$ -re $(0, x) \sim (1, 1 - x)$, minden $y \in [0, 1]$ -re $(y, 0) \sim (1 - y, 1)$, minden más pont csak magával ekvivalens. Lássuk be, hogy az így kapott tér homeomorf az $\mathbf{RP}^2$ valós projektív síkkal!

1.3.5. Topologikus terek ragasztása. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, $A \subset X$ és $B \subset Y$ részhalmazok ellátva az alter-topológiával, és $f : A \rightarrow B$ egy homeomorfizmus. Az $X \coprod Y$ diszjunkt egyesítésen értelmezzük azt a $\sim$ ekvivalencia-relációt, amelyre $x \in X$ és $y \in Y$ pontosan akkor állnak relációban, ha $x \in A$, $y \in B$, és $f(x) = y$.

DEFINÍCIÓ 1.67. A $\sim$ -ra vonatkozó hányados-topológiát $X \coprod Y$ -on X és Y f mentén történő ragasztásának hívjuk, és $X \cup_f Y$ -nal jelöljük.

Ez a művelet is jól viselkedik a folytonosságra nézve.

ÁLLÍTÁS 1.68. A fenti jelölések mellett tegyük fel, hogy $\phi_X : X \rightarrow Z$ és $\phi_Y : Y \rightarrow Z$ folytonos leképezések valamely Z topologikus térbe, amelyekre minden $x \in A$ -ra $\phi_X(x) = \phi_Y(f(x))$. Ekkor ϕ_X és ϕ_Y indukál egy Φ folytonos leképezést $X \cup_f Y$ -ból Z -be.

BIZONYÍTÁS. Legyen valamely $x \in X$ elem $[x]$ ekvivalencia-osztályára $\Phi([x]) = \phi_X(x)$ és valamely $y \in Y$ ekvivalencia-osztályára $\Phi([y]) = \phi_Y(y)$. A $\phi_X(x) = \phi_Y(f(x))$ reláció miatt ez jól értelmezett. Legyen $V \subset Z$ egy nyílt halmaz, ekkor

$$\Phi^{-1}(V) = \phi_X^{-1}(V) \cup_f \phi_Y^{-1}(V).$$

Mivel ϕ_X és ϕ_Y folytonosak, ezért $\phi_X^{-1}(V)$ és $\phi_Y^{-1}(V)$ nyíltak. Így a hányados-topológia definíciója miatt $\Phi^{-1}(V)$ is nyílt. $\square$

- PÉLDA 1.69. (i) A legegyszerűbb példa az $A = B = \emptyset$; ekkor X és Y ragasztása a két halmaz diszjunkt egyesítése az $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X \amalg \mathcal{U}_Y$ topológiával.
- (ii) Két két-dimenziós tórusz *összefüggő összegét* a következő módon értelmezhetjük: legyenek T_1, T_2 a T^2 -vel homeomorf terek, és $i \in \{1, 2\}$ -re $D_i \subset T_i$ olyan, a két-dimenziós D^2 nyílt egységkörlappal homeomorf részhalmaz, amely T_i -beli lezártja a zárt egységkörlappal homeomorf. Legyen $X_i = T_i \setminus D_i$, és ∂X_i az X_i pereme, azaz $\overline{D_i} \setminus D_i$. Ekkor nyilván ∂X_i homeomorf az S^1 körvonallal. Tetszőleges $f : \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ homeomorfizmusra képezzük a $\Sigma_2 = X_1 \cup_f X_2$ topologikus teret. Belátható, hogy Σ_2 homeomorfizmus erejéig független D_1, D_2 és f választásától; neve: *a 2 nemű felület*.
- (iii) Az előző példához hasonlóan, két-dimenziós tóruszok összefüggő összegét rekurzívan a következőképpen értelmezhetjük: legyen $g \geq 2$ egész szám, és tegyük fel, hogy Σ_{g-1} már értelmezve van. Legyen T_1 egy Σ_{g-1} -gyel homeomorf tér és T_2 egy T^2 -vel homeomorf tér, és $i \in \{1, 2\}$ -re $D_i \subset T_i$ olyan, a két-dimenziós D^2 nyílt egységkörlappal homeomorf részhalmazok, amelyek T_i -beli lezártjai a zárt egységkörlappal homeomorfak. Az előző konstrukciót elismételve $X_i = T_i \setminus D_i$ -re, jelöljük a ragasztással kapott teret Σ_g -vel, és nevezzük a g *nemű felületnek*. Ismét megmutatható, hogy Σ_g homeomorfizmus erejéig független a választásoktól; g -t néha a felület *génuszának* is nevezzük.

FELADAT 1.70. Legyen P egy szabályos $4g$ -szög, amelynek oldalait valamely oldaltól kezdve a pozitív irányban haladva egymás után jelöljük a

$$A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g, A_g^{-1}, B_g^{-1}$$

szimbólumokkal. Minden A_k, B_k -nak nevezzük kezdőpontjának azt a végpontját, amelyről a pozitív irányban elindulva az adott oldalon maradunk. Fordítva, minden A_k^{-1}, B_k^{-1} -nek nevezzük kezdőpontjának azt a végpontját, amelyből a negatív irányban elindulva az adott oldalon maradunk. Legyen $\sim$ az az ekvivalencia-reláció P -n, amely azonosítja P határának két olyan pontját, amelyek egyike valamely A_k -val jelölt oldalon fekszik, másikuk az A_k^{-1} -zel jelölt oldalon, és az adott oldal kezdőpontjától ugyanakkora távolságra találhatók; és hasonlóan a B_k és B_k^{-1} jelű oldalakra is. Bizonyítsuk be, hogy Σ_g homeomorf P hányadosával a $\sim$ ekvivalencia-relációra!

FELADAT 1.71. Adjuk meg a következő terek ragasztását!

- (i) $(X, \mathcal{U}_X) = (Y, \mathcal{U}_Y)$, $A = B = X$, f az identikus leképezés.
- (ii) $(X, \mathcal{U}_{\text{diszkr}}), (Y, \mathcal{U}_{\text{diszkr}})$, $A \subset X$ és $B \subset Y$ tetszőleges, és $f : A \rightarrow B$ tetszőleges bijekció.

- (iii) $(X, \mathcal{U}_X)$ tetszőleges, $(Y, \mathcal{U}_{\text{triv}})$ triviális, $A = \{x_0\} \subset X$, $B = \{y_0\} \subset Y$, és $f : x_0 \mapsto y_0$.

FELADAT 1.72. Legyen D_0 és D_1 két olyan nyílt körlemez az S^2 gömbön, amelyek lezártja diszjunkt, és legyen $H = S^1 \times [0, 1]$ egy henger. Legyenek $f_0 : \partial D_0 \rightarrow S^1 \times \{0\}$ és $f_1 : \partial D_1 \rightarrow S^1 \times \{1\}$ tetszőleges homeomorfizmusok. Mivel homeomorf S^2 ragasztása H -val f_0 és f_1 mentén?

FELADAT 1.73. Legyen $X = M$ egy Möbius-szalag, $A = \partial M \cong S^1$ a pereme, $Y = D$ az egységlemez $\mathbf{R}^2$ -ben, és $B = \partial D$ a pereme, végül $f : A = S^1 \rightarrow B = S^1$ tetszőleges homeomorfizmus. Lássuk be, hogy M ragasztása D -vel f mentén a valós projektív sík!

FELADAT 1.74. Legyenek $\mathbf{RP}_1$ és $\mathbf{RP}_2$ a valós projektív síkkal homeomorf terek, és $D_i \subset \mathbf{RP}_i$ olyan, a két-dimenziós D^2 nyílt egységkörlappal homeomorf részhalmazok, amelyek $\mathbf{RP}_i$ -beli lezártjai a zárt egységkörlappal homeomorfak. Legyen $X_i = \mathbf{RP}_i \setminus D_i$, ∂X_i az X_i pereme, és f egy homeomorfizmus ∂X_1 és ∂X_2 között. Bizonyítsuk be, hogy $X_1 \cup_f X_2$ homeomorf a Klein-kancsóval!

1.4. Összefüggőség

Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér, A és B két altere, amelyek diszjunktak (azaz $A \cap B = \emptyset$). Ekkor az egyesítésüket szokás $A \coprod B$ -val jelölni, és A és B diszjunkt egyesítésének nevezni. A $\coprod$ tehát nem egy hagyományos művelet (hiszen nem értelmezett tetszőleges részhalmazokra), hanem csak egy részlegesen értelmezett művelet, amely – ha értelmezett, akkor – azzal a többlet-információval jár, hogy a két halmaz diszjunkt. Hasonlóan értelmezhető nem csak két, hanem tetszőlegesen sok diszjunkt halmaz diszjunkt egyesítése is.

DEFINÍCIÓ 1.75. Azt mondjuk, hogy egy A altere X -nek *összefüggő*, ha nem írható fel két nemüres diszjunkt nyílt részhalmaza egyesítéseként, azaz valahányszor

$$A = (A \cap U_1) \coprod (A \cap U_2)$$

valamely $U_1, U_2 \subseteq X$ nyíltakra, mindannyiszor $A \cap U_1 = \emptyset$ vagy $A \cap U_2 = \emptyset$.

PÉLDA 1.76. Minden egyelemű $\{x\}$ részhalmaz X -ben összefüggő.

Mivel egy nyílt részhalmaz komplementere definíció szerint zárt halmaz, ezért X pontosan akkor összefüggő, ha nem írható fel két nemüres diszjunkt zárt részhalmaza egyesítéseként. Ez továbbá ekvivalens azal, hogy X egyedüli olyan részhalmazai, amelyek egyszerre nyíltak és zártak is, az X és az $\emptyset$.

ÁLLÍTÁS 1.77. Egy $A \subset \mathbf{R}$ *altér összefüggő akkor és csak akkor, ha A egy (véges vagy végtelen, nyílt vagy zárt) intervallum.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy A nem egy intervallum: ekkor létezik olyan $a, b \in A$ és olyan $c \notin A$ amelyre $a < c < b$. Ekkor az

$$A = (A \cap] - \infty, c[) \coprod (A \cap]c, \infty[)$$

egy nemtriviális felbontása A -nak nyílt részhalmazok diszjunkt egyesítésére.

A direkt irányt $A = \mathbf{R}$ -re bizonyítjuk, valódi intervallumokra ugyanez a gondolatmenet működik. Tegyük fel, hogy $\mathbf{R} = V_1 \coprod V_2$, ahol V_1, V_2 nyíltak és V_1 nem üres. Legyen $a \in V_1$ tetszőleges. Mivel V_1 nyílt, létezik olyan $\varepsilon > 0$ amelyre $[a, a + \varepsilon[\subset V_1$. Nyilvánvaló, hogy ha az ezzel a tulajdonsággal rendelkező $\varepsilon > 0$ -knak létezik legkisebb felső korlátja, akkor az pozitív. Tegyük fel, hogy ez a legkisebb felső korlát létezik, és jelöljük δ -val. Ekkor $a + \delta \notin V_1$: valóban, ha $a + \delta$ benne lenne V_1 -ben, akkor V_1 nyíltsága miatt léteznék olyan $\eta > 0$, amelyre $]a + \delta - \eta, a + \delta + \eta[\subset V_1$ teljesülne. Ebből azonban következne, hogy $[a, a + \delta + \eta[\subset V_1$, ami ellentmondana δ “felső korlát” választásának. Tehát szükségszerűen $a + \delta \in V_2$. Ám ekkor V_2 nyíltsága miatt $a + \delta$ valamely nyílt környezet is V_2 -ben lenne, ami viszont ellentmond δ “legkisebb” választásának. Tehát ilyen $\delta > 0$ nem létezik, azaz $[a, \infty[\subset V_1$. Hasonlóképpen beláthatjuk, hogy $] - \infty, a] \subset V_1$ is teljesül, és így $V_1 = \mathbf{R}$. $\square$

Ahhoz, hogy több példát adjunk összefüggő terekre, hasznos lesz a következő.

ÁLLÍTÁS 1.78. *Ha $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ összefüggő topologikus terek, akkor $X \times Y$ is az.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $X \times Y = U_1 \coprod U_2$ valamely U_1, U_2 nyílt halmazokra, és tegyük fel hogy $U_1 \neq \emptyset$. Minden $y \in Y$ -ra az $X \times \{y\}$ homeomorf X -szel, és mivel U_1 nyílt $X \times Y$ -ban, ezért $U_1 \cap (X \times \{y\})$ nyílt X -ben. Valóban, mivel U_1 nyílt ezért tetszőleges $(x, y) \in U_1$ -re léteznek olyan $U_x \in \mathcal{U}_X, U_y \in \mathcal{U}_Y$ halmazok, amelyekre $(x, y) \in U_x \times U_y \subset U_1$, mivel az ilyen alakú halmazok a szorzat-topológia egy bázisát alkotják. Ekkor azonban nyilván $U_x \times \{y\} \subset U_1$. Hasonlóképpen látható, hogy $U_2 \cap (X \times \{y\})$ is nyílt X -ben. Mivel X összefüggő és $X \times \{y\} \subset U_1 \coprod U_2$, ebből következik, hogy minden $y \in Y$ -ra $U_1 \cap (X \times \{y\})$ vagy az üres halmazzal vagy $X \times \{y\}$ -nal egyezik meg. Legyen V azon $y \in Y$ -ok halmaza, amelyekre $U_1 \cap (X \times \{y\}) = X \times \{y\}$. Ekkor V nyílt Y -ban. Valóban, legyen $y \in V$, tehát $X \times \{y\} \subset U_1$. Ekkor bármely rögzített $x \in X$ -re $(x, y) \in U_1$, és mivel U_1 nyílt a szorzat-topológiában, ezért (x, y) -nek létezik olyan $W_x \times W_y$ nyílt környezete $X \times Y$ -ban, amelyre $W_x \times W_y \subset U_1$. Ekkor viszont minden $y' \in W_y$ -re $U_1 \cap (X \times \{y'\})$ nem lehet üres (hiszen tartalmazza $W_x \times \{y'\}$ -t), tehát szükségszerűen megegyezik $X \times \{y'\}$ -vel, vagyis $W_y \subset V$, tehát V nyílt Y -ban. Hasonlóképpen, $Y \setminus V$ is nyílt Y -ban: valóban, ez azon $y \in Y$ -ok halmaza, amelyekre $X \times \{y\} \subset U_2$, tehát a bizonyítás hasonló. Mivel Y összefüggő, ebből következik hogy V vagy üres, vagy egyenlő Y -nal.

Üres nem lehet, hiszen abból következne, hogy U_1 üres, tehát $V = Y$. Ekkor azonban $U_1 = X \times V = X \times Y$, tehát $U_1 = X \times Y$ és $U_2 = \emptyset$. $\square$

KÖVETKEZMÉNY 1.79. *Az $\mathbf{R}^n$ euklideszi térben minden téglatest (véges vagy végtelen, nyílt vagy zárt) összefüggő. Többek között, $\mathbf{R}^n$ összefüggő.*

Hasznos lesz a következő eredmény összefüggő terek egyesítéseiről.

ÁLLÍTÁS 1.80. *Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ egy topologikus tér, és $\{A_1, \dots, A_N\}$ összefüggő részhalmazai, amelyekre teljesül, hogy $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ minden $i \in \{1, \dots, N-1\}$ -re. Ekkor $A = A_1 \cup \dots \cup A_N$ is összefüggő.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $A = (A \cap U_1) \coprod (A \cap U_2)$ valamely U_1, U_2 nyílt halmazokra X -ben. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, N\}$ -re

$$A_i = (A_i \cap U_1) \coprod (A_i \cap U_2),$$

és az $A_i \cap U_1$ és $A_i \cap U_2$ halmazok nyíltak A_i -ben. Mivel A_1 összefüggő, ebből következik, hogy vagy $A_1 \cap U_1 = A_1$ és $A_1 \cap U_2 = \emptyset$, vagy fordítva. Feltehetjük, hogy előbbi eset áll fenn, tehát $A_1 \subseteq U_1$. Hasonlóképpen, vagy $A_2 \subseteq U_1$ vagy $A_2 \subseteq U_2$. Utóbbi azonban ellentmondana $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ -nak, tehát marad $A_2 \subseteq U_1$. Teljes indukcióval belátható, hogy minden i -re $A_i \subseteq U_1$. Ekkor azonban $A = A_1 \cup \dots \cup A_N$ is része U_1 -nek, és ezért $U_2 = \emptyset$, tehát az $A = U_1 \coprod U_2$ felbontás triviális. $\square$

DEFINÍCIÓ 1.81. Az X topologikus tér tartalmazásra maximális összefüggő részhalmazait az X összefüggő komponenseinek hívjuk.

ÁLLÍTÁS 1.82. *Bármely X topologikus tér egyértelműen előáll összefüggő komponenseinek diszjunkt egyesítéseként: léteznek A_i összefüggő komponensek X -ben ($i \in I$), amelyekre*

$$X = \coprod_{i \in I} A_i,$$

és ez a felbontás permutáció erejéig egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Lássuk be először, hogy bármely A_1, A_2 összefüggő komponensek vagy diszjunktak, vagy azonosak. Tegyük fel ugyanis, hogy $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Ekkor, a 1.80 Állítás értelmében $A_1 \cup A_2$ is összefüggő altér. Mivel A_1 maximális összefüggő altér, azért $A_1 \cup A_2 = A_1$, és hasonlóan $A_1 \cup A_2 = A_2$ is teljesül. A felbontás egyértelműsége ebből azonnal következik.

Rögzítsünk most egy $x \in X$ pontot (az $X = \emptyset$ eset nyilvánvaló), és tekintsük az $\{x\}$ -et tartalmazó összefüggő B alterek $\mathcal{A}_x$ családját:

$$\mathcal{A}_x = \{B \mid x \in B \text{ és } B \text{ összefüggő}\}.$$

Ekkor

$$A_x = \cup_{B \in \mathcal{A}_x} B$$

összefüggő altér: valóban, ha

$$A_x = (A_x \cap U_1) \coprod (A_x \cap U_2)$$

valamely $U_1, U_2 \subseteq X$ nyíltakra, akkor ebből következik minden $B \in \mathcal{A}_x$ esetén

$$B = (B \cap U_1) \coprod (B \cap U_2).$$

Mivel minden $B \in \mathcal{A}_x$ összefüggő, azért $B = B \cap U_1$ vagy $B = B \cap U_2$. Az x elem U_1 és U_2 közül pontosan egynek eleme, legyen ez például U_1 . Ekkor tehát minden $B \in \mathcal{A}_x$ esetén $x \in B \cap U_1$, tehát $B \cap U_1 \neq \emptyset$, ezért az összefüggőség miatt $B = B \cap U_1$ áll. Így tehát

$$A_x = \cup_{B \in \mathcal{A}_x} (B \cap U_1) = A_x \cap U_1.$$

Ebből kapjuk, hogy A_x összefüggő altér. Másrészt, A_x maximális összefüggő altér: ha lenne valamely $C \supsetneq A_x$ összefüggő altér, akkor nyilván $C \in \mathcal{A}_x$ lenne, tehát A_x definíciója miatt $C \subseteq A_x$ is teljesülne, amiből következik $A_x = C$.

A kiválasztási axióma segítségével válasszunk minden A_x halmazból egy $i \in A_x$ elemet. Ekkor, megkapjuk a kívánt felbontást. $\square$

Nyilvánvaló, hogy egy topologikus tér akkor és csak akkor összefüggő, ha csak egy összefüggő komponense van. Ennek ellenkezője az, ha az összefüggő komponensek egyeleműek.

DEFINÍCIÓ 1.83. Azt mondjuk, hogy egy X topologikus tér *teljesen összefüggéstelen*, ha minden összefüggő komponense egy pontból áll, azaz minden pontja saját maga egy összefüggő komponens.

ÁLLÍTÁS 1.84. X -nek minden Y összefüggő komponense zárt részhalmaza.

BIZONYÍTÁS. Mivel Y maximális az összefüggő részhalmazok között a tartalmazásra vonatkozóan, elég belátni hogy $\overline{Y}$ összefüggő. Az altér-topológia definíciója alapján a nyílt halmazok $\overline{Y}$ -ban az $U \cap \overline{Y}$ alakú halmazok, ahol $U \subseteq X$ nyílt. Tegyük fel most, hogy

$$\overline{Y} = (U_1 \cap \overline{Y}) \coprod (U_2 \cap \overline{Y})$$

valamely $U_1, U_2 \subseteq X$ nyílt halmazokra. Ebből következik

$$Y = (U_1 \cap Y) \coprod (U_2 \cap Y),$$

tehát mivel Y összefüggő, ezért vagy $U_1 \cap Y = Y$ vagy $U_2 \cap Y = Y$. Feltehetjük például hogy $U_1 \cap Y = Y$; ekkor $U_2 \cap Y = \emptyset$. Az 1.39 Állítás miatt $U_2 \cap \overline{Y} = \emptyset$. Ebből következik, hogy $\overline{Y}$ összefüggő. $\square$

Ugyanez az állítás nem igaz, ha a “zárt” szót a “nyílt”-ra cseréljük:

FELADAT 1.85. Lássuk el a $\mathbf{Q}$ halmazt a szokványos $\mathbf{R}$ -beli beágyazása által indukált (euklideszi) altér-topológiával. Ekkor lássuk be, hogy $\mathbf{Q}$ teljesen összefüggéstelen!

FELADAT 1.86. Bizonyítsuk be, hogy a $(\mathbf{Z}, \mathcal{U}_{\text{arit}})$ tér teljesen összefüggéstelen!

FELADAT 1.87. A C Cantor-halmazt a következő módon értelmezzük: legyen $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, és általában $C_{n+1} \subset C_n$ -et rekurzívan értelmezzük úgy, hogy C_n minden összefüggő komponensében, amely egy 3^{-n} -hosszú zárt $[a, a + 3^{-n}]$ részintervallum $[0, 1]$ -ben, vegyük az "középső nyílt harmadának" komplementerét:

$$\begin{aligned} C_{n+1} \cap [a, a + 3^{-n}] &= [a, a + 3^{-n}] \setminus]a + 3^{-(n+1)}, a + 2 \cdot 3^{-(n+1)}[\\ &= [a, a + 3^{-(n+1)}] \cup [a + 2 \cdot 3^{-(n+1)}, a + 3^{-n}]. \end{aligned}$$

Ebből a felírásból egyből látszik, hogy C_{n+1} is valamely $3^{-(n+1)}$ -hosszú zárt intervallumok egyesítése. Legyen $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$, és lássuk el a $[0, 1]$ -ből örökölt topológiával. Mutassuk meg, hogy C teljesen összefüggéstelen!

Az összefüggő halmazok egyik legfontosabb tulajdonsága a következő.

TÉTEL 1.88. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek és $f : X \rightarrow Y$ egy folytonos leképezés. Ekkor, ha X összefüggő, akkor $f(X)$ is összefüggő.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy X képe felírható

$$f(X) = (f(X) \cap V_1) \coprod (f(X) \cap V_2)$$

alakban valamely $V_1, V_2 \in \mathcal{U}_Y$ halmazokra. Ekkor nyilván

$$X = f^{-1}(V_1) \coprod f^{-1}(V_2).$$

Továbbá, mivel f folytonos, ezért $f^{-1}(V_1), f^{-1}(V_2)$ nyíltak X -ben. Minthogy X összefüggő, vagy $f^{-1}(V_1) = X$ vagy $f^{-1}(V_2) = X$. Feltehetjük például, hogy $f^{-1}(V_1) = X$. Ekkor tehát $f(X) \subseteq V_1$, s így $V_2 = \emptyset$. $\square$

Az eddigiekből egyszerűen levezethető Bolzano híres közbenső-érték tétele.

KÖVETKEZMÉNY 1.89 (Közbenső-érték tétel). Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ összefüggő, és $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ egy folytonos függvény X -en. Tegyük fel, hogy valamely $a < b$ valósakra igaz, hogy $a, b \in f(X)$. Ekkor minden $a < c < b$ -re $c \in f(X)$.

FELADAT 1.90. Lássuk be a következő állításokat!

- (i) Minden diszkrét topologikus tér teljesen összefüggéstelen.
- (ii) Egy összefüggő tér hányadosa is összefüggő.
- (iii) Bármely topologikus tér egy összefüggő alterének lezártja is összefüggő.

1.4.1. Ívszerű összefüggőség. Az összefüggőség fogalmának létezik egy szemléletes analógja, amely azonban általában nem ekvivalens vele. Ebben a szakaszban a $[0, 1]$ intervallumot az euklideszi $\mathbf{R}$ egyenes által indukált altér-topológiával tekintjük.

DEFINÍCIÓ 1.91. Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér, $x, y \in X$. Egy $f : [0, 1] \rightarrow X$ folytonos leképezés, amelyre $f(0) = x$ és $f(1) = y$, egy x -et y -nal összekötő út. Azt mondjuk, hogy X ívszerűen összefüggő, ha bármely $x, y \in X$ -hez létezik egy x -et y -nal összekötő út.

ÁLLÍTÁS 1.92. Ha X ívszerűen összefüggő, akkor összefüggő.

BIZONYÍTÁS. Egy tér akkor és csak akkor összefüggő, ha egyetlen összefüggő komponense van. Tegyük fel tehát indirekt módon, hogy X ívszerűen összefüggő, de létezik legalább két diszjunkt nem-üres összefüggő komponense: X_1 és X_2 . Legyenek $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ tetszőleges pontok. Mivel X ívszerűen összefüggő, ezért létezik egy f út x_1 és x_2 között. Mivel a $[0, 1]$ intervallum összefüggő és f folytonos, ezért $f([0, 1])$ is összefüggő. Mivel $x_1 \in X_1 \cap f([0, 1])$ és $x_2 \in X_2 \cap f([0, 1])$, alkalmazhatjuk az 1.80 Állítást $A_1 = X_1$, $A_2 = f([0, 1])$, $A_3 = X_2$ -vel, amiből következik, hogy $X_1 \cup f([0, 1]) \cup X_2$ összefüggő. Ugyanakkor $X_1 \subset X_1 \cup f([0, 1]) \cup X_2$ szigorúan, ami ellentmond annak, hogy X_1 maximális összefüggő részhalmaz. Tehát a kiinduló feltételezésünk hamis volt, vagyis X összefüggő. $\square$

Az ellenkező irányú implikáció azonban hamis. Az ellenpéldához szükségünk van a kompaktság fogalmára és egy alapvető tulajdonságára, amely a következő szakasz tárgya.

PÉLDA 1.93. Legyen X az origó egyesítése az $f(x) = \sin(1/x)$ függvény gráfiájával a $]0, 2/\pi]$ intervallumon, ellátva az $\mathbf{R}^2$ által indukált topológiával. Ekkor bármely f út $(0, 0)$ és $(2/\pi, 1)$ között szükségszerűen áthalad X minden pontján, tehát $f([0, 1]) = X$. Mivel $[0, 1]$ kompakt, X viszont nem kompakt, ilyen út nem létezik. Másrészt azonban leellenőrizhető, hogy X összefüggő.

DEFINÍCIÓ 1.94. Az X halmaz maximális ívszerűen összefüggő részhalmazait az X ívszerűen összefüggő komponenseinek hívjuk.

DEFINÍCIÓ 1.95. X -et lokálisan ívszerűen összefüggőnek nevezzük, ha a topológiának létezik egy ívszerűen összefüggő nyíltakból álló környezetbázisa; azaz, minden x pont minden U nyílt környezetére létezik olyan V nyílt halmaz, amely ívszerűen összefüggő és amelyre $x \in V \subseteq U$.

FELADAT 1.96. Lássuk be a következő állításokat!

- (i) Ívszerűen összefüggő terek szorzata és hányadosa is ívszerűen összefüggő.
- (ii) Egy topologikus tér bármely összefüggő komponense ívszerűen összefüggő komponensek diszjunkt egyesítése.
- (iii) A $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tér az euklideszi topológiával ívszerűen összefüggő.
- (iv) A 1.54 (vi) Példa-beli $SO(n)$ ortogonális mátrixok halmaza ívszerűen összefüggő.

- (v) A 1.54 (v) Példa-beli $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ tér ívszerűen összefüggő komponensei a $\mathrm{Gl}_+(n, \mathbf{R})$ pozitív determinánsú és a $\mathrm{Gl}_-(n, \mathbf{R})$ negatív determinánsú mátrixok halmaza.
- (vi) A $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{C})$ tér ívszerűen összefüggő.
- (vii) A $\mathbf{CP}^n$ és $\mathbf{RP}^n$ terek ívszerűen összefüggők minden $n \in \mathbf{N}$ -re.
- (viii) A $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{C})$ tér ívszerűen összefüggő minden $n \in \mathbf{N}$ -re; a $\mathrm{PGL}(n, \mathbf{R})$ tér akkor és csak akkor ívszerűen összefüggő, ha n páratlan.

1.5. Kompaktság

DEFINÍCIÓ 1.97. Legyen $(X, \mathcal{U})$ egy topologikus tér. X egy *nyílt fedése* nyílt halmazok egy olyan $\{V_i\}_{i \in I}$ családjára, amelyre $\bigcup_{i \in I} V_i = X$. $\{V_i\}_{i \in I}$ egy *alfedése* egy olyan $J \subseteq I$ részcsalád, amelyre $\bigcup_{j \in J} V_j = X$. Egy alfedés *véges*, ha J véges elemszámú. Végül, X *kompakt*, ha bármely nyílt fedésének létezik véges alfedése.

- PÉLDA 1.98.**
- (i) Minden topologikus tér bármely pontja kompakt.
 - (ii) Tetszőleges $a < b$ -re az $[a, b]$ intervallum $\mathbf{R}$ -ben kompakt; lásd 1.110 Lemma.
 - (iii) Tetszőleges $a < b$ -re az $]a, b[$, $[a, b[$ és $]a, b[$ intervallumok $\mathbf{R}$ -ben nem kompaktak.
 - (iv) Tetszőleges $a \in \mathbf{R}$ -re az $[a, \infty[$ és $] - \infty, a]$ félig végtelen intervallumok nem kompaktak.
 - (v) Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ -re az $\mathbf{R}^n$ euklideszi tér nem kompakt.
 - (vi) Az S^1 körvonal és az S^2 gömbfelület kompaktak.
 - (vii) A D^2 zárt körlap $\mathbf{R}^2$ -ben kompakt.

FELADAT 1.99. Lássuk be a következő állításokat!

- (i) $(X, \mathcal{U}_{\text{diszkr}})$ akkor és csak akkor kompakt, ha X véges halmaz.
- (ii) Kompakt halmaz folytonos képe kompakt.
- (iii) Kompakt halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvény felveszi szélsőértékeit.
- (iv) Legyen X kompakt halmaz és $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ nemüres csökkenő zárt részhalmazainak sorozata. Ekkor $\bigcap_i K_i \neq \emptyset$.
- (v) $\mathbf{R}^2$ a Zariski-topológiával kompakt.
- (vi) Kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.
- (vii) Egy kompakt metrikus térben minden végtelen sorozatnak van konvergens részsorozata.

ÁLLÍTÁS 1.100. Legyen X Hausdorff-tér és K egy kompakt részhalmaza. Ekkor K zárt.

BIZONYÍTÁS. Legyen $x \in X \setminus K$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy ekkor x egy nyílt környezete is része $X \setminus K$ -nak. Legyenek minden $k \in K$ -ra U_k és V_k olyan diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $x \in U_k$ és $k \in V_k$. Ilyen halmazok léteznek, mert X Hausdorff. Vegyük K -nak azt

a fedését, amelyet a V_k halmazok alkotnak minden $k \in K$ -ra. Mivel K kompakt, ennek a fedésnek létezik véges alfedése, azaz léteznek olyan $k_1, \dots, k_N \in K$, amelyekre $K \subseteq V_{k_1} \cup \dots \cup V_{k_N}$. Mivel V_{k_i} és U_{k_i} diszjunktak minden $1 \leq i \leq N$ -re, ezért $V = \bigcup_{i=1}^N V_{k_i}$ és $U = \bigcap_{i=1}^N U_{k_i}$ is diszjunktak. Továbbá $x \in U$, s ez utóbbi nyílt halmaz, lévén véges sok nyílt halmaz metszete. Ezért U egy keresett környezete x -nek. $\square$

MEGJEGYZÉS 1.101. A bizonyítás során egyúttal beláttuk a következő állítást is: egy Hausdorff-térben bármely kompakt halmaz és rajta kívül eső pont szétválasztható nyílt környezetekkel. Mivel minden pont kompakt, ezért ez általánosabb állítás a Hausdorff-tér definíciójánál; mégis látjuk, hogy tulajdonképpen ekvivalensek.

FELADAT 1.102. Bizonyítsuk be, hogy egy Hausdorff-térben bármely két diszjunkt kompakt halmaz szétválasztható nyílt környezetekkel!

Végül lássuk a kompakt halmazok viselkedését különféle műveletekre.

TÉTEL 1.103. *Véges sok kompakt topologikus tér szorzata kompakt.*

BIZONYÍTÁS. Használni fogjuk a következő fogalmakat.

DEFINÍCIÓ 1.104. Legyenek X és Y topologikus terek. Ekkor az $X \times Y$ egy *szelete* egy $\{x_0\} \times Y$ (vagy $X \times \{y_0\}$) alakú halmaz valamely $x_0 \in X$ -re (vagy $y_0 \in Y$ -ra). Legyen $x_0 \in X$, ekkor egy *cső* x_0 körül $X \times Y$ -ban egy $U \times Y$ alakú részhalmaza $X \times Y$ -nak, ahol U egy nyílt környezete x_0 -nak X -ben.

Ezek után, a tételt két kompakt topologikus tér szorzatára látjuk be; a bizonyítás véges szorzatra ebből teljes indukcióval könnyen következik. Legyenek tehát X és Y topologikus terek. Lássuk be először a következő segédállítást:

LEMMA 1.105. *Ha X és Y topologikus terek és Y kompakt, akkor tetszőleges $x_0 \in X$ -re az $\{x_0\} \times Y$ szelet tetszőleges N nyílt környezete $X \times Y$ -ban tartalmaz egy csövet x_0 körül.*

BIZONYÍTÁS. A szorzat-topológia definíciója alapján N felírható $U_i \times V_i$ alakú halmazok egyesítéseként, ahol U_i és V_i nyíltak sorrendben X -ben és Y -ban. Mivel $\{x_0\} \times Y \subset N$, ezért az $U_i \times V_i$ -k egyesítése fedése többek közt az $\{x_0\} \times Y$ szeletnek is. Mivel ez a szelet homeomorf Y -nal, és Y kompakt, ezért ennek a fedésnek létezik egy véges $U_1 \times V_1, \dots, U_N \times V_N$ alfedése. Ekkor $V_1, \dots, V_N$ nyilván fedése Y -nak. Legyen U az $U_1 \cap \dots \cap U_N$ nyílt halmaza X -nek. Ekkor,

$$U \times Y \subseteq U_1 \times V_1 \cup \dots \cup U_N \times V_N \subseteq N.$$

$\square$

Legyenek most X és Y kompakt topologikus terek, és $\{W_i\}_{i \in I}$ egy tetszőleges fedése $X \times Y$ -nak. Ez többek között minden $\{x\} \times Y$

szeletnek is fedése. Mivel ez a szelet kompakt, ezért létezik egy véges $W_x^1, \dots, W_x^{K_x}$ alfedése. Legyen

$$N_x = W_x^1 \cup \dots \cup W_x^{K_x};$$

ez egy nyílt környezete a szeletnek $X \times Y$ -ban. A lemma miatt minden $x \in X$ -nek létezik olyan U_x nyílt környezete, amelyre $U_x \times Y \subseteq N_x$. Így kapunk X -nek egy $\{U_x\}_{x \in X}$ fedését. Minthogy X kompakt, ennek létezik egy véges alfedése: $\{U_1, \dots, U_M\}$, amelyre minden $1 \leq j \leq M$ -re $U_j \times Y$ -nak létezik egy $\{W_j^1, \dots, W_j^{K_j}\}$ véges alfedése. Tehát, a

$$\{W_1^1, \dots, W_1^{K_1}, \dots, W_M^1, \dots, W_M^{K_M}\}$$

egy véges alfedése $X \times Y$ -nak. $\square$

DEFINÍCIÓ 1.106. Legyenek $(X, \mathcal{U}_X)$ és $(Y, \mathcal{U}_Y)$ topologikus terek, és $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f *zárt*, ha minden zárt halmaz képe zárt. Azt mondjuk, hogy f *perfekt*, ha minden $y \in Y$ ösképe kompakt.

ÁLLÍTÁS 1.107. Legyen $(X, \mathcal{U}_X)$ egy Hausdorff-tér, Y tetszőleges halmaz, és $f : X \rightarrow Y$ szűrjektív leképezés. Tegyük fel, hogy f zárt és perfekt az Y -on értelmezett hányados-topológiára. Ekkor Y is Hausdorff.

BIZONYÍTÁS. Legyen a és b két különböző pontja Y -nak. Szerkesztenünk kell Y -nak olyan A és B nyílt részhalmazait a hányados-topológiában, amelyek szétválasztják a -t és b -t. Feltétel szerint $f^{-1}(a)$ és $f^{-1}(b)$ kompaktak X -ben. Az 1.102 Feladat alapján tehát e halmazok szétválaszthatók X -ben: legyen U és V rendre az $f^{-1}(a)$ és $f^{-1}(b)$ diszjunkt nyílt környezetei. Mivel f zárt, ezért az $X \setminus U$ képe zárt halmaz Y -ban, ami nyilván nem tartalmazza a -t, mert $f^{-1}(a) \subseteq U$. Ennek a zárt halmaznak a komplementere tehát egy A nyílt halmaz Y -ban, amely tartalmazza a -t. Hasonlóképpen, az $f(X \setminus V)$ halmaz B komplementere nyílt Y -ban, és tartalmazza b -t. Végül, $A \cap B$ az olyan $y \in Y$ -ok halmaza, amelyek sem $X \setminus U$ sem $X \setminus V$ képében nincsenek benne. Mivel f szűrjektív, egy ilyen y egy olyan $x \in X$ -nek lenne a képe, amely egyszerre eleme U -nak és V -nek is, ami lehetetlen U és V választása folytán. $\square$

1.5.1. A Heine-Borel tétel. Az euklideszi terek körében létezik egy egyszerű kritérium annak eldöntésére, hogy egy adott halmaz kompakte.

TÉTEL 1.108 (Heine-Borel). Bármely $n \in \mathbf{N}$ -re, egy A részhalmaz $\mathbf{R}^n$ -ben akkor és csak akkor kompakt, ha zárt és korlátos a d_2 (vagy ekvivalens módon, a d_1) metrikára nézve.

MEGJEGYZÉS 1.109. Ugyanez az állítás tetszőleges metrikus tér esetében már nem igaz. Például, legyen $X = \mathbf{R}$ és definiáljuk a d

metrikát a következőképpen: $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Ekkor X a d által indukált topológiával homeomorf az euklideszi egyenessel, tehát nem kompakt, viszont zárt és d -re nézve korlátos.

BIZONYÍTÁS. Először is, lássuk miért ekvivalens a két mondott metrikára belátni az állítást: minden $x, y \in \mathbf{R}^n$ -re

$$d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n}d_1(x, y),$$

tehát a korlátosság fogalma e két metrikában megegyezik.

Tegyük fel, hogy A kompakt. Ekkor az 1.100 Állításból következik, hogy A zárt. Tekintsük nyílt halmazoknak a $\{B_r(0)\}_{r \in \mathbf{R}}$ családját. Ezek egyesítése a teljes $\mathbf{R}^n$, ezért ez egy fedése A -nak. Ebből következik, hogy A benne van véges sok $B_r(0)$ egyesítésében, tehát valamely $B_R(0)$ -ban is. Így A korlátos d_2 -ra nézve.

Fordítva, tegyük fel, hogy A zárt és korlátos d_1 -ra nézve. Legyen R egy felső korlát A pontjainak távolságára. Legyen A egy tetszőleges pontja $a = (a_1, \dots, a_n)$. Ekkor

$$(1.1) \quad A \subseteq [a_1 - R, a_1 + R] \times \dots \times [a_n - R, a_n + R].$$

Lássuk be először az egydimenziós esetet:

LEMMA 1.110. *Bármely $a < b$ valós számokra az $[a, b]$ zárt intervallum $\mathbf{R}$ -ben kompakt.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\{U_i\}_{i \in I}$ tetszőleges fedése $[a, b]$ -nek, és jelöljük C -vel azon $y \in [a, b]$ pontok halmazát, amelyekre az $[a, y]$ -nak létezik véges alfedése. Mivel $a \in U_i$ valamely $i \in I$ -re, és U_i nyílt, ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $[a, a + \varepsilon] \subset U_i$; így $C \neq \emptyset$. Legyen $c > a$ a C halmaz legkisebb felső korlátja.

Lássuk be, hogy $c \in C$! Legyen U egy eleme a fedésnek, amely tartalmazza c -t. Mivel U nyílt, ezért létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $]c - \varepsilon, c] \subset U$. Ha c nem lenne benne C -ben, akkor létezne olyan $d \in]c - \varepsilon, c[$ amely eleme C -nek, hiszen különben $c - \varepsilon$ is felső korlátja lenne C -nek, ellentmondva annak, hogy c a legkisebb felső korlátja C -nek. Ekkor tehát az $[a, d]$ intervallumnak létezik véges fedése. Ehhez hozzávéve még az U halmazt, kapunk egy véges fedését $[a, c]$ -nek, ami ellentmondás. Tehát $c \in C$.

Végül, mutassuk meg, hogy $c = b$! Tegyük fel, hogy $c < b$. Legyen U egy olyan eleme a fedésnek, amelyre $c \in U$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $[c, c + \varepsilon] \subset U$. Mivel $c \in C$, ezért az $[a, c]$ -nek létezik véges alfedése. Legyen $d \in]c, c + \varepsilon[$ tetszőleges; ekkor az $[a, c]$ egy véges alfedéséhez hozzávéve U -t, kapunk egy véges alfedését $[a, d]$ -nek; tehát $d \in C$. Ez ellentmondana annak, hogy c felső korlátja C -nek. Tehát $c = b$, és a lemma be van látva. $\square$

Térjünk vissza az általános eset bizonyítására: a lemma és az 1.103 Állítás miatt a (1.1) jobb oldalán szereplő téglatest kompakt. Mivel A zárt, az 1.99 (vi) Feladat alapján kompakt. $\square$

FELADAT 1.111. Lássuk be, hogy a 1.87 Feladatban definiált Cantor-halmaz kompakt!

FELADAT 1.112. Legyen $K \subset \mathbf{R}^n$ egy kompakt halmaz és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Lássuk be, hogy ekkor a

$$\bar{B}_\varepsilon(K) = \cup_{k \in K} \bar{B}_\varepsilon(k)$$

halmaz is kompakt! Mutassuk meg, hogy ugyanez az állítás tetszőleges metrikus térben hamis!

FELADAT 1.113. Legyenek $K_1, K_2 \subset (X, \rho)$ diszjunkt kompakt halmazok. Lássuk be, hogy ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $\bar{B}_\varepsilon(K_1) \cap \bar{B}_\varepsilon(K_2) = \emptyset$.

FELADAT 1.114. Legyenek $K_1, K_2 \subset (X, \rho)$ diszjunkt kompakt halmazok. Lássuk be, hogy ekkor a Minkowski-összegük

$$K_1 + K_2 = \{k_1 + k_2 \mid k_i \in K_i\}$$

is kompakt!

FELADAT 1.115. Legyen $n \geq 2$ és $X \subset \mathbf{R}^{n-1}$ egy kompakt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor X konvex burka $\text{Conv}(X)$ is kompakt! (Ötlet: használjuk Carathéodory tételét, amely szerint $\text{Conv}(X)$ előáll, mint az összes X -beli $x_1, \dots, x_n$ pont- n -es által kifeszített zárt szimplex egyesítése.)

FELADAT 1.116. (i) Lássuk be, hogy a 1.54 (vi) Feladatban definiált $O(n)$ és $U(n)$ terek kompaktak!

(ii) Felhasználva a valós mátrixok QR-felbontását, bizonyítsuk be, hogy $O(n)$ maximális kompakt részcsoport $\text{Gl}(n, \mathbf{R})$ -ben!

2. FEJEZET

Alapvető algebrai topológia

Ebben a fejezetben — amennyiben az ellenkezőjét nem állítjuk — X, Y, Z , s.í.t. tetszőleges topologikus tereket jelölnek, I pedig a $[0, 1]$ egységintervallumot.

2.1. Homotópia és fundamentális csoport

2.1.1. Homotópia, út-homotópia. Legyenek f és f' folytonos leképezések Y -ból X -be.

DEFINÍCIÓ 2.1. Azt mondjuk, hogy f és f' *homotópok*, ha létezik olyan folytonos $F : Y \times I \rightarrow X$ leképezés, amelyre minden $y \in Y$ -ra

$$F(y, 0) = f(y) \quad \text{és} \quad F(y, 1) = f'(y).$$

Ekkor F -et egy f és f' közötti *homotópiának* nevezzük, és F megszorítását az $s \in I$ -re f_s -sel jelöljük. Amennyiben f' valamely azonosan x_0 leképezés, akkor f -et *null-homotópnak* mondjuk. Végül, ha $\text{Id} : X \rightarrow X$ null-homotóp egy olyan F homotópián keresztül amely x_0 -t rögzíti (azaz minden $s \in I$ -re $F(x_0, s) = x_0$), akkor azt mondjuk, hogy X az x_0 *pontra húzható*.

Legyenek most f, f' utak X -ben: $f, f' : I \rightarrow X$. Nevezzük $f(0)$ -t f *kezdőpontjának*, és $f(1)$ -et f *végpontjának* (és hasonlóan f' -re).

DEFINÍCIÓ 2.2. Azt mondjuk, hogy f és f' *út-homotópok*, ha létezik közöttük olyan F homotópia, amelyre minden $s \in I$ -re f_s kezdő-, illetve végpontja megegyezik f kezdő-, illetve végpontjával. Ekkor F -et f és f' közötti *út-homotópiának* nevezzük.

MEGJEGYZÉS 2.3. Többek között tehát azt is megköveteljük, hogy f' kezdő-, illetve végpontja megegyezzen f kezdő-, illetve végpontjával. Néha az út-homotópiát *rögzített végpontokkal való homotópiának* is szokás hívni; vigyázni kell, hogy ez voltaképpen rögzített kezdő- és végpontokkal való homotópiát jelent.

ÁLLÍTÁS 2.4. A folytonos $Y \rightarrow X$ leképezések körében a homotópia ekvivalencia-reláció. Az X -beli utak körében az út-homotópia ekvivalencia-reláció.

BIZONYÍTÁS. Először azt kell belátnunk, hogy bármely f homotóp saját magával. Az állandó $F(., s) = f(.)$ leképezés nyilván homotópia f

és f között; továbbá, ha f egy út, akkor ez az F rögzített végpontokkal való homotópia.

Legyen F egy homotópia f és f' között. Ekkor $G(., s) = F(., 1 - s)$ nyilván homotópia f' és f között; továbbá, ha F rögzített végpontokkal való, akkor G is.

Legyen F egy homotópia f és f' között, és F' egy homotópia f' és f'' között. Defináljuk a $G : Y \times I \rightarrow X$ leképezést a következőképpen:

$$G(y, s) = \begin{cases} F(y, 2s) & \text{ha } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(y, 2s - 1) & \text{ha } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ez jól értelmezett, hiszen $s = 1/2$ -re $F(y, 1) = f'(y) = F'(y, 0)$. Az 1.68 Állításból következik, hogy G folytonos, és $G(., 0) = f(.)$, $G(., 1) = f''$, tehát G homotópia f és f'' között. Továbbá, ha F és F' út-homotópiák, akkor G is az. $\square$

DEFINÍCIÓ 2.5. Egy $f : Y \rightarrow X$ leképezés osztályát a “homotópia” ekvivalencia-relációra vonatkozóan f *homotópia-osztályának* nevezzük. Ha f egy út X -ben, akkor az osztályát az “út-homotópia” ekvivalencia-relációra vonatkozóan f *út-homotópia-osztályának* nevezzük és $[f]$ -fel jelöljük.

- PÉLDA 2.6.** (i) Legyen $A \subset \mathbf{R}^n$ egy konvex halmaz, és $f, f' : Y \rightarrow A$ tetszőleges leképezések. Ekkor f és f' homotópok A -ban: legyen $F(y, s) = (1 - s)f(y) + sf'(y)$, ekkor a konvexitás miatt minden $(y, s) \in Y \times I$ -re $F(y, s) \in A$. E homotópiát *egyenes-vonalú homotópiának* nevezzük. Amennyiben f és f' utak, továbbá $f(0) = f'(0)$ és $f(1) = f'(1)$, akkor az egyenes-vonalú homotópia egy út-homotópia.
- (ii) Legyen $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, és tekintsük az $f(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ és $f'(t) = (\cos \pi t, -\sin \pi t)$ utakat X -ben. Ekkor az egyenes-vonalú homotópiát nem alkalmazhatjuk, mert F képe a $t = 1/2, s = 1/2$ pontban éppen a 0 pont lenne. Látni fogjuk, hogy ez nem véletlen, mert f és f' nem út-homotópok.

Most értelmezzünk egy kétváltozós műveletet X -beli utakra.

DEFINÍCIÓ 2.7. Legyen f egy út X -ben x_0 -ból x_1 -be és g egy út x_1 -ből x_2 -be. Ekkor f és g *konkatenációja* (vagy *összefűzése*) az a $h = f * g$ út x_0 -ból x_2 -be, amelyre

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Könnyen látható, hogy h folytonos I -ből X -be, x_0 és x_2 kezdő- és végpontokkal. Ez a művelet nagyon természetesnek tűnik, de nincsenek meg azon tulajdonságai, amik egy csoportműveletre jellemzők (pl. asszociativitás). Ezen segít a következő eredmény.

ÁLLÍTÁS 2.8. *Az utak konkatenációja indukál egy részlegesen értelmezett kétváltozós műveletet az út-homotópia-osztályokon.*

BIZONYÍTÁS. Azt kell belátnunk, hogy ha f út-homotóp f' -vel és g út-homotóp g' -vel, akkor $h = f * g$ és $h' = f' * g'$ is út-homotópok. Legyen tehát F egy út-homotópia f és f' között és G egy út-homotópia g és g' között. Defináljuk $H : I \times I \rightarrow X$ -et a következő képletekkel:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t - 1, s) & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Mivel minden $s \in I$ -re $F(1, s) = x_1 = G(0, s)$, ezért H folytonos. Könnyen láthatóan H egy út-homotópia h és h' között. $\square$

Jelöljük a konkatenáció által az út-homotópia-osztályokon indukált műveletet a következőképpen:

$$[f] \cdot [g] = [f * g].$$

Erre a műveletre már teljesülnek a megszokott csoport-tulajdonságokhoz hasonlóak. Ehhez szükségünk lesz két jelölésre: minden $x \in X$ -re jelöljük e_x -szel az állandó leképezést I -ből X -be, amely egész I -t x -be képi; tetszőleges f útra X -ben legyen $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ az f inverze.

ÁLLÍTÁS 2.9. (i) *Ha $[f] \cdot ([g] \cdot [h])$ értelmezve van, akkor $([f] \cdot [g]) \cdot [h]$ is, és e két osztály megegyezik.*
(ii) *Ha $f(0) = x_0$ és $f(1) = x_1$, akkor*

$$[f] \cdot [e_{x_1}] = [f] \quad \text{és} \quad [e_{x_0}] \cdot [f] = [f].$$

(iii) *Ha $f(0) = x_0$ és $f(1) = x_1$, akkor*

$$[f] \cdot [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{és} \quad [\bar{f}] \cdot [f] = [e_{x_1}].$$

BIZONYÍTÁS. (i) Legyenek f, g, h reprezentánsai sorban az $[f], [g], [h]$ osztályoknak. $[f] \cdot ([g] \cdot [h])$ pontosan akkor van értelmezve, ha $g(1) = h(0)$ és $f(1) = g(0)$. Ám $([f] \cdot [g]) \cdot [h]$ is pontosan akkor van értelmezve, ha ugyanezen feltételek teljesülnek. Az előző állítás értelmében elegendő belátni, hogy $f * (g * h)$ és $(f * g) * h$ út-homotópok. Ezt a t "út-koordináta" szakaszonként lineáris átparaméterezésével láthatjuk be. Konkrétan, legyen $F : I \times I \rightarrow X$ a következő módon megadva: egyrészt, $F(., 0) = f * (g * h)$; másrészt,

$$F(t, s) = \begin{cases} F(\frac{2t}{2-s}, 0) & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{4}(2-s)] \\ F(t + \frac{s}{4}, 0) & \text{ha } t \in [\frac{1}{4}(2-s), \frac{1}{4}(3-s)] \\ F(\frac{t+s}{1+s}, 0) & \text{ha } t \in [\frac{1}{4}(3-s), 1] \end{cases}$$

Leellenőrizhető, hogy ez egy út-homotópia $f * (g * h)$ és $(f * g) * h$ között.

- (ii) Lássuk be, hogy $e_{x_0} * f$ út-homotóp f -fel; a másik állítás hasonló. Ehhez legyen $F : I \times I \rightarrow X$ olyan, hogy $F(., 0) = e_{x_0} * f$, és

$$F(t, s) = \begin{cases} x_0 & \text{ha } t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ F(\frac{t+s}{s+1}, 0) & \text{ha } t \in [\frac{1-s}{2}, 1] \end{cases}.$$

- (iii) Itt is elegendő belátni, hogy $f * \bar{f}$ út-homotóp e_{x_0} -val. Ehhez legyen

$$F(t, s) = \begin{cases} f((2-2s)t) & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f((2-2s)(1-t)) & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

MEGJEGYZÉS 2.10. A bizonyítás első két pontjában azt a tényt használtuk, hogy a t paraméter szakaszonként lineáris átparaméterezése út-homotópia erejéig nem változtat az úton. Valóban, például a (ii)-höz az alábbi függvénnyel paramétereztünk át:

$$t' = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2t - 1 & \text{ha } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Általánosabban, ez igaz tetszőleges monoton növekvő folytonos átparaméterezésre. Ez következik abból, hogy I konvex halmaz $\mathbf{R}$ -ben, tehát a 2.6 (i) Példa miatt bármely út 0-ból 1-be út-homotóp a $t \mapsto t$ identikus úttal, továbbá hogy ha $g : Z \rightarrow Y$ és $g' : Z \rightarrow Y$ (út-)homotópok, és $f : Y \rightarrow X$ folytonos, akkor $f \circ g$ is (út-)homotóp $f \circ g'$ -vel.

FELADAT 2.11. Tetszőleges X, Y topologikus terekre jelöljük $[Y, X]$ -szel az $f : Y \rightarrow X$ leképezések ekvivalencia-osztályainak halmazát a homotópia relációra nézve. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

- (i) Ha X pontra húzható, akkor $[Y, X]$ egyelemű.
- (ii) Ha Y pontra húzható, akkor $[Y, X]$ megegyezik X ívszerűen összefüggő komponenseinek halmazával.

2.1.2. Fundamentális csoport. Említettük, hogy a 2.9 Állítás egy csoporthoz hasonló tulajdonságokkal ruházza fel az utak homotópia-osztályainak halmazát. Mi az a csoport-tulajdonságok közül, ami nem teljesül? Egyedül az, hogy bármely két elem konkatenációja értelmezve legyen. Ezen segít a következő fogalom.

DEFINÍCIÓ 2.12. Egy *hurk* X -ben egy olyan út, amelynek kezdőpontja megegyezik végpontjával.

Rögzítsünk egy $x_0 \in X$ pontot. Ekkor a 2.9 Állítás (i) pontja alapján az x_0 kezdőpontú hurkok út-homotópia osztályai körében a konkatenáció mindig értelmezett, és ugyanezen állítás (ii)-(iii) pontja alapján csoportot alkot.

DEFINÍCIÓ 2.13. Az X tér x_0 alappontú *fundamentális csoportja* az a csoport, amelynek alaphalmaza az x_0 kezdőpontú hurkok út-homotópia osztályai, és műveletét a konkatenáció indukálja. A fundamentális csoport jelölése: $\pi_1(X, x_0)$. A $\pi_1(X, x_0)$ egységelemét (amely $[e_{x_0}]$) 1-gyel jelöljük. Ha $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, akkor szorzatukat $\alpha\beta$ -val jelöljük, α inverzét pedig (amely $\bar{f}$ osztálya, ahol f tetszőleges hurok α -ban) α^{-1} -zel.

MEGJEGYZÉS 2.14. Ezt a csoportot szokás még *első homotópia-csoportnak* is hívni. A “homotópia-csoport” elnevezés magától értetődő, az “első” szó pedig arra utal, hogy az I egy-dimenziós szimplex X -beli képeinek homotópia-osztályai értelmezik. Léteznek magasabb homotópia-csoportok is, ezek definíciójába most nem megyünk bele.

ÁLLÍTÁS 2.15. Legyen X_0 az X -nek az x_0 pontot tartalmazó ívszerűen összefüggő komponense. Ekkor $\pi_1(X_0, x_0) = \pi_1(X, x_0)$.

BIZONYÍTÁS. Legyen f egy x_0 kezdőpontú hurok X -ben, ekkor f képe definíció szerint X_0 -ban van. Ha f és f' x_0 kezdőpontú hurkok X -ben, és F út-homotópia közöttük, akkor minden $s \in I$ -re f_s képe is X_0 -ban van, tehát F képe szintén. $\square$

Ezért tehát a továbbiakban feltehetjük (és az ellenkezője külön hangsúlyozása nélkül mindig fel is tesszük), hogy X ívszerűen összefüggő.

ÁLLÍTÁS 2.16. Ha x_0 és x_1 tetszőleges X -beli elemek, akkor $\pi_1(X, x_0)$ és $\pi_1(X, x_1)$ izomorfak.

BIZONYÍTÁS. Legyen $f : I \rightarrow X$ egy út x_0 -ból x_1 -be. Ekkor rendeljük minden x_1 -beli alappontú g hurokhoz az x_0 -beli alappontú $f * g * \bar{f}$ hurkot. Könnyen látható, hogy ez a leképezés út-homotóp hurkokat út-homotóp hurkokba visz, tehát indukál egy

$$\phi_f : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

leképezést. Lássuk be, hogy ϕ_f művelettartó! Ehhez legyenek g, g' hurkok x_1 alapponttal. Ekkor, a 2.9 Állítás miatt

$$\begin{aligned} \phi_f([g] \cdot [g']) &= [f * g * g' * \bar{f}] \\ &= [f * g * \bar{f} * f * g' * \bar{f}] \\ &= [f * g * \bar{f}] \cdot [f * g' * \bar{f}] \\ &= \phi_f([g]) \cdot \phi_f([g']). \end{aligned}$$

Egyszerűen következik továbbá a 2.9 Állításból az is, hogy ϕ_f inverze az a

$$\phi_{\bar{f}} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

leképezés, amely egy x_0 -beli alappontú h hurok osztályához az x_1 -beli alappontú $\bar{f} * h * f$ hurok osztályát rendeli. $\square$

MEGJEGYZÉS 2.17. A bizonyításbeli izomorfizmus függ az f úttól. Valóban, ha f' egy másik út x_0 -ból x_1 -be, akkor mivel $\bar{f} * f$ összehúzható, ezért

$$\begin{aligned}\phi_{f'}([g]) &= [f' * g * \bar{f}'] \\ &= [f' * (\bar{f} * f) * g * (\bar{f} * f) * \bar{f}'] \\ &= [(f' * \bar{f}) * f * g * \bar{f} * (f * \bar{f}')] \\ &= [(f' * \bar{f}) * f * g * \bar{f} * \overline{f' * f}] \\ &= [f' * \bar{f}] \phi_f(g) [f' * \bar{f}]^{-1},\end{aligned}$$

tehát a $\phi_{f'}$ a ϕ_f -nek az $[f' * \bar{f}] \in \pi_1(X, x_0)$ elemmel vett konjugáltja. Ebből következik, hogy a ϕ_f pontosan akkor független az f úttól, ha $\pi_1(X, x_0)$ Abel-csoport.

DEFINÍCIÓ 2.18. Egy olyan X teret, amelyre valamely (és ekkor bármely) $x_0 \in X$ -re $\pi_1(X, x_0)$ a triviális (egyelemű) csoport, *egyszeresen összefüggőnek* nevezzük. Jelölése: $\pi_1(X, x_0) = 1$.

ÁLLÍTÁS 2.19. Minden pontra húzható tér egyszeresen összefüggő.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy létezik egy $F : X \times I \rightarrow X$ homotópia az identikus leképezés és az állandó x_0 leképezés között: $f_0 = \text{Id}$, $f_1 = x_0$, amelyre $F(x_0, s) = x_0$ minden $s \in I$ -re. Legyen h egy hurok x_0 -ban. Ekkor az

$$\begin{aligned}F \circ (h, \text{Id}_I) : I \times I &\rightarrow X \\ (t, s) &\mapsto F(h(t), s)\end{aligned}$$

út-homotópia h és az x_0 állandó hurok között. Tehát minden x_0 -beli h hurok összehúzható, és így $\pi_1(X, x_0) = 1$. Az előző állítás értelmében ez ekkor minden $x_1 \in X$ -re is következik. $\square$

- PÉLDA 2.20. (i) Az előző állítás értelmében minden A konvex halmaz $\mathbf{R}^n$ -ben egyszeresen összefüggő. Valóban, legyen $a_0 \in A$ tetszőleges; ekkor az egyenes-vonalú homotópia pontra húzása A -nak.
- (ii) Az előbbi példa némileg általánosítható: egy $A \subset \mathbf{R}^n$ részhalmazt *csillag-szerűnek* hívunk, ha létezik olyan $a_0 \in A$, amelyre minden $a \in A$ -ra az $a_0 a$ szakasz része A -nak. Ha A csillag-szerű, akkor egyszeresen összefüggő.
- (iii) Legyen $G = (C, E)$ egy véges gráf C csúcshalmazzal és E élhalmazzal. Gráf-elméletből ismert, hogy G beágyazható $\mathbf{R}^3$ -ba véges szimpliális komplexusként. A csúcsok helyét általános helyzetben választva feltesszük, hogy az élek egyenes szakaszok. Ezért, G képe ellátható az $\mathbf{R}^3$ -ról örökölt alter-topológiával (ahol $\mathbf{R}^3$ -on az euklideszi topológiát vesszük). Könnyen belátható, hogy az így kapott topologikus tér nem függ G -nek az $\mathbf{R}^3$ -ba történő beágyazásától. Ezért, minden

véges gráfra gondolhatunk úgy is, mint egy speciális topologikus térre. Ha speciálisan G egy fa, akkor azt állítjuk, hogy az így nyert topologikus tér pontra húzható, ezért az Állítás miatt minden véges fa egyszeresen összefüggő topologikus teret határoz meg. A fák pontra-húzhatóságának bizonyítása: legyen $x_0 \in C$ tetszőleges, és tekintsük x_0 -t G gyökerének. Ekkor G mélységére vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk: ha a mélység 0, akkor a topologikus térnek egyetlen pontja x_0 , és készen vagyunk. Ha a mélység n , akkor az n -edik szintű levelek mindegyike pontosan egy $(n-1)$ -edik szintű őshöz csatlakozik egy éllel, amely feltevés szerint egy egyenes szakasz. Minden ilyen élen alkalmazzunk egy egyenes vonalú homotópiát, amely az adott élt egyetlen pontjára (az $(n-1)$ -edik szintű végpontjára) húzza rá. A gráf többi részét a homotópia hagyja rögzítve. Így a szintet 1-gyel csökkentettük, és alkalmazható az indukciós feltevés.

ÁLLÍTÁS 2.21. *Legyen X egy egyszeresen összefüggő tér, $x_0, x_1 \in X$ tetszőlegesek, és f, f' tetszőleges utak x_0 -ból x_1 -be. Ekkor f és f' út-homotópok.*

BIZONYÍTÁS. Az $f' * \bar{f}$ egy x_0 -beli hurok, tehát mivel X egy egyszeresen összefüggő, út-homotóp az azonosan x_0 hurokkal. Legyen F egy ilyen út-homotópia: $F(\cdot, 0) = f' * \bar{f}$, $F(\cdot, 1) = x_0$. Legyen $G : I \times I \rightarrow X$ olyan folytonos leképezés, amelyre $s = 0$ -ra $g_s = G(\cdot, s)$ azonosan megegyezik x_1 -gyel és minden $s \in I$ -re a g_s megszorítva $t \in [0, \frac{1}{2}]$ -re egy út $f_s(\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}, s)$ és x_1 között, majd $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ -re ugyanezen út ellentétes irányban bejárva. Ilyen leképezés létezik, például lehet az

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{cases} F(\frac{1}{2}, s - t) & \text{ha } t \in [0, s] \\ x_1 & \text{ha } t \in [s, 1] \end{cases}$$

konkatenációja saját maga inverzével t -ben. Legyen $H : I \times I \rightarrow X$ az a leképezés, amelyre

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{ha } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ G(2t - \frac{1}{2}, s) & \text{ha } t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ F(2t - 1, s) & \text{ha } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

Könnyen leellenőrizhető, hogy H út-homotópia $f' * e_{x_1} * \bar{f}$ és g_1 között. Ám $g_1 = g * \bar{g}$ valamely g útra x_0 -ból x_1 -be, és minden $s \in I$ -re $H(\frac{1}{2}, s) = x_1$ valamint $H(0, s) = x_0$. Ebből következik, hogy mind f mind f' út-homotópok g -vel, és mivel az út-homotópia tranzitív, így egymással is.

Adunk egy egyszerűbb, a 2.9 Állításon alapuló pusztán algebrai bizonyítást is: jelöljük $\sim$ -mal az út-homotópia relációt. Ekkor azt

találjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 f' &\sim f' * e_{x_1} \\
 &\sim f' * (\bar{f} * f) \\
 &\sim (f' * \bar{f}) * f \\
 &\sim e_{x_0} * f \\
 &\sim f,
 \end{aligned}$$

ahol a harmadik sorról a negyedike való áttérésnél azt használtuk, hogy $f' * \bar{f}$ egy x_0 alappontú hurok, és mint ilyen, út-homotóp az e_{x_0} hurokkal, hiszen X egyszerűen összefüggő. $\square$

A következő eredmény, amit be szeretnénk látni, hogy a fundamentális csoport homeomorf terekre megegyezik. Ehhez az első lépés egy folytonos leképezés által a fundamentális csoporton *indukált homomorfizmus* bevezetése. Legyen $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés az X és Y topologikus terek között, $x_0 \in X$, és $y_0 = f(x_0)$. Legyen

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

az a leképezés, amely egy x_0 -beli h hurok osztályához az y_0 -beli $f \circ h$ hurok osztályát rendeli.

ÁLLÍTÁS 2.22. *Az f_* leképezés jól-definiált, és egy csoport-homomorfizmus.*

BIZONYÍTÁS. Ahhoz, hogy belássuk hogy f_* jól-definiált, azt kell megmutatni, hogy ha az x_0 -beli h és h' hurkok út-homotópok, akkor a képeik is út-homotópok. Legyen H egy út-homotópia h és h' között. Ekkor könnyen látható, hogy $f \circ H$ út-homotópia $f_*(h)$ és $f_*(h')$ között.

A csoport-homomorfizmushoz azt kell belátnunk, hogy f_* a $\pi_1(X, x_0)$ egységelemét a $\pi_1(Y, y_0)$ egységelemébe viszi, továbbá felcserélhető a két csoport szorzásával. Az első tulajdonság következik abból, hogy a $\pi_1(X, x_0)$ egységelemének egy reprezentánsa az azonosan x_0 hurok, amelynek az f_* általi képe nyilvánvalóan az azonosan y_0 hurok, tehát osztálya a $\pi_1(Y, y_0)$ egységeleme. Ha pedig h_1 és h_2 tetszőleges x_0 -beli hurkok, akkor

$$\begin{aligned}
 f_*([h_1][h_2]) &= f_*([h_1 * h_2]) \\
 &= [f(h_1 * h_2)] \\
 &= [f(h_1) * f(h_2)] \\
 &= [f(h_1)][f(h_2)] \\
 &= f_*([h_1])f_*([h_2]).
 \end{aligned}$$

$\square$

DEFINÍCIÓ 2.23. f_* -ot az f által indukált homomorfizmusnak nevezzük.

Szükségünk lesz az indukált homomorfizmus funktorialitására:

ÁLLÍTÁS 2.24. *Ha $f : X \rightarrow Y$ és $g : Y \rightarrow Z$ folytonos leképezések topologikus terek között. Ekkor $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Továbbá, az $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ identikus leképezés által indukált homomorfizmus a $\pi_1(X, x_0)$ csoport Id identikus automorfizmusa.*

BIZONYÍTÁS. Az első állítás következik a $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$ azonosságból, a második nyilvánvaló. $\square$

Az eddigiekből egyszerűen következik, hogy a fundamentális csoport topologikus invariáns.

ÁLLÍTÁS 2.25. *Az előbbi jelölésekkel, ha f egy homeomorfizmus X és Y között, akkor f_* izomorfizmus $\pi_1(X, x_0)$ és $\pi_1(Y, y_0)$ között.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, alkalmazva az előző állítást $Z = X$, $g = f^{-1}$ -re kapjuk, hogy $(f^{-1})_* \circ f_* = \text{Id}_* = \text{Id}$, tehát $(f^{-1})_*$ bal-inverze f_* -nak, s így f_* izomorfizmus. $\square$

A pontra húzhatóságnál és a homeomorfizmusnál létezik két valamilyest általánosabb fogalom, amelyek segítenek a fundamentális csoport kiszámításában.

DEFINÍCIÓ 2.26. Legyen X topologikus tér és $Y \subset X$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy Y *deformációs retraktuma* X -nek, ha létezik olyan

$$F : X \times I \rightarrow X$$

folytonos leképezés, amelyre $f_0 = \text{Id}_X$, f_1 képe Y -ban fekszik, és minden $s \in I$ -re $f_s|_Y = \text{Id}_Y$. Egy ilyen F leképezést *deformációs retrakciónak* nevezünk.

Amennyiben létezik olyan $f_1 : X \rightarrow Y$ amelyre $f_1|_Y = \text{Id}_Y$, akkor f_1 -et X -nek egy Y -ra való *retrakciónak* mondjuk.

MEGJEGYZÉS 2.27. Minden F deformációs retrakció esetén f_1 egy retrakció. Ha speciálisan $Y = \{x_0\}$, akkor definíció szerint Y akkor és csak akkor deformációs retraktuma X -nek ha X pontra húzható.

ÁLLÍTÁS 2.28. *Ha Y retraktuma X -nek, akkor tetszőleges $y_0 \in Y$ -ra az indukált homomorfizmus*

$$(f_1)_* : \pi_1(X, y_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

szürjektív. Amennyiben Y deformációs retraktuma X -nek, akkor $(f_1)_$ izomorfizmus.*

BIZONYÍTÁS. A szürjektivitás triviális: mivel f_1 az identitás Y -on és $Y \subseteq X$, azért minden y_0 alappontú g hurok Y -ban előáll mint saját maga f_1 általi képe.

Lássuk be, hogy amennyiben F egy deformációs retrakciója X -nek Y -ra, akkor a neki megfelelő f_1 retrakcióra $(f_1)_*$ injektív. Legyen $[g] \in$

$\ker((f_1)_*)$, azaz létezzék Y -ban egy G út-homotópia $f_1 \circ g$ és e_{y_0} között. Könnyen látható, hogy ekkor a

$$H(t, s) = \begin{cases} F(g(t), 2s) & \text{ha } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(t, 2s - 1) & \text{ha } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

út-homotópia X -ben g és e_{y_0} között. $\square$

FELADAT 2.29. Legyen X topologikus tér, $x_0, x_1, x_2 \in X$, $f : I \rightarrow X$ egy út x_0 -ból x_1 -be és $g : I \rightarrow X$ egy út x_1 -ből x_2 -be. Bizonyítsuk be, hogy $\phi_{f \circ g} = \phi_g \circ \phi_f$!

FELADAT 2.30. Legyen $A \subset \mathbf{R}^n$, $a_0 \in A$ egy tetszőleges pontja és $h : A \rightarrow Y$ egy folytonos leképezés valamely Y topologikus térbe, $y_0 = h(a_0)$. Bizonyítsuk be, hogy ha h a megszorítása valamely $H : \mathbf{R}^n \rightarrow Y$ folytonos leképezésnek, akkor $h_* : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ a triviális homomorfizmus!

FELADAT 2.31. Legyen X ívszerűen összefüggő tér, $x_0, x_1 \in X$, $f : I \rightarrow X$ egy út x_0 -ból x_1 -be, $h : X \rightarrow Y$ egy folytonos leképezés valamely Y topologikus térbe, $h(x_i) = y_i$ és $f' = h \circ f : I \rightarrow Y$ az f h általi képe. Bizonyítsuk be, hogy

$$h_* \circ \phi_f = \phi_{f'} \circ h_*$$

mint $\pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ homomorfizmusok!

2.2. Fedőleképezések

2.2.1. A kör fundamentális csoportja. Lássunk most példát egy nem-triviális fundamentális csoportú térre!

Láttuk, hogy az S^1 körvonalat megkaphatjuk úgy, hogy az $\mathbf{R}$ valós egyenest leosztjuk azzal az ekvivalencia-relációval, hogy $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $x - y \in \mathbf{Z}$. Legyen

$$(2.1) \quad q : \mathbf{R} \rightarrow S^1 \\ x \mapsto \exp(2i\pi x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

a hányados-leképezés. Emlékezzünk, hogy a hányados-topológia értelmezése alapján q folytonos. Először belátjuk q egy fontos tulajdonságát.

DEFINÍCIÓ 2.32. Legyen $p : E \rightarrow B$ egy folytonos leképezés és $U \subset B$ nyílt. Azt mondjuk, hogy p *egyenletesen fedi* U -t, ha $p^{-1}(U)$ előáll mint E -beli diszjunkt nyílt $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ halmazok egyesítése, valamely A indexhalmazra úgy, hogy minden rögzített $\alpha \in A$ -re $p|_{V_\alpha}$ homeomorfizmus V_α és U között. Egy ilyen V_α -t ekkor p egy *szeletének* hívunk.

ÁLLÍTÁS 2.33. Minden $z \in S^1$ -nek létezik olyan nyílt környezete, amelyet (2.1) leképezés egyenletesen fed.

BIZONYÍTÁS. Be fogjuk látni, hogy q az

$$U_1 = \{z \in S^1 : \Re(z) > 0\}$$

$$U_2 = \{z \in S^1 : \Re(z) < 0\}$$

$$U_3 = \{z \in S^1 : \Im(z) > 0\}$$

$$U_4 = \{z \in S^1 : \Im(z) < 0\}$$

nyílt halmazok mindegyikét egyenletesen fedi. Ez már elegendő az állításhoz, hiszen minden $z = \exp(2\pi x) \in S^1$ -nek valamelyik U_j nyílt környezete. Ezt elég U_1 -re belátni, a többi eset teljesen hasonló. Az U_1 -nek a q általi $q^{-1}(U_1)$ ösképe megegyezik a $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$ nyílt intervallumok egyesítésével. Ezen intervallumok különböző n -ekre nyilván diszjunktak. Továbbá, mivel $\bar{V}_n$ kompakt és q injektív $\bar{V}_n$ -en, ezért q^{-1} folytonos az $\bar{U}_1 = q(\bar{V}_n)$ halmazon (konkrétan, egy állandó erejéig a komplex logaritmus-függvény megfelelő ágának megszorítása az egységkörvonalra). Többek között, $(q|_{V_n})^{-1}$ folytonos U_1 -en is. Másrészt, a közbelső érték-tétel miatt $q|_{V_n}$ ráképezés U_1 -re, és így q homeomorfizmus V_n és U_1 között. $\square$

DEFINÍCIÓ 2.34. Ha $f : X \rightarrow S^1$ folytonos valamely X topologikus térből S^1 -be, akkor f egy *felemelésének* nevezünk egy olyan $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos leképezést, amelyre $f = q \circ \tilde{f}$.

TÉTEL 2.35. Legyen $f : I \rightarrow S^1$ tetszőleges folytonos leképezés, legyen $b_0 = f(0)$, és $e_0 \in \mathbf{R}$ tetszőleges felemelése b_0 -nak, azaz $q(e_0) = b_0$. Ekkor f -nek létezik egy és csak egy olyan $\tilde{f}$ felemelése $\mathbf{R}$ -re, amelyre $\tilde{f}(0) = e_0$.

BIZONYÍTÁS. A 2.33 Állítás alapján minden $z \in S^1$ -nek létezik olyan nyílt környezete S^1 -ben, amelyet q egyenletesen fed. Továbbá, f folytonossága miatt minden $t \in I$ -nek létezik olyan nyílt környezete I -ben, amelyet f egy olyan halmazba képez, amelyet q egyenletesen fed. Nevezzük az ilyen nyílt halmazokat I -ben *jó*-nak. A jó nyílt halmazok tehát fedik I -t. Mivel I kompakt, kiválaszthatunk egy véges alfedést jó nyílt halmazokkal:

$$(2.2) \quad I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N.$$

Használjuk fel a következő eredményt!

LEMMA 2.36 (Lebesgue-lemma). Ha $U_1 \cup \dots \cup U_N$ egy (X, ρ) kompakt metrikus tér véges fedése, akkor létezik olyan $\delta > 0$, amelyre minden $x \in X$ -re $B_\delta(x) \subseteq U_j$ teljesül legalább egy $j \in \{1, \dots, N\}$ -re.

BIZONYÍTÁS. Feltehető, hogy X összefüggő (különben a lemma alkalmazható összefüggő komponensenként). Ha létezik olyan $x_0 \in X$, amelyre minden $R \in \mathbf{N}$ -re $B_R(x_0) \subset U_j$ valamely $j \in \{1, \dots, N\}$ -re, akkor létezik olyan j_0 index amely végtelen sokszor szerepel, amiből könnyen látszik hogy ekkor $X = U_{j_0}$, így ebben az esetben kész vagyunk.

Különben, értelmezhetjük azt a $d : X \rightarrow \mathbf{R}_+$ függvényt, amely minden $x \in X$ -hez hozzárendeli a következő értéket:

$$d(x) = \sup(r \in \mathbf{R} : B_r(x) \subset U_j \text{ valamely } j \in \{1, \dots, N\}\text{-re}).$$

Mivel $d(x)$ felfogható, mint véges sok nem-negatív szám

$$d_j(x) = \sup(r \in \mathbf{R} : B_r(x) \subset U_j)$$

maximuma (hiszen U_j nyílt), amelyek közül legalább egy pozitív (hiszen $X = U_1 \cup \dots \cup U_N$) ezért $d(x) > 0$. Továbbá, d folytonos: tegyük fel ugyanis, hogy $\rho(x, y) < \varepsilon$ valamely $\varepsilon > 0$ -ra. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ebből minden $z \in X$ -re következik

$$|\rho(z, y) - \rho(z, x)| \leq \rho(x, y) < \varepsilon;$$

ezért ha $B_{d(x)}(x) \subseteq U_{j_0}$ valamely $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ -re, akkor

$$B_{d(x)-\rho(x,y)}(y) \subseteq U_{j_0}$$

is áll, tehát $d(y) > d(x) - \varepsilon$, és x, y szerepét megcserélve hasonlóan $d(y) < d(x) + \varepsilon$ is áll. Ebből a 1.99 (ii) Feladat és a Heine-Borel tétel 1.108 segítségével nyerjük a keresett

$$\delta = \min_{x \in X}(d(x)) > 0$$

értéket. □

Alkalmazzuk a lemmát a (2.2) fedésre: kapunk egy $\delta > 0$ értéket, amelyet (2.2) *Lebesgue-számának* nevezünk. Legyen ekkor

$$s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_{N-1} < s_N = 1$$

egy olyan felosztása I -nek, amelyben minden $j \in \{1, \dots, N\}$ -re $s_{j+1} - s_j < \delta$, ahol δ (2.2) Lebesgue-száma (és esetleg N értékét megfelelően megváltoztattuk). Erre a felosztásra teljesül az, hogy minden $[s_j, s_{j+1}] \subset I_i$ valamely i -re, többek közt minden $f([s_j, s_{j+1}])$ -et q egyenletesen fed. Értelmezzük ezután $\tilde{f}$ -ot rekurzívan. Mivel $[0, s_1]$ része I_1 -nek, aminek f általi képét q egyenletesen fed:

$$q^{-1}(f(I_1)) = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} V_n$$

valamely V_n nyílt halmazokra $\mathbf{R}$ -ben, ezért $q^{-1}(f([0, s_1]))$ is felbomlik diszjunkt egyesítésként:

$$q^{-1}(f([0, s_1])) = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} (V_n \cap q^{-1}(f([0, s_1]))).$$

Mivel $f(0) = b_0$ és $q(e_0) = b_0$, ezért e_0 ezen diszjunkt halmazok közül benne van pontosan egyben. Jelöljük V_0 -val azt a komponenst, amelyre $e_0 \in V_0$ (ezt megtehetjük a V_n -ek esetleges átindexezése árán). Mivel q homeomorfizmus V_0 -ról $q(V_0)$ -ra és $f([0, s_1]) \subset q(V_0)$, ezért az $f([0, s_1])$ halmaznak létezik egy és csak egy felemelése V_0 -ra: legyen $\tilde{f}$ a $[0, s_1]$ -en ez a felemelés.

Ezután értelmezzük $\tilde{f}$ -ot az $[s_1, s_2]$ -n hasonlóan, de e_0 helyett $\tilde{f}(s_1)$ -et véve (amely már értelmezve lett az előző lépésben), s. í. t. egészen az utolsó $[s_{N-1}, 1]$ intervallumig. Lássuk be, hogy az így értelmezett $\tilde{f}$ folytonos: valamely $t \in]s_j, s_{j+1}[$ pontban ez világos, hiszen itt úgy értelmeztük, mint f és $q|_{V_n}^{-1}$ kompozíciója valamely $n \in \mathbf{N}$ -re, és mindkét leképezés konstrukció alapján folytonos. Másrészt, valamely s_j -ben mindkét oldali határértéke konstrukció alapján ugyanaz a felemeltje $f(s_j)$ -nek, tehát itt is folytonos. Az, hogy $\tilde{f}$ felemelése f -nek, szintén nyilvánvaló a konstrukcióból.

Lássuk be végül, hogy az így kapott $\tilde{f}$ az egyetlen, a kívánt tulajdonságokkal rendelkező felemelés. Tegyük fel, hogy $\tilde{\tilde{f}}$ egy másik e_0 -ban kezdődő felemelése f -nek, tehát $\tilde{\tilde{f}}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$. Mivel $f([0, s_1])$ -et q egyenletesen fedi és $\tilde{f}$ és $\tilde{\tilde{f}}$ folytonosak, ezért minden $s \in [0, s_1]$ -re $\tilde{\tilde{f}}(s)$ és $\tilde{f}(s)$ ugyanabban a V szeletében vannak q -nak (hiszen $\coprod_{n \in \mathbf{Z}} V_n$ minden összefüggő komponensét tartalmazza valamely V_n). Mivel $q \circ \tilde{f} = q \circ \tilde{\tilde{f}}$ és q bijektív V és $q(V)$ között, ezért szükségszerűen $\tilde{\tilde{f}}(s) = \tilde{f}(s)$ minden $s \in [0, s_1]$ -re. Többek között, ez teljesül $s = s_1$ -re is. Ekkor azonban, hasonlóan az előző gondolatmenethez, mivel $f([s_1, s_2])$ -t q egyenletesen fedi és $\tilde{f}(s_1) = \tilde{\tilde{f}}(s_1)$, ezért minden $s \in [s_1, s_2]$ -re is $\tilde{\tilde{f}}(s) = \tilde{f}(s)$. Teljes indukcióval ezután rögtön adódik, hogy minden $0 \leq j \leq N-1$ -re és minden $s \in [s_j, s_{j+1}]$ -re is $\tilde{\tilde{f}}(s) = \tilde{f}(s)$. Mivel $I = [0, s_1] \cup \dots \cup [s_{N-1}, s_N]$, ezért $\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}$. $\square$

Hasonló felemelési tulajdonság teljesül út-homotópiákra is.

TÉTEL 2.37. *Legyen $F : I \times I \rightarrow S^1$ tetszőleges folytonos leképezés, legyen $b_0 = F(0, 0)$, és $e_0 \in \mathbf{R}$ tetszőleges felemelése b_0 -nak. Ekkor F -nek létezik egy és csak egy olyan $\tilde{F}$ felemelése $\mathbf{R}$ -re, amelyre $\tilde{F}(0) = e_0$. Továbbá, ha F út-homotópia, akkor $\tilde{F}$ is az.*

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan az utak esetéhez, az $\tilde{F}$ felemelést is lépésenként szerkesztjük meg. Először az előző állítást használva felemeljük F megszorítását a “bal oldali” $\{0\} \times I$ és az “alsó” $I \times \{0\}$ intervallumokra, e_0 kezdőponttal. Mivel $I \times I$ kompakt és F folytonos, ezért csakúgy mint a 2.35 Tétel bizonyításában, a Lebesgue-lemma 2.36 értelmében az I -nek léteznek olyan

$$\begin{aligned} 0 &= s_0 < s_1 < \dots < s_{N-1} < s_N = 1 \\ 0 &= t_0 < t_1 < \dots < t_{M-1} < t_M = 1 \end{aligned}$$

felosztásai, amelyre az

$$J_j \times I_i = [t_j, t_{j+1}] \times [s_i, s_{i+1}]$$

téglalapok mindegyikének F általi képe része egy olyan halmaznak, amelyet q egyenletesen fed. Ezután a következőképpen járunk el. Rendezzük ezen téglalapokat sorba lexikografikusan (j, i) szerint, azaz úgy, hogy a $j = 0$ “alsó sor” téglalapjai i szerint növekedve legyenek elől, azután következzenek a $j = 1$ “második sor” téglalapjai i szerint növekedve, s. í. t. egészen a $j = M - 1$ “utolsó sor”-ig, melynek legutolsó téglalapja tehát $I_{M-1} \times J_{N-1}$. Tegyük fel, hogy $\tilde{F}$ -et már megszerkesztettük minden $J_j \times I_i$ előtt szereplő téglalagra, és terjesszük ki $J_j \times I_i$ -re. Az, hogy $\tilde{F}$ már értelmezett az előtte szereplő téglalapokra, azt jelenti többek között, hogy értelmezve van a $J_j \times I_i$ “bal oldali” $\{t_j\} \times I_i$ és “alsó” $J_j \times \{s_i\}$ oldalaira. E két oldal $O = (\{t_j\} \times I_i) \cup (J_j \times \{s_i\})$ egyesítése összefüggő $I \times I$ -ben, ezért $\tilde{F}$ folytonossága miatt szükségszerűen $\tilde{F}(O)$ is összefüggő $\mathbf{R}$ -ben. Másrészt, mivel a $J_j \times I_i$ téglalap F általi képét tartalmazza egy olyan U nyílt halmaz, amelyet q egyenletesen fed:

$$q^{-1}(U) = \coprod_{n \in \mathbf{Z}} V_n,$$

ezért $\tilde{F}(O)$ -t tartalmazza valamelyik V_n . Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\tilde{F}(O) \subset V_0$. Mivel $q|_{V_0}$ homeomorfizmus V_0 -ról U -ra és $F(J_j \times I_i) \subset U$, ezért a $q|_{V_0}^{-1} \circ F$ folytonos felemelése F -nek $J_j \times I_i$, amely kiterjeszti az $\tilde{F}$ felemelést O -n.

Ezt az eljárást folytatva rekurzívan, $\tilde{F}$ -et megszerkeszthetjük minden $J_j \times I_i$ téglalagra, és így véges sok lépés után a teljes $I \times I$ -re kiterjeszthetjük a felemelést. Az így kapott felemelés folytonossága és egyértelműsége hasonlóan következik, mint az utak esetében.

Mutassuk meg végül, hogy ha minden $s \in I$ -re $f_s = F(., s)$ végpontja valamely állandó $b_1 \in S^1$, akkor $\tilde{f}_s = \tilde{F}(., s)$ is valamely állandó e_1 felemelése b_1 -nek. Mivel b_1 -nek létezik olyan környezete, amit q egyenletesen fed, ezért $q^{-1}(b_1)$ diszkrét halmaz $\mathbf{R}$ -ben; valóban, b_1 különböző ősképei egész számokkal térnek el egymástól. Másrészt, minden $s \in I$ -re $\tilde{F}(1, s)$ eleme $q^{-1}(b_1)$ -nek. Mivel ez egy diszkrét halmaz és $\tilde{F}(1, .)$ folytonos az összefüggő I halmazból $q^{-1}(b_1)$ -be, ezért $\tilde{F}(1, .)$ valamely állandó $e_1 \in q^{-1}(b_1)$. $\square$

Ezen előkészületek után beláthatjuk a szakasz fő eredményét.

TÉTEL 2.38. *Az S^1 körvonal 1 alappontú fundamentális csoportja izomorf az egész számok $\mathbf{Z}$ csoportjával.*

MEGJEGYZÉS 2.39. Mivel $\mathbf{Z}$ Abel-csoport, ezért a 2.17 Megjegyzés miatt ekkor minden $z \in S^1$ -re a $\pi_1(S^1, z)$ “kanonikusan” izomorf $\mathbf{Z}$ -vel.

BIZONYÍTÁS. Az $1 \in S^1$ pont q általi ősképe a $\mathbf{Z}$ halmaz. Legyen $f : I \rightarrow S^1$ egy 1 kezdőpontú hurok S^1 -ben. A 2.35 Állítás miatt létezik pontosan egy olyan $\tilde{f}$ felemelése $\mathbf{R}$ -re, amelyre $\tilde{f}(0) = 0 \in \mathbf{Z}$. Továbbá

ekkor $\tilde{f}(1) \in \mathbf{Z}$. Legyen

$$(2.3) \quad \phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbf{Z}$$

az a leképezés, amely $[f]$ -et $\tilde{f}(1)$ -be viszi. Ez jól értelmezett a 2.37 Állítás miatt.

Lássuk be, hogy ϕ bijektív. A szürjektivitás világos: legyen $n \in \mathbf{Z}$ tetszőleges, és $\tilde{f}$ egy út $\mathbf{R}$ -ben 0-ból n -be. Ekkor az $f = q \circ \tilde{f}$ egy 1-beli hurok S^1 -ben, amelynek a megfelelő felemelése $\mathbf{R}$ -re éppen $\tilde{f}$. Mivel $\tilde{f}(1) = n$, ezért definíció alapján $\phi([f]) = n$. Az injektivitáshoz tegyük fel, hogy $[f]$ és $[g]$ olyan osztályok $\pi_1(S^1, 1)$ -ben valamely 1-beli f és g hurkokra, amelyekre $\phi([f]) = \phi([g])$. Legyen $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ a 0-beli kezdőpontú felemelése f -nek és g -nek; ekkor ϕ definíciója szerint $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Mivel $\mathbf{R}$ egyszeresen összefüggő, ezért a 2.21 Állítás értelmében $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ úthomotópok: legyen $\tilde{F}$ egy út-homotópia közöttük. Ekkor az $F = q \circ \tilde{F}$ nyilván út-homotópia f és g között.

Lássuk be végül, hogy ϕ csoport-homomorfizmus. Legyenek $[f]$ és $[g]$ tetszőleges osztályok $\pi_1(S^1, 1)$ -ben, és legyen $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ a 0-beli kezdőpontú felemelése f -nek és g -nek. Ekkor $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$ és $\phi([g]) = \tilde{g}(1)$. Legyen most $\tilde{g}(t) = \phi([f]) + \tilde{g}(t)$. Ekkor $\tilde{g}$ az a felemelése g -nek, amely $\phi([f])$ -ben kezdődik: valóban, $\phi([f]) \in \mathbf{Z}$ miatt

$$q(\phi([f]) + \tilde{g}(t)) = q(\tilde{g}(t)) = g(t),$$

másrészt pedig

$$\tilde{g}(0) = \phi([f]) + \tilde{g}(0) = \phi([f]).$$

Tehát az $\tilde{f} * \tilde{g}$ az a folytonos felemelése $f * g$ -nek, amely 0-ban kezdődik. Ekkor azonban

$$\begin{aligned} \phi([f][g]) &= \phi([f * g]) \\ &= (\tilde{f} * \tilde{g})(1) \\ &= \tilde{g}(1) \\ &= \phi([f]) + \tilde{g}(1) \\ &= \phi([f]) + \phi([g]). \end{aligned}$$

□

FELADAT 2.40. Legyen minden $n \in \{1, \dots, 100\}$ esetén

$$U_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

és

$$U_0 = \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100} \right).$$

Határozzuk meg az

$$[0, 1] \subset U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{100}$$

fedés Lebesgue-számát!

FELADAT 2.41. Határozzuk meg az M Möbius-szalag fundamentális csoportját!

FELADAT 2.42. Határozzuk meg az $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ fundamentális csoportját!

FELADAT 2.43. Egy köralakú várfalon van (egymástól nem feltétlenül ugyanakkora távolságra) 12 bástya, minden bástyában áll egy ór. Pontban éjfélkor minden ór elindul a bástyájából a falon valamelyik irányba, egyenletesen olyan sebességgel, amellyel egy óra alatt körbe tudná járni a teljes falat. Amikor két ór találkozik egymással a sétája során, mindeketten sarkon fordulnak, és ugyanolyan sebességgel mint előtte mentek, elindulnak az ellenkező irányba.

- (i) Bizonyítsuk be, hogy pontban délben minden ór ismét a saját bástyájában lesz!
- (ii) Minden ór kapjon 1 pontot valahányszor keresztülhalad saját bástyáján az óramutatóval ellenkező irányban, és -1 pontot valahányszor keresztülhalad saját bástyáján az óramutatóval megegyező irányban. Ne kapjon pontot induláskor valamint ha éppen a bástyáján fordul meg, viszont kapja meg a neki járó pontot délben, amikor újra visszaérkezik az eredeti ór helyére, annak megfelelően, hogy ezt milyen irányból teszi. Mutassuk meg, hogy délben minden órnek ugyanannyi pontja lesz! Milyen értékeket vehet fel ez a közös pontszám?
- (iii) Bizonyítsuk be, hogy már reggel hat órakor is minden ór a saját bástyájában lesz!

2.2.2. Alkalmazások. Ebben a részben áttekintjük az eddigi eredményeink néhány érdekes következményét. Kezdjük a matematika-történetileg legfontosabbal.

TÉTEL 2.44 (Az algebra alaptétele). *Legyen $z \in \mathbf{C}$ egy határozatlan, $n > 0$ természetes szám és $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ rögzített értékek. Ekkor a*

$$P = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

polinomnak létezik multiplicitással számolva n komplex gyöke.

BIZONYÍTÁS. Teljes indukciót alkalmazunk n (P foka) szerint: az $n = 1$ esetben $z = -a_1$ az egyetlen gyök.

Általában, legyen $f(z)$ a P -ből nyert komplex-értékű függvény és $s \in [0, 1]$ -re

$$F(z, s) = z^n + s a_1 z^{n-1} + \dots + s^n a_n.$$

Ekkor minden $s \in [0, 1]$ -re

$$|F(z, s)| \geq |z|^n - |a_1| |z|^{n-1} - \dots - |a_n|,$$

így elegendően nagy $R > 0$ esetén amennyiben $|z| = R, 0 \leq s \leq 1$ akkor $F(z, s) \neq 0$. Ha rögzítünk egy ilyen nagy R értéket, akkor tehát

értelmezhetjük a következő út-homotópiát:

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \{|w| = 1\} = S^1 \\ (\theta, s) &\mapsto a(s)^{-1} \frac{F(Re^{2i\pi\theta}, s)}{|F(Re^{2i\pi\theta}, s)|} \end{aligned}$$

a $\theta \mapsto \exp(2i\pi n\theta)$ és az $a(1)^{-1}f(R\exp(2i\pi n\theta))/|f(R\exp(2i\pi n\theta))|$ leképezések között, ahol az

$$a(s) = \frac{F(R, s)}{|F(R, s)|}$$

választással biztosítjuk, hogy ez a leképezés valóban út-homotópia. Mivel előbbi leképezés osztálya $n \in \mathbf{Z} = \pi_1(S^1)$, ezért utóbbié is ugyanez az osztály. Ha $f(z)$ -nek nem lenne zérushelye $\{|z| \leq R\}$ -en, akkor viszont tekinthetnénk a

$$\begin{aligned} [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \{|w| = 1\} = S^1 \\ (\theta, s) &\mapsto b(s)^{-1} \frac{f(sRe^{2i\pi\theta})}{|f(sRe^{2i\pi\theta})|} \end{aligned}$$

út-homotópiát f -nek a $|z| = R$ körvonalra vett megszorítása és a triviális hurok között, ahol

$$b(s) = \frac{f(sR)}{|f(sR)|};$$

ekkor $[f] = 0 \in \mathbf{Z} = \pi_1(S^1)$ lenne, ami ellentmond $n > 0$ -nak. Tehát $f(z)$ -nek létezik legalább egy z_1 gyöke $\{|z| \leq R\}$ -en; ekkor $P/(z - z_1)$ olyan polinom, amelynek foka $n - 1$, tehát az indukciós feltétel szerint van $n - 1$ gyöke. Ezzel a tételt beláttuk. $\square$

Hasonló gondolatmenettel beláthatunk további eredményeket is. Legyen

$$\bar{B}^2 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$$

a két-dimenziós zárt egységkörlemez.

TÉTEL 2.45 (Brouwer-féle fixponttétel). *Minden folytonos $h : \bar{B}^2 \rightarrow \bar{B}^2$ leképezésnek létezik legalább egy fixpontja (azaz olyan $z \in \bar{B}^2$, amelyre $h(z) = z$).*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy minden $z \in \bar{B}^2$ -re $h(z) \neq z$, és legyen

$$f : \bar{B}^2 \rightarrow S^1$$

az a leképezés, amely egy $z \in \bar{B}^2$ ponthoz hozzárendeli a $h(z)$ alappontból a z ponton keresztül fektetett félegyenes S^1 -gyel való metszéspontját. Mivel $h(z) \neq z$, ez jól értelmezett. Belátjuk, hogy ekkor f folytonos. Ehhez rögzítsünk tetszőlegesen egy $z_0 \in \bar{B}^2$ pontot és egy $\varepsilon > 0$ értéket. Mutatnunk kell z_0 -nak egy olyan V környezetét, amely teljesíti, hogy minden $z \in V$ esetén $f(z)$ az S^1 körvonalnak az $f(z_0)$ középpontú, ε nyílásszögű U_ε körívén helyezkedik el. Legyen y tetszőleges pontja a

$z_0 h(z_0)$ intervallumnak, és kössük össze y -t U_ε mindkét végpontjával. Ezek az egyenesek meghatároznak két y csúcspontú nyílt szögtartományt: azt a V_0 szögtartományt, amelyikben U_ε és z_0 található, és a vele szemközti V_1 szögtartományt, amelyikben $h(z_0)$ található. A h leképezés folytonossága miatt létezik z_0 -nak egy olyan V_2 nyílt környezete, amelyre

$$h(V_2) \subseteq V_1.$$

Ekkor, minden $x \in V_0 \cap V_2$ esetén könnyen látszik, hogy az $xh(x)$ egyenes az S^1 körvonalat U_ε -ban metszi. Ezzel beláttuk f folytonosságát.

Továbbá, nyilván minden $z \in S^1$ -re $f(z) = z$ (azaz f egy retrakciója $\bar{B}^2$ -nek S^1 -re). Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen: valóban, tekintsünk egy tetszőleges $[g] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbf{Z}$ nemtriviális elemet, ekkor (mivel $\bar{B}^2$ konvex, többek közt egyszeresen összefüggő, azért) g a triviális hurokkal út-homotóp $\bar{B}^2$ -ben valamely

$$G : I \times I \rightarrow \bar{B}^2$$

út-homotópia segítségével; ekkor azonban $f \circ G$ út-homotópia lenne S^1 -ben $f \circ g = g$ és a triviális hurok között, ami ellentmond annak, hogy $[g] \neq 0 \in \mathbf{Z}$. Ezért az alapfeltevésünk — miszerint minden $z \in \bar{B}^2$ -re $h(z) \neq z$ — nem teljesülhet. $\square$

TÉTEL 2.46 (Borsuk–Ulam). *Minden $f : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ folytonos leképezésre létezik olyan $x \in S^2$, amelyre $f(-x) = f(x)$.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy nem létezik egyetlen ilyen pont sem, és értelmezzük a

$$G : S^2 \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

folytonos leképezést. Szokás szerint, paraméterezzük $z \in \mathbf{C}$ -vel az $x_3 = 0$ síkot (és azon belül S^1 -et), és $|z| = 1$ esetén legyen $z = e^{2i\pi\theta}$. Ekkor $-z = \exp(2i\pi(\theta + \frac{1}{2}))$. Jelöljük g -vel G megszorítását S^2 -nek az $x_3 = 0$ egyenlítőjére:

$$g : I \rightarrow S^1$$

$$\theta \mapsto G(e^{2i\pi\theta}, 0).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $g(0) = 1$. Könnyen látható G definíciójából, hogy ekkor

$$g\left(\theta + \frac{1}{2}\right) = -g(\theta).$$

Ebből $\theta = 0$ és $\theta = \frac{1}{2}$ helyettesítésekkel az következik, hogy

$$g(1) = -g\left(\frac{1}{2}\right) = g(0),$$

azaz g hurok. Legyen most $\tilde{g}$ a g hurok felemeltje $\mathbf{R}$ -re 0 kezdőponttal, tehát $\phi([g]) = \tilde{g}(1) \in \mathbf{Z}$. A fenti képlet miatt

$$\tilde{g}\left(\theta + \frac{1}{2}\right) = \tilde{g}(\theta) + \frac{n}{2}$$

valamely $n \in \mathbf{Z}$ páratlan számra. Mivel $\tilde{g}$ folytonos és I összefüggő, azért n értéke független θ -tól. Így tehát

$$\tilde{g}(1) = \tilde{g}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{n}{2} = \tilde{g}(0) + n = n;$$

többek közt $\phi([g]) \neq 0 \in \mathbf{Z}$, mivel n páratlan.

Másrészt viszont, legyen

$$S_+^2 = \{x \in S^2 \mid x_3 \geq 0\},$$

amely homeomorf $\bar{B}^2$ -vel, így egyszeresen összefüggő, és legyen

$$i : S^1 \rightarrow S_+^2$$

a természetes beágyazás. Ekkor

$$g = G|_{S_+^2} \circ i,$$

tehát a g által meghatározott hurok benne van a

$$(G|_{S_+^2})_* : \pi_1(S_+^2, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$$

leképezés képében, amely triviális. Ez ellentmond az előző bekezdés végkövetkeztetésének. $\square$

FELADAT 2.47. Legyenek $A, B \subset \mathbf{R}^2$ korlátos, Lebesgue-mérhető halmazok. Bizonyítsuk be, hogy létezik legalább egy olyan $e \subset \mathbf{R}^2$ egyenes, amely A -t és B -t is két egyenlő területű részre osztja!

2.2.3. Fedőterek. Az előző szakaszban megadtunk néhány olyan fogalmat és eredményt, amelyek általánosabban is érdekesek és a továbbiakban hasznosak lesznek. Ezeket foglaljuk össze ebben a szakaszban.

DEFINÍCIÓ 2.48. Legyen $p : E \rightarrow B$ egy folytonos szürjektív leképezés. Azt mondjuk, hogy p B egy *fedőleképezése*, ha minden $b \in B$ -nek létezik olyan környezete, amelyet p egyenletesen fed. Ekkor E -t B egy *fedőterének* hívjuk.

Könnyen látható, hogy ekkor a p által értelmezett hányados-topológia B -n megegyezik B eredeti topológiájával.

- PÉLDA 2.49.**
- (i) Az $\text{Id} : X \rightarrow X$ identikus leképezés minden X térnek fedőleképezése.
 - (ii) Ha Y egy diszkrét tér, akkor a $v_1 : X \times Y \rightarrow X$ első koordinátára való vetítés minden X térnek fedőleképezése. Ekkor az $X \times Y$ nem összefüggő, hanem minden összefüggő komponense homeomorf X -szel. A továbbiakban legtöbbször összefüggő fedéseket fogunk tekinteni.

- (iii) A 2.33 Állítás értelmében (2.1) fedőleképezése S^1 -nek.
 (iv) Hasonlóan az előbbihez, a

$$q : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^* \\ z \mapsto \exp(2i\pi z)$$

fedőleképezése $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ -nak. Minden $w \in \mathbf{C}^*$ -nek végtelen sok ősképe van, amelyek egy egész számmal való eltolásban különböznek egymástól. Ez a fedőleképezés a komplex analízisben a *logaritmus függvény Riemann-felületeként* ismert.

- (v) Minden $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ -ra a

$$q_n : S^1 \rightarrow S^1 \\ z \mapsto z^n$$

fedőleképezése S^1 -nek. Valóban, ha $z = \exp(2\pi x) \in S^1$ és $\varepsilon < 1/2$, akkor az $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ ősképe felbomlik a

$$V_i = \left] \frac{x + i - \varepsilon}{|n|}, \frac{x + i + \varepsilon}{|n|} \right[$$

nyílt intervallumok diszjunkt egyesítésére, ahol $i \in \{0, \dots, |n| - 1\}$.

- (vi) Hasonlóan az előbbihez, minden $n \in \mathbf{N}$ -re a

$$q_n : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}^* \\ z \mapsto z^n$$

fedőleképezése $\mathbf{C}^*$ -nak. Ez a fedőleképezés a komplex analízisben az *n-edik gyök függvény Riemann-felületeként* ismert.

- (vii) Minden $n \geq 1$ -re $S^n \rightarrow \mathbf{RP}^n$ 2-rétű fedés.

FELADAT 2.50. Határozzuk meg a (v) Példabeli q_n által $\pi_1(S^1, 1)$ -en indukált homomorfizmust!

FELADAT 2.51. Bizonyítsuk be, hogy ha B összefüggő és $p : E \rightarrow B$ egy fedőleképezése amelyre valamely $b_0 \in B$ -nek n ősképe van p -re vonatkozóan, akkor ez minden $b \in B$ -re teljesül. Ekkor p -t *n-rétű fedőleképezésnek* nevezzük.

A feladatból többek között következik, hogy ha valamely b_0 -nak végtelen sok ősképe van, akkor ez minden $b \in B$ -re is teljesül.

ÁLLÍTÁS 2.52. Ha $p_1 : E_1 \rightarrow B_1$ és $p_2 : E_2 \rightarrow B_2$ fedőleképezések, akkor $(p_1, p_2) : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ is az.

BIZONYÍTÁS. Legyen $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ tetszőleges. Ekkor léteznek olyan U_j nyílt környezetei b_j -nek B_j -ben $j = 1, 2$ -re, amelyeket p_j egyenletesen fed. Ekkor az $U_1 \times U_2$ -t (p_1, p_2) egyenletesen fedi. $\square$

PÉLDA 2.53. A (2.1) kétszeres saját magával vett szorzata

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (q_1, q_2) : \mathbf{R}^2 &\rightarrow T^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\exp(2i\pi x_1), \exp(2i\pi x_2)) \end{aligned}$$

fedőleképezése a $T^2 = S^1 \times S^1$ két-dimenziós tórusznak. Ezt a fedőleképezést már láttuk, amikor T^2 -t mint $\mathbf{R}^2$ -nek hányadosát írtuk le. Hasonlóképpen

$$(2.5) \quad \begin{aligned} (q_1, \dots, q_n) : \mathbf{R}^n &\rightarrow T^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\exp(2i\pi x_1), \dots, \exp(2i\pi x_n)) \end{aligned}$$

fedőleképezése a $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ n -dimenziós tórusznak.

A következő állítások bizonyítása szóról szóra átvihető az 2.35 és 2.37 Állításokéból, ha S^1 -et B -vel, $\mathbf{R}$ -et E -vel és q -t p -vel helyettesítjük.

TÉTEL 2.54. Legyen $p : E \rightarrow B$ egy fedőleképezés, $f : I \rightarrow B$ tetszőleges folytonos leképezés, $b_0 = f(0)$, és $e_0 \in E$ tetszőleges felemelése b_0 -nak, azaz $p(e_0) = b_0$. Ekkor f -nek létezik egy és csak egy olyan $\tilde{f}$ felemelése E -re, amelyre $\tilde{f}(0) = e_0$.

TÉTEL 2.55. Legyen $p : E \rightarrow B$ egy fedőleképezés, $F : I \times I \rightarrow B$ tetszőleges folytonos leképezés, $b_0 = F(0, 0)$, és $e_0 \in E$ tetszőleges felemelése b_0 -nak. Ekkor F -nek létezik egy és csak egy olyan $\tilde{F}$ felemelése E -re, amelyre $\tilde{F}(0) = e_0$. Továbbá, ha F út-homotópia, akkor $\tilde{F}$ is az.

Ezek segítségével a 2.38 Tételnek megadhatjuk egy általánosítását. Legyen $p : E \rightarrow B$ egy fedőleképezés és $b_0 \in B$ továbbá $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ tetszőlegesek. Minden B -beli b_0 -kezdőpontú f hurok $[f] \in \pi_1(B, b_0)$ osztályához tekintsük azt a $e \in p^{-1}(b_0)$ elemet, amely az f -nek az e_0 -ban kezdődő $\tilde{f}$ felemelésének a végpontja. Hasonlóan a kör esetéhez, a 2.55 Állítás miatt ez az eljárás meghatároz egy jól értelmezett

$$(2.6) \quad \phi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

leképezést, amely $[f]$ -hez $e = \tilde{f}(1)$ -et rendeli.

Innentől kezdve feltesszük, hogy a B alaptér és E (és később az E') fedőtér ívszerűen összefüggő Hausdorff-terek, sőt azt is hogy lokálisan ívszerűen összefüggők (ld. 1.95 Definíció). Használjuk még a következő elnevezést.

DEFINÍCIÓ 2.56. Egy olyan $p : E \rightarrow B$ fedőleképezést, amelyre E egyszerűen összefüggő, B univerzális fedőleképezésének nevezzük. Azt is mondjuk, hogy E univerzális fedőtere B -nek.

TÉTEL 2.57. A fenti jelölésekkel a

$$\phi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$$

szürjektív leképezés, amelyre $\phi_{e_0}(1) = e_0$. Ha E univerzális fedőtere B -nek, akkor ϕ_{e_0} bijektív.

BIZONYÍTÁS. Legyen $e \in p^{-1}(b_0)$ tetszőleges. Mivel E ívszerűen összefüggő, ezért létezik egy $\tilde{f}$ út E -ben e_0 -ból e -be. Ennek p általi $p \circ \tilde{f}$ képe egy b_0 -beli hurok B -ben. Nyilvánvaló, hogy f -nek az e_0 kezdőpontú felemelése E -re éppen $\tilde{f}$, aminek végpontja pedig e . Ezért $\phi_{e_0}([f]) = e$, tehát ϕ szürjektív. Ha $e = e_0$, akkor $\tilde{f}$ -nek választhatjuk az azonosan e_0 leképezést, amelynek p -vel vett vetítése az e_{b_0} azonosan b_0 hurok lesz, ami nyilván $1 \in \pi_1(B, b_0)$ egy reprezentánsa.

Lássuk be, hogy ha E egyszeresen összefüggő, akkor ϕ injektív is. Ez ismét hasonló a kör esetéhez. Tegyük fel, hogy $[f]$ és $[g]$ olyan osztályok $\pi_1(B, b_0)$ -ban valamely b_0 -kezdőpontú f és g hurkokra, amelyekre $\phi_{e_0}([f]) = \phi_{e_0}([g])$. Legyen $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ az e_0 -beli kezdőpontú felemelése f -nek és g -nek; ekkor ϕ_{e_0} definíciója szerint $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Mivel E egyszeresen összefüggő, ezért a 2.21 Állítás értelmében $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ út-homotópok: legyen $\tilde{F}$ egy út-homotópia közöttük. Ekkor az $F = p \circ \tilde{F}$ nyilván út-homotópia f és g között. $\square$

Az eddigiekből levonhatjuk a szakasz utolsó fundamentális csoportra vonatkozó eredményét.

KÖVETKEZMÉNY 2.58. *A T^n n -dimenziós tórusz fundamentális csoportja izomorf $\mathbf{Z}^n$ -nel.*

MEGJEGYZÉS 2.59. Mivel $\mathbf{Z}^n$ Abel-csoport, ezért a 2.17 Megjegyzés miatt az állítás tetszőleges alappontra igaz.

BIZONYÍTÁS. Láttuk a 2.53 Példában, hogy T^n -nek $\mathbf{R}^n$ univerzális fedőtere. Legyen $0 = (0, \dots, 0) \in T^n$. Ekkor $(q_1, \dots, q_n)^{-1}(0) = \mathbf{Z}^n$, az egész koordinátájú pontok halmaza $\mathbf{R}^n$ -ben. A 2.57 Tétel miatt ϕ egy bijekció $\pi_1(T^n, 0)$ és $\mathbf{Z}^n$ között. Annak a bizonyítása, hogy ϕ csoport-homomorfizmus, analóg a kör esetével, ld. a 2.38 Tétel bizonyítását. $\square$

A 2.57 Tétel alkalmazhatóságát korlátozza, hogy nem minden térnek van univerzális fedőtere. Amennyiben van, akkor viszont egyértelműen meghatározott:

ÁLLÍTÁS 2.60. *Legyen B egy tér, (E, p) egy univerzális fedőtere, és (E', p') egy tetszőleges fedőtere. Feltesszük, hogy E, E' ívszerűen összefüggők. Legyen továbbá $b_0 \in B$ tetszőleges, és $e_0 \in E$, $e'_0 \in E'$ tetszőleges felemelései. Ekkor létezik pontosan egy olyan*

$$h : E \rightarrow E'$$

folytonos leképezés, amelyre $h(e_0) = e'_0$ és $p = p' \circ h$. Többek között, ha E' is univerzális fedőtér, akkor E és E' homeomorfak.

BIZONYÍTÁS. Legyen $e \in E$ tetszőleges. Mivel E ívszerűen összefüggő, létezik egy f út E -ben e_0 -ból e -be. Tekintsük a $p \circ f$ utat B -ben b_0 -ból $p(e)$ -be. A 2.54 Állítást alkalmazva az (E', p') fedőtérre, kapunk $p(f)$ -nek egy (és csak egy) olyan f' felemelését E' -re, amelyre $f'(0) = e'_0$.

Ekkor az $f'(1) \in E'$ pont független az f út választásától: valóban, ha g egy másik út E -ben e_0 -ból e -be, akkor mivel E egyszeresen összefüggő, a 2.21 Állítás miatt f és g út-homotópok E -ben, tehát nyilván a $p \circ f$ és $p \circ g$ utak is út-homotópok B -ben, és ekkor a 2.55 Állítás értelmében az f' és g' utak is út-homotópok E' -ben, többek között végpontjaik megegyeznek. Értelmezhetjük tehát $h(e)$ -t $f'(1)$ -nek; ekkor a h függvény jól értelmezett.

Ha $e = e_0$, akkor választhatjuk f -et az azonosan e_0 útnak, tehát $p(f)$ is az azonosan b_0 út, és nyilván f' az azonosan e'_0 út lesz; tehát $h(e_0) = e'_0$. Az, hogy $p = p' \circ h$ teljesül, szintén nyilvánvaló h konstrukciójából:

$$p(e) = p(f(1)) = p'(f'(1)) = p'(h(e)),$$

mivel f' a $p \circ f$ egy felemeltje.

Lássuk most be, hogy h folytonos: ehhez elég belátni, hogy tetszőleges $e \in E$ pontban folytonos. Legyen $V' \subset E'$ egy nyílt környezete $e' = h(e)$ -nek. Mivel B lokálisan ívszerűen összefüggő, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy V' ívszerűen összefüggő, továbbá hogy p és p' egyenletesen fedi $p'(V')$ -t. (Miért?) Többek között, $p'(V')$ nyílt B -ben és

$$p^{-1}(p'(V')) = \coprod_{i \in I} U_i$$

valamely I indexhalmazra, ahol $p|_{U_i} : U_i \rightarrow p'(V')$ homeomorfizmus. Legyen $i_0 \in I$ az az index amelyre $e \in U_{i_0}$. Ekkor U_{i_0} is ívszerűen összefüggő, tehát minden $e' \in U_{i_0}$ pontot összeköthetünk e -vel egy U_{i_0} -beli g úttal. Ekkor az $f * g$ út összeköti E -ben e_0 -t e' -vel, valamint $p \circ (f * g) = p \circ f * p \circ g$ -ből a $p \circ g$ teljesen $p'(V')$ -ben fekszik. Mivel p' egyenletesen fedi $p'(V')$ -t ezért a $p \circ f * p \circ g$ e'_0 -kezdőpontú felemeltjének $p \circ g$ része is teljesen V' -ben fekszik. Látjuk tehát, hogy ha U_{i_0} egy olyan komponens, amelynek valamely pontját h V' -be képezi, akkor h a teljes komponens V' -be képezi. Tehát létezik olyan $J \subset I$, amelyre

$$h^{-1}(V') = \coprod_{j \in J} U_j,$$

ami pedig nyílt.

Ezután lássuk be azt, hogy az így szerkesztett h az egyetlen, a feltételeknek eleget tevő leképezés. Tegyük fel, hogy $\tilde{h}$ is kielégíti a feltételeket. Legyen $e \in E$ tetszőleges és f egy út E -ben e_0 -ból e -be. Ekkor $\tilde{h}(f)$ egy olyan út E' -ben, amelynek kezdőpontja e'_0 , és amelyre minden $t \in [0, 1]$ -re $p'(\tilde{h}(f(t))) = p(f(t))$. Tehát, $\tilde{h}(f)$ felemelése a $p \circ f$ útnak e'_0 kezdőponttal. Mivel a 2.54 Állítás alapján az ilyen felemelés egyértelmű, ezért ez megegyezik f' -vel. Többek között,

$$\tilde{h}(e) = \tilde{h}(f(1)) = f'(1) = h(e).$$

Mivel ez minden $e \in E$ -re teljesül, ezért $\tilde{h} = h$.

Tegyük fel végül, hogy (E', p') is univerzális fedőtér. Alkalmazva a tételt E és E' szerepét megcserélve, létezik egy $h' : E' \rightarrow E$ leképezés is, amelyre $p' = p \circ h'$ és $h'(e'_0) = e_0$. Ekkor a $h' \circ h : E \rightarrow E$ leképezés e_0 -t e_0 -ba viszi, és teljesül rá hogy $p \circ h' \circ h = p$. Ám ugyanez teljesül az $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ identikus leképezésre is. Az unicitás miatt $h' \circ h = \text{Id}_E$, vagyis h bijektív és $h^{-1} = h'$. Mivel h' az eddigiek alapján folytonos, ebből következik, hogy h homeomorfizmus. $\square$

Vizsgáljuk most meg, hogy egy adott térnek milyen tulajdonságú fedőterei lehetnek.

DEFINÍCIÓ 2.61. Legyen $p' : E' \rightarrow B$ egy fedés. Ekkor egy olyan $f : E' \rightarrow E'$ homeomorfizmust, amelyre $p' \circ f = p'$, E' egy *fedő-transzformációjának* nevezzük. Rögzített $E' \rightarrow B$ fedés fedő-transzformációi a kompozícióra nézve csoportot alkotnak, melyet B *fedő-csoportjának* hívunk, és $F(E', B)$ -vel jelölünk. Végül, egy $p' : E' \rightarrow B$ fedést *regulárisnak* mondunk, ha valamely $b_0 \in B$ -re $F(E', B)$ tautologikus hatása $(p')^{-1}(b_0)$ -on tranzitív.

ÁLLÍTÁS 2.62. Ha $F(E', B)$ tranzitívan hat $(p')^{-1}(b_0)$ -on (vagy valamely részhalmazán), akkor egyszerezsen tranzitívan hat rajta.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy az $f \in F(E', B)$ fedő-transzformációra teljesül, hogy $f(e'_0) = e'_0$ valamely $e'_0 \in E'$ -re. Legyen ekkor

$$Z = \{z \in E' : f(z) = z\},$$

ami nyilván egy nemüres halmaz, amely a következő lemma miatt zárt.

LEMMA 2.63. Legyen Y egy Hausdorff-tér, X topologikus tér, $f, g : X \rightarrow Y$ folytonos leképezések. Ekkor a $Z = \{z \in X : f(z) = g(z)\}$ halmaz zárt.

BIZONYÍTÁS. Legyen $z \in X \setminus Z$, azaz $f(z) \neq g(z)$. Mivel Y Hausdorff, ezért léteznek U, V nyílt környezetei rendre $f(z), g(z)$ -nek, amelyekre $U \cap V = \emptyset$. Mivel f, g folytonosak, azért $f^{-1}(U)$ és $g^{-1}(V)$ nyíltak, és nyilván tartalmazzák z -t. Így a metszetük $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ is nyílt X -ben, és belőle minden x pontra $f(x) \in U$ és $g(x) \in V$ áll. Többek között, $f(x) \neq g(x)$, s így $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \setminus Z$. $\square$

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy Z nyílt is, mert ekkor E' összefüggősége miatt $Z = E'$, és így f az E' identitása. Legyen tehát $z \in Z$ tetszőleges és $U \subset B$ olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza $p'(z)$ -t és amelyet p' egyenletesen fed:

$$(p')^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} V_i,$$

ahol $p'|_{V_i}$ homeomorfizmus minden $i \in I$ -re. Ekkor $z \in Z$ miatt $f(z) = z \in V_{i_0}$ pontosan egy $i_0 \in I$ -re teljesül. Mivel f folytonos, ezért létezik olyan $W \subset V_{i_0}$ nyílt halmaz, amelyre teljesül hogy minden $x \in W$ -re

$f(x) \in V_{i_0}$. Ekkor azonban, mivel $p'|_W$ bijektív, ezért minden $x \in W$ -re is teljesül $f(x) = x$, vagyis Z nyílt. $\square$

FELADAT 2.64. Mutassunk példát olyan $p' : E' \rightarrow B$ fedőleképezésre, amelyre B összefüggő de E' nem, és amelyre $F(E', B)$ tranzitívan de nem egyszeresen tranzitívan hat $(p')^{-1}(b_0)$ -on!

ÁLLÍTÁS 2.65. Ha $p : E \rightarrow B$ univerzális fedőleképezés, akkor p reguláris.

BIZONYÍTÁS. Legyenek $e_0, e_1 \in p^{-1}(b_0)$ tetszőleges pontok. Ekkor a 2.60 Állítás alapján ($E' = E$ választással) létezik pontosan egy olyan h leképezés, amelyre $p = p \circ h$ és $h(e_0) = e_1$. Ez a h a keresett fedő-transzformáció. $\square$

A következő eredmény kimondásához bevezetünk néhány jelölést. Legyen $p' : E' \rightarrow B$ egy tetszőleges fedőleképezés és rögzítsünk egy $e'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$ pontot. Ekkor értelmezhető egy

$$(2.7) \quad \iota_{e'_0} : f \in F(E', B) \mapsto f(e'_0) \in (p')^{-1}(b_0)$$

leképezés, amely a 2.62 Állításból következően injektív. Amennyiben $p' : E' \rightarrow B$ reguláris, akkor definíció alapján $\iota_{e'_0}$ szürjektív is. Jelölje továbbá R_g (illetve L_g) a g elemmel vett jobbról (illetve balról) való szorzást $F(E', B)$ -ben; ekkor többek között $R_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ R_g$, a g elemmel való konjugálás.

ÁLLÍTÁS 2.66. Bármely $e'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$ -ra és $\varphi \in F(E', B)$ -re legyen $e'_1 = \varphi(e'_0)$. Egy b_0 -alappotú f hurok esetén jelölje $\tilde{f}$ az e'_0 -kezdőpontú felemeltjét. Végül, legyen

$$\Gamma_{e'_0} = \{[f] \in \pi_1(B, b_0) : \tilde{f}(1) \in \text{Im}(\iota_{e'_0})\}.$$

Ekkor teljesülnek a következők.

- (i) Az $\iota_{e'_0}$ leképezés ekvivariáns az $F(E', B)$ hatására saját magán az L balról való eltolással és $(p')^{-1}(b_0)$ -n a tautologikus hatásával: minden $f_2 \in F(E', B)$ -re

$$\iota_{e'_0} \circ L_{f_2} = f_2 \circ \iota_{e'_0}.$$

(ii)

$$\iota_{e'_1}(f) = \iota_{e'_0} \circ R_\varphi(f),$$

többek között

$$\iota_{e'_1}^{-1} = R_{\varphi^{-1}} \circ \iota_{e'_0}^{-1}.$$

- (iii) A (2.6)-ban értelmezett $\phi_{e'_0}$ leképezésre

$$\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0} : \Gamma_{e'_0} \rightarrow F(E', B)$$

szürjektív csoport-homomorfizmus. Többek között, ha p' reguláris, akkor

$$\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0} : \pi_1(B, b_0) \rightarrow F(E', B)$$

szürjektív csoport-homomorfizmus.

(iv) *A (iii) pont homomorfizmusa konjugálás erejéig jól meghatározott:*

$$\iota_{e'_1}^{-1} \circ \phi_{e'_1} = \varphi(\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0})\varphi^{-1}.$$

BIZONYÍTÁS. (i) Bármely $f_1 \in F(E', B)$ esetén

$$\iota_{e'_0} \circ L_{f_2}(f_1) = \iota_{e'_0}(f_2 \circ f_1) = f_2 \circ f_1(e'_0) = f_2(\iota_{e'_0}(f_1)).$$

(ii) Definíció szerint bármely $f \in F(E', B)$ -re

$$\begin{aligned} \iota_{e'_1}(f) &= f(e'_1) \\ &= f(\varphi(e'_0)) \\ &= f \circ \varphi(e'_0) \\ &= \iota_{e'_0}(f \circ \varphi), \end{aligned}$$

ami bizonyítja az első azonosságot. A második azonosságot ebből invertálással kapjuk.

(iii) A leképezés $\Gamma_{e'_0}$ értelmezési tartománya nyilván a lehető legbővebb.

LEMMA 2.67. *Ha p' reguláris fedőleképezés, akkor*

$$\Gamma_{e'_0} = \pi_1(B, b_0).$$

BIZONYÍTÁS. A definíciókból azonnal következik. $\square$

Az alábbiakban feltesszük, hogy $[g], [h], \dots \in \Gamma_{e'_0}$. Az egységelem-tartás azonnal következik a konstrukcióból: az e_{b_0} állandó b_0 hurok e'_0 kezdőpontú felemeltje az $e_{e'_0}$ állandó e'_0 hurok, amelynek végpontja e'_0 , tehát (az egyszeres tranzitivitás miatt) $\iota_{e'_0}$ az identikus fedő-transzformációnak felelteti meg.

A szorzat-tartás analóg a 2.38 Tétel homomorfizmus-részével. Legyenek $[g], [h] \in \pi_1(B, b_0)$ és $\tilde{g}, \tilde{h}$ a $g, h : I \rightarrow B$ leképezések azon felemeltjei E' -re, amelyre $\tilde{g}(0) = e'_0 = \tilde{h}(0)$. Ekkor $\phi_{e'_0}$ definíciója miatt $\phi_{e'_0}([g]) = \tilde{g}(1) \in (p')^{-1}(b_0)$ és $\phi_{e'_0}([h]) = \tilde{h}(1) \in (p')^{-1}(b_0)$; egyszerűség kedvéért jelöljük ezen pontokat rendre e'_1, e'_2 -vel. Legyenek továbbá $\varphi, \psi \in F(E', B)$ azok a fedő-transzformációk, amelyekre $\varphi(e'_0) = e'_1, \psi(e'_0) = e'_2$. Ekkor definíció szerint $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}([g]) = \varphi$ és $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}([h]) = \psi$ állnak. Azt kell tehát belátnunk, hogy

$$(2.8) \quad \iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}([g][h]) = \varphi\psi.$$

Legyen ehhez $\tilde{\tilde{h}}$ a $h : I \rightarrow B$ leképezés azon felemeltje E' -re, amelyre $\tilde{\tilde{h}}(0) = e'_1$. Ekkor $\tilde{g} * \tilde{\tilde{h}}$ a $g * h$ leképezés azon felemeltje E' -re, amelyre $\tilde{g} * \tilde{\tilde{h}}(0) = e'_0$. Másrészt, mivel φ fedőtranszformáció azért $\varphi \circ \tilde{\tilde{h}}$ is

olyan felemeltje h -nak, amely kezdőpontja e'_1 . Az adott kezdőpontú út-felemelés egyértelműsége miatt ezért

$$\tilde{\tilde{h}} = \varphi \circ \tilde{h}.$$

Tehát,

$$\begin{aligned} \phi_{e'_0}([g][h]) &= \phi_{e'_0}([g * h]) \\ &= \tilde{g} * \tilde{\tilde{h}}(1) \\ &= \varphi \circ \tilde{h}(1) \\ &= \varphi(e'_2) \\ &= \varphi(\psi(e'_0)) \\ &= \varphi \circ \psi(e'_0), \end{aligned}$$

azaz $\varphi \circ \psi$ az a fedő-transzformáció, amely e'_0 -t $\phi_{e'_0}([g][h])$ -ba viszi, ami éppen (2.8).

A szűrjektivitáshoz legyen $\psi \in F(E', B)$. Legyen $\tilde{f}$ egy e'_0 -t $\psi(e'_0)$ -vel összekötő út E' -ben, $f = p' \circ \tilde{f}$. Ekkor $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}([f]) = \psi$.

(iv) Bármely $e'_1 \in (p')^{-1}(b_0)$ esetén jelöljük $\tilde{g}$ -vel g felemeltjét E' -re e'_1 kezdőponttal. Láttuk, hogy

$$\tilde{\tilde{g}} = \varphi \circ \tilde{g},$$

többek közt,

$$(2.9) \quad \phi_{e'_1}([g]) = \varphi(\phi_{e'_0}([g])).$$

Ebből és a (ii) pontból következik, hogy minden $[g] \in \pi_1(B, b_0)$ -ra

$$\iota_{e'_1}^{-1} \circ \phi_{e'_1}([g]) = R_{\varphi^{-1}} \circ \iota_{e'_0}^{-1} \circ \varphi \circ \phi_{e'_0}([g]).$$

Mivel $\iota_{e'_0}$ ekvivariáns az L -hatásra (ld. (i) pont), ezért e képletben felcserélhetjük $\iota_{e'_0}^{-1}$ -t és φ -t:

$$\iota_{e'_1}^{-1} \circ \phi_{e'_1}([g]) = R_{\varphi^{-1}} \circ L_{\varphi} \circ \iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}([g]),$$

és a bizonyítás kész. $\square$

A 2.66 Állítás (iii) pontja miatt értelmes tehát $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}$ magjáról beszélni a $\Gamma_{e'_0}$ részcsoporthoz. Továbbá, a 2.66 Állítás (iv) pontja értelmében ez e'_0 választásától független.

ÁLLÍTÁS 2.68. *Ha $p' : E' \rightarrow B$ egy tetszőleges fedőleképezés, akkor létezik egy természetes*

$$\text{Ker}(\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(E', e'_0)$$

izomorfizmus, amely definiál egy

$$(2.10) \quad 1 \rightarrow \pi_1(E', e'_0) \xrightarrow{p'_*} \Gamma_{e'_0} \xrightarrow{\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}} F(E', B) \rightarrow 1$$

csoport-bővítést. Többek között,

- (i) $\pi_1(E', e'_0)$ normálosztó $\Gamma_{e'_0}$ -ban;
- (ii) ha p' reguláris, akkor a fenti bővítés:

$$1 \rightarrow \pi_1(E', e'_0) \xrightarrow{p'_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}} F(E', B) \rightarrow 1.$$

- (iii) ha $p : E \rightarrow B$ egy univerzális fedőleképezés, akkor

$$\iota_{e_0}^{-1} \circ \phi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \rightarrow F(E, B)$$

bijektív.

BIZONYÍTÁS. Egy $[g] \in \pi_1(B, b_0)$ osztályra $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}$ definíciója alapján $[g] \in \text{Ker}(\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0})$ akkor és csak akkor áll, ha $g : I \rightarrow B$ -nek egyetlen e'_0 kezdőpontú $\tilde{g} : I \rightarrow E'$ felemeltjére $\tilde{g}(1) = e'_0$. Azaz, minden $[g] \in \text{Ker}(\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0})$ esetén $\tilde{g}$ megad egy e'_0 kezdőpontú hurkot E' -ben. Ha h egy g -vel út-homotóp hurok B -ben, akkor a 2.55 Tétel miatt $\tilde{h}$ is út-homotóp $\tilde{g}$ -vel E' -ben; tehát kapunk egy jól-értelmezett

$$\text{Ker}(\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}) \rightarrow \pi_1(E', e'_0)$$

leképezést. Ez nyilván egy csoport-homomorfizmus, mert mindkét csoportban a hurkok összefűzése a művelet. Tetszőleges e'_0 kezdőpontú $\gamma : I \rightarrow E'$ hurokra nyilván $p' \circ \gamma$ egy b_0 kezdőpontú hurok B -ben, amelynek e'_0 kezdőpontú felemelése γ , így $\phi_{e'_0}([p' \circ \gamma]) = e'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$, azaz $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}([p' \circ \gamma]) = 1 \in F(E', B)$, tehát a fenti leképezés szürjektív $([p' \circ \gamma] \mapsto [\gamma])$. Az injektivitás triviális: ha adott egy $g : I \rightarrow B$ hurok amelynek e'_0 kezdőpontú $\tilde{g}$ felemeltje út-homotóp az állandó $e_{e'_0}$ leképezéssel E' -ben valamely F út-homotópia által, akkor nyilván $p' \circ F$ út-homotópia g és az állandó e_{b_0} hurok között.

Az előző bekezdés szerint $\pi_1(B, b_0)$ tehát előáll, mint $F(E', B)$ bővítése a $\pi_1(E', e'_0)$ csoporttal. Mivel a fenti gondolatmenetben a $[\gamma] \in \pi_1(E', e'_0)$ hurok képe $\pi_1(B, b_0)$ -ben a $[p' \circ \gamma]$ volt, következik hogy a (2.10) egzakt sorozatban az első leképezés p'_* .

Ha E' reguláris, akkor az állítás következik a 2.67 Lemmából, ha pedig E univerzális, akkor a reguláris esetből, mivel $\pi_1(E, e_0) = 1$. $\square$

Ezzel elérkeztünk a fedés-elmélet Galois-tételéhez:

TÉTEL 2.69. Legyen B egy ívszerűen összefüggő és lokálisan ívszerűen összefüggő Hausdorff topologikus tér és E egy ugyanilyen tulajdonságú univerzális fedőtere, valamint $b_0 \in B$ tetszőleges. Ekkor létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a következő halmazok között:

- (i) $p' : E' \rightarrow B$ fedések izomorfizmus-osztályai;
- (ii) $H \subseteq \pi_1(B, b_0)$ részcsoportok.

Továbbá, ennél a bijekciónál a reguláris fedések az $N \triangleleft \pi_1(B, b_0)$ normálosztóknak felelnek meg.

MEGJEGYZÉS 2.70. Nem adtunk feltételt arra, hogy mikor létezik univerzális fedőtér.

BIZONYÍTÁS. Tetszőleges $p' : E' \rightarrow B$ fedésre és $e'_0 \in (p')^{-1}(b_0)$ elemre a

$$p'_* : \pi_1(E', e'_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

homomorfizmus injektív: valóban, ha valamely $\gamma : I \rightarrow E'$ hurokra $p' \circ \gamma$ út-homotóp az azonosan b_0 hurokkal, akkor a 2.55 Állítás értelmében γ is út-homotóp az azonosan e'_0 hurokkal, tehát $[\gamma] = 1 \in \pi_1(E', e'_0)$. Ezért $\pi_1(E', e'_0)$ tekinthető úgy, mint $\pi_1(B, b_0)$ egy részcsoportha. Továbbá, ha p' reguláris fedőleképezés, akkor a 2.68 Állítás (i) része megad egy (2.10) csoportbővítést, tehát $\pi_1(E', e'_0)$ normálosztó $\pi_1(B, b_0)$ -ban. A 2.66 Állítás (iv) része miatt ráadásul rögzített $b_0 \in B$ esetén $\text{Ker}(\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}) \triangleleft \pi_1(B, b_0)$ független e'_0 választásától, mert a $\iota_{e'_0}^{-1} \circ \phi_{e'_0}$ leképezés egy konjugálás erejéig függ e'_0 -tól. Amennyiben $p'' : E'' \rightarrow B$ izomorf fedőtér E' -vel (azaz létezik egy $h : E' \rightarrow E''$ homeomorfizmus, amelyre $p' = p'' \circ h$), akkor

$$p'_* = p''_* \circ h_*,$$

és mivel

$$h_* : \pi_1(E', e'_0) \rightarrow \pi_1(E'', e''_0)$$

izomorfizmus, azért p'_* és p''_* képe megegyeznek $\pi_1(B, b_0)$ -ban.

Be kell látnunk az ellenkező irányt is: tegyük fel, hogy adott egy $H \subseteq \pi_1(B, b_0)$ részcsoporth, és szerkesszünk hozzá egy $p^H : E^H \rightarrow B$ fedést! Ehhez vegyük észre, hogy a 2.68 Állítás (iii) része valamint a 2.65 Állítás miatt $\pi_1(B, b_0)$ tranzitívan hat E -n, B hányadossal. Tehát H definiál egy $\sim_H$ relációt E -n a következőképpen:

$$e \sim_H e' \Leftrightarrow e' = h \cdot e \quad \text{valamely } h \in H\text{-ra.}$$

Ez egy ekvivalencia-reláció, mivel H csoport. Legyen most

$$E^H = E / \sim_H,$$

és jelöljük egy $e \in E$ elem E^H -beli osztályát $[e]^{\sim_H}$ -val. Ekkor léteznek tautologikus

$$q^H : E \rightarrow E^H, \quad p^H : E^H \rightarrow B$$

leképezések. Könnyen látszik, hogy q^H, p^H fedőleképezések: ha p egyenletesen fed valamely $U \subset B$ nyílt halmazt, akkor p^H is egyenletesen fedi U -t, és q^H egyenletesen fedi $(p^H)^{-1}(U)$ -t.

Lássuk most be, hogy ha $H = N \triangleleft \pi_1(B, b_0)$ normálosztó, akkor a fent megadott p^N reguláris fedőleképezés: legyenek $e'_0 = [e_0]^{\sim_N}, e'_1 = [e_1]^{\sim_N}$ tetszőleges olyan pontok E' -ben, amelyekre $p^N(e'_0) = p^N(e'_1)$, azaz $p(e_0) = p(e_1)$. Mivel p reguláris, azért létezik egyetlen olyan $\varphi \in F(E, B)$, amelyre $\varphi(e_0) = e_1$. Legyen ekkor minden $e \in E$ -re

$$\varphi'([e]^{\sim_N}) = [\varphi(e)]^{\sim_N} \in E'.$$

Ez jól értelmezett, mert mivel N normálosztó, azért minden $n \in N$ -re létezik olyan $n' \in N$, amellyel

$$\varphi(ne) = (\varphi \circ n)(e) = (n' \circ \varphi)(e) = n'(\varphi(e)),$$

és így

$$\varphi(ne) \sim_N \varphi(e).$$

Nyilván ekkor φ' egy fedő-transzformációja p^N -nek, amelyre továbbá

$$\varphi'(e'_0) = \varphi'([e_0]^{\sim N}) = [\varphi(e_0)]^{\sim N} = [e_1]^{\sim N} = e'_1.$$

Lássuk be végül, hogy a két konstrukció egymás inverze. Elsőként lássuk be, hogy E^H -hoz a megfeleltetés a $H \subseteq \pi_1(B, b_0)$ részcsoporthoz rendeli. A 2.65 Állítás miatt q^H reguláris fedőleképezés, ezért a 2.68 Állítás (iii) része szerint

$$\pi_1(E', e'_0) \cong F(E, E')$$

teljesül. Továbbá, egy $e_0^H = [e_0]^{\sim H} \in E^H$ pont q^H általi ősképe nyilvánvalóan bijekcióban áll az N alaphalmazzal, hiszen $\pi_1(B, b_0)$ hatása B -n a 2.62 Állítás értelmében egyszeresen tranzitív, többek közt semelyik $n \in N \setminus \{1\}$ sem rögzít egyetlen $e \in E$ elemet sem. Alkalmazzuk a 2.57 Tételt a q^H univerzális fedőleképezésre: azt kapjuk, hogy

$$\pi_1(E^H, e_0^H) = H$$

mint halmazok. Az eddigiekből kapjuk, hogy

$$F(E, E^H) = H$$

mint halmazok. Az 2.66 Állítás (iii) részének bizonyításához hasonlóan adódik, hogy ez a bijekció tulajdonképpen egy

$$F(E, E^H) \cong H$$

csoport-izomorfizmus, azaz

$$\pi_1(E^H, e_0^H) \cong H$$

is csoport-izomorfizmus, tehát ez a konstrukció az ellenkező irányú konstrukció inverze.

Végezetül lássuk be, hogy amennyiben B valamely $p' : E' \rightarrow B$ fedőterére és valamely $p'(e'_0) = b_0$ pontokra $\pi_1(E', e'_0) = H \subseteq \pi_1(B, b_0)$, akkor az (E', p') és a fent megszerkesztett (E^H, p^H) fedőterek izomorfak. Ehhez legyen $e_0 \in E$ tetszőleges felemeltje b_0 -nak és tekintsük az $e_0^H = [e_0]^{\sim H}$ alappontját E^H -nak. Ekkor az 2.60 Állítás miatt létezik egy és csak egy olyan

$$h : E \rightarrow E'$$

folytonos leképezés, amelyre $p' \circ h = p$. Legyenek x, y tetszőleges pontok E -ben, amelyekre $p(x) = p(y)$. Vegyük észre, hogy ekkor $h(x) = h(y)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \sim_H y$. Másképpen kifejezve, h keresztül-vezethető egy

$$h^H : E^H \rightarrow E'$$

homeomorfizmuson. Könnyen látszik, hogy $p' \circ h^H = p^H$ áll. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük

□

FELADAT 2.71. Legyenek $q : X \rightarrow Y$ és $r : Y \rightarrow Z$ fedőleképezések, és tegyük fel hogy r véges. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $p = r \circ q : X \rightarrow Z$ is fedőleképezés!

FELADAT 2.72. Legyen $p : E \rightarrow B$ egy véges fedőtere egy kompakt B térnek. Mutassuk meg, hogy ekkor E is kompakt!

FELADAT 2.73. Legyen $p : G \rightarrow H$ egy fedőleképezés, ahol H topologikus csoport. Legyen $e \in H$ az egységelem és $e^* \in p^{-1}(e)$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik pontosan egy csoportstruktúra G -n, amelynek e^* az egységeleme és amelyre p csoport-homomorfizmus!

FELADAT 2.74. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ topologikus terek és $x_j \in X_j$ minden $1 \leq j \leq n$ -re.

- (i) Bizonyítsuk be, hogy az $X = X_1 \times \dots \times X_n$ tér $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ alappontú fundamentális csoportja

$$\pi_1(X_1, x_1) \times \dots \times \pi_1(X_n, x_n)!$$

- (ii) Legyen $f_j : X_j \rightarrow T^m$ egy folytonos leképezés minden $1 \leq j \leq n$ -re, és definiáljuk az

$$f : X \rightarrow T^m \\ (y_1, \dots, y_n) \mapsto f_1(y_1) + \dots + f_n(y_n)$$

leképezést, ahol a jobb oldalon $+$ -on $T^m = (S^1)^m$ természetes csoportműveletét értjük. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(T^m, 0)$$

az a homomorfizmus, amely tetszőleges

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \pi_1(X_1, x_1) \times \dots \times \pi_1(X_n, x_n)$$

elemet a

$$(f_1)_* \alpha_1 + \dots + (f_n)_* \alpha_n \in \mathbf{Z}^m$$

pontba képez!

2.2.4. A gömbök, a projektív terek és a Klein-kancsó fundamentális csoportjai. Először számoljuk ki a gömbök fundamentális csoportjait! Az 1-dimenziós S^1 gömbre már láttuk, hogy $\pi_1(S^1, 1) = \mathbf{Z}$.

LEMMA 2.75 (Seifert–van Kampen). *Legyen X egy topologikus tér, U és V nyílt részhalmazai X -nek, amelyekre $X = U \cup V$ és $U \cap V$ ívszerűen összefüggő. Jelöljük i -vel és j -vel az U és V halmazok beágyazását X -be. Ekkor tetszőleges $x_0 \in U \cap V$ -re $\pi_1(X, x_0)$ -t generálja $i_* \pi_1(U, x_0)$ és $j_* \pi_1(V, x_0)$.*

BIZONYÍTÁS. Azt kell belátnunk, hogy minden x_0 -beli f hurok X -ben út-homotóp valamely $g_1 * g_2 * \dots * g_n$ -nel, ahol minden g_j egy x_0 -beli hurok U -ban vagy V -ben.

Mivel U és V nyíltak X -ben és f folytonos leképezés I -ből X -be, $f^{-1}(U)$ és $f^{-1}(V)$ nyílt fedését adják I -nek. Megmutatjuk, hogy létezik olyan

$$0 = c_0 < c_1 < \dots < c_n = 1$$

beosztás, amelyre minden $0 \leq j < n$ esetén

- $[c_j, c_{j+1}] \subseteq f^{-1}(U)$ és $[c_j, c_{j+1}] \subseteq f^{-1}(V)$ közül legalább az egyik teljesül;
- $c_j \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$.

Valóban, legyen $\varepsilon > 0$ a fedés Lebesgue-száma; ekkor minden ε -nál finomabb

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = 1$$

fedésre az első feltétel definíció szerint teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $[a_0, a_1] \subseteq f^{-1}(U)$. Legyen J_0 a legkisebb olyan J index (amennyiben ilyen létezik), amelyre $[a_J, a_{J+1}] \subseteq f^{-1}(U)$ nem teljesül; amennyiben nincs ilyen J érték, akkor legyen $J_0 = N$. Tegyük ekkor $c_1 = a_{J_0}$ -t: mivel $[a_{J_0}, a_{J_0+1}] \subseteq f^{-1}(U)$ nem teljesül, azért az első tulajdonság értelmében $[a_{J_0}, a_{J_0+1}] \subseteq f^{-1}(V)$ -nek teljesülnie kell, többek közt $a_{J_0} \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. Továbbá, $[0, c_1] \subseteq f^{-1}(U)$ is igaz, mert

$$[0, c_1] = [0, a_1] \cup \dots \cup [a_{J_0-1}, a_{J_0}],$$

ahol a jobb oldalon szereplő intervallumok mindegyike részhalmaza $f^{-1}(U)$ -nak. Legyen most J_1 a legkisebb olyan $J \geq J_0$ index (amennyiben ilyen létezik), amelyre $[a_J, a_{J+1}] \subseteq f^{-1}(V)$ nem teljesül; amennyiben nincs ilyen J érték, akkor legyen $J_1 = N$. Tegyük ekkor $c_2 = a_{J_1}$ -et; és így tovább. Hasonlóan a fenti érveléshez könnyen látható, hogy ezekkel a választásokkal a c_j sorozat mindekét feltételt is teljesíti.

Legyen most f_j az az út X -ben, amelyik az f megszorítása a $[c_{j-1}, c_j]$ szakaszra (a t időkoordináta megfelelő $(c_j - c_{j-1})^{-1}$ -szeres felgyorsításával). Ekkor minden f_j képe vagy U -ban vagy V -ben fekszik. Minden $j \in \{1, \dots, n-1\}$ -re válasszunk egy α_j utat $U \cap V$ -ben $f(c_j)$ -ből x_0 -ba. Ilyen út létezik, mert $U \cap V$ ívszerűen összefüggő. Legyen $g_j = (\alpha_{j-1} * f) * \bar{\alpha}_j$; ekkor g_j egy x_0 -beli hurok U -ban vagy V -ben. Könnyen látszik, hogy

$$[f] = [g_1] \cdots [g_n].$$

□

TÉTEL 2.76. *Bármely $n \geq 2$ -re az S^n gömb egyszeresen összefüggő.*

BIZONYÍTÁS. Legyenek $e = (0, \dots, 0, 1)$ $d = (0, \dots, 0, -1)$ az S^n "északi" és "déli pólusa", $U = S^n \setminus e$ és $V = S^n \setminus d$. Mivel $S^n \setminus (e \cup d)$ ívszerűen összefüggő, alkalmazhatjuk a 2.75 Lemmát. Azt kapjuk, hogy tetszőleges $x_0 \notin \{e, d\}$ -re $\pi_1(S^n, x_0)$ -t generálja $\pi_1(U, x_0)$ és $\pi_1(V, x_0)$

képe. Mivel $\mathbf{R}^n$ egyszeresen összefüggő, elég belátnunk a következő lemmát.

LEMMA 2.77. *Tetszőleges $p \in S^n$ -re az $S^n \setminus \{p\}$ homeomorf $\mathbf{R}^n$ -nel.*

BIZONYÍTÁS. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $p = e$, az északi pólus. Legyen $\tau : S^n \setminus \{e\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ az a leképezés, amelyre

$$\tau(y_1, \dots, y_{n+1}) = \frac{1}{1 - y_{n+1}}(y_1, \dots, y_n).$$

Ennek neve a *sztereografikus vetítés*, és τ a gömböt az északi sarkpontból a $y_{n+1} = 0$ egyenlítőn átmenő hipersíkba vivő lineáris vetítés. Könnyen belátható, hogy τ homeomorfizmus, és inverze $\rho : \mathbf{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{e\}$ az a leképezés, amelyre $t(x_1, \dots, x_n) = \frac{2}{1 + \|x\|^2}$ -tel

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = (t(x)x_1, \dots, t(x)x_n, 1 - t(x)).$$

□

□

A tételből könnyen meghatározhatjuk a projektív terek fundamentális csoportját.

KÖVETKEZMÉNY 2.78. *Minden $n \geq 2$ -re az $\mathbf{RP}^n$ n -dimenziós projektív tér fundamentális csoportja (tetszőleges alapontra) a kételemű $\mathbf{Z}/(2)$ csoport.*

BIZONYÍTÁS. Az $S^n \rightarrow \mathbf{RP}^n$ kanonikus leképezés egy kétrétű fedése $\mathbf{RP}^n$ -nek; valóban, minden $p \in \mathbf{RP}^n$ pont ősképe két átellenes Q és $-Q$ pont S^n -n, és az ezen két pont által meghatározott egyenesre merőleges S hipersík két olyan részre osztja S^n -et, amelyek egyenletesen fedik a képüket. Továbbá, az előző tétel szerint ez a fedés univerzális. A 2.57 Tétel alapján $\pi_1(\mathbf{RP}^n, p)$ kételemű halmaz. Mivel az egyetlen kételemű csoport a $\mathbf{Z}/(2)$, ezért az állítás következik. □

FELADAT 2.79. Mutassunk egy nemtriviális elemet $\pi_1(\mathbf{RP}^2, p)$ -ben!

TÉTEL 2.80. *A K Klein-kancsó fundamentális csoportja az a csoport, amit az A és B elemek generálnak az egyetlen $ABA^{-1}B = 1$ relációval.*

BIZONYÍTÁS. Definíció szerint K a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzet egy hányadosa. Minden $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ -re helyezzük $[0, 1] \times [0, 1]$ egy példányát az $\mathbf{R}^2$ -re úgy, hogy a $(0, 0)$ pont az (n, m) pontba kerüljön. Így “kitapétáztuk” $\mathbf{R}^2$ -t, azaz minden pontját lefedtük $[0, 1] \times [0, 1]$ eltoltjaival. Azon pontok, amelyeknek legalább egy koordinátájuk egész, többszörösen vannak fedve, a többi pont azonban egyszeresen. A tóruszhoz hasonlóan K is megkapható mint $\mathbf{R}^2$ egy hányadosa: pontosan azon (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontokat azonosítva, amelyekre vagy $y_1 - y_2 \in \mathbf{Z}$ és egyúttal $x_1 - x_2 \in 2\mathbf{Z}$, vagy pedig $y_1 + y_2 \in \mathbf{Z}$ és egyúttal $x_1 - x_2 + 1 \in \mathbf{Z}$.

2Z. Hasonlóan a tórusz esetéhez belátható, hogy az $\mathbf{R}^2 \rightarrow K$ leképezés, amely (x, y) -hoz az ekvivalencia-osztályát rendeli, ismét fedőleképezés. Tehát a 2.57 Tétel miatt létezik egy bijekció a $\pi_1(K, (0, 0))$ és $\mathbf{Z}^2$ halmazok között, amely azonban már nem csoport-homomorfizmus. Legyen ugyanis $A \in \pi_1(K, (0, 0))$ a $(0, 0)$ -ból $(1, 0)$ -ba vezető szakasz által generált hurok osztálya, és $B \in \pi_1(K, (0, 0))$ az $(0, 1)$ -ből $(0, 0)$ -ba vezető szakasz által generált hurok osztálya. Ekkor nyilvánvalóan minden $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$ elérhető $(0, 0)$ -ból véges sokszor egymás után alkalmazva A, B, A^{-1}, B^{-1} egyikét; tehát A és B generálja $\pi_1(K, (0, 0))$ -t. Ám, mivel $(0, 1) \sim (1, 0)$ és $(0, 0) \sim (1, 1)$, ezért az $(1, 0)$ -t $(1, 1)$ -gyel összekötő szakasz által generált hurok osztálya B . Ebből következik, hogy a $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 0)$ pontokat egymás után bejáró szakaszonként lineáris hurok osztálya $ABA^{-1}B$. Másrészt ez a hurok úthomotóp az azonosan $(0, 0)$ hurokkal, tehát osztálya az 1. Ebből kapjuk az $ABA^{-1}B = 1$ relációt.

Hátravan annak bizonyítása, hogy ez a reláció generál minden más relációt $\pi_1(K, (0, 0))$ -ban. Legyen

$$H = A^{k_1} B^{l_1} \dots A^{k_N} B^{l_N}$$

valamely $k_1, l_1, \dots, k_N, l_N \in \mathbf{Z}$ -re az egységelem $\pi_1(K, (0, 0))$ -ban. Az $ABA^{-1}B = 1$ reláció segítségével a H szorzatban $A^{k_N} B^{l_N}$ -t lehet helyettesíteni $B^{\pm l_N} A^{k_N}$ -nel. Ezzel H -t $A^{k_1} B^{l_1} \dots B^{l'_{N-1}} A^{k_N}$ alakra hoztuk valamely $l'_{N-1} \in \mathbf{Z}$ -re. Ebből teljes indukcióval látható, hogy H -t $B^n A^m$ alakra hozhatjuk valamely $m, n \in \mathbf{Z}$ -re. Egy ilyen hurok osztálya akkor és csak akkor triviális $\pi_1(K, (0, 0))$ -ban, ha $(0, 0)$ -ból indulva ugyanide tér vissza. Mivel az $B^n A^m$ út $(0, 0)$ -ból $(m, -n)$ -be vezet, ezért $H = 1$ -ből következik hogy $m = n = 0$. Tehát H -t az $ABA^{-1}B = 1$ relációt használva triviális alakra hoztuk, tehát H benne van az $ABA^{-1}B$ által generált normálosztóban, amit be akartunk látni. $\square$

TÉTEL 2.81. Minden $g \geq 2$ -re a Σ_g g nemű felület fundamentális csoportja az a csoport, amelyet az $A_1, B_1, \dots, A_g, B_g$ elemek generálnak, az egyetlen

$$[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = 1$$

definiáló relációval, ahol $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük Σ_g -t mint egy P zárt szabályos $4g$ -szöget, amelynek oldalait a 1.69 (iii) Példa alapján azonosítjuk. Könnyen leellenőrizhető, hogy P minden csúcsa azonosítva van Σ_g -ben; jelöljük Σ_g -nek ezt a pontját p_0 -val. Tehát az $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g, A_g^{-1}, B_g^{-1}$ oldalak mindegyikének képe egy p_0 alappontú hurok lesz Σ_g -ben. A 4.4 Állításban be fogjuk látni, hogy Σ_g univerzális fedőtere a H hiperbolikus sík. Többek közt a 4.6 Következményben be fogjuk látni, hogy a fenti hurkok mindegyike nem-triviális elemet határoz meg $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -ban. Jelöljük ezen hurkok homotópia-osztályait szintén az

$$A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g, A_g^{-1}, B_g^{-1}$$

szimbólumokkal. Azt is látni fogjuk továbbá, hogy ezen elemek generálják $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -t. Lássuk most be, hogy ekkor teljesül $[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = 1$. Ehhez vegyük észre először, hogy P -ben az A_k -val jelölt oldalt végigjárni pozitív irányban (ami $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -ban az A_k hurkot jelenti) Σ_g -ben ugyanazt jelenti, mint az A_k^{-1} -zel jelölt oldalt végigjárni negatív irányban; és hasonlóképpen B_k -ra és B_k^{-1} -re. Ha tehát elindulunk A_1 kezdőpontjából és sorra végigjárjuk P oldalait pozitív irányban, akkor Σ_g -ben az

$$A_1 * B_1 * A_1^{-1} * B_1^{-1} * \cdots * A_g * B_g * A_g^{-1} * B_g^{-1}$$

utat tesszük meg. Ennek az osztálya definíció szerint $[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g]$. Másrészt, ez a hurok triviális Σ_g -ben, mert P -ben is hurok, és P konvex lévén minden hurok null-homotóp benne, és egy null-homotópia $\sim$ általi képe is null-homotópia.

Végül, azt hogy $[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = 1$ minden más relációt generál $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -ban, az univerzális fedőtér ismeretében a Klein-kancsó esetéhez hasonlóan (de annál bonyolultabban) láthatjuk be. Konkrétan, azt kell belátnunk, hogy bármely olyan, az A_i illetve B_i betűkből álló szó, amely p -beli felemeltje p -ben végződik, a fenti egyetlen reláció segítségével az üres szóvá redukálható. Nevezzünk egy H -beli, A_i illetve B_i élek felemeléseiből álló hurkot egyszerűnek, ha (a kezdőpontját kivéve) egyetlen csúcsot sem érint többször a képe. Könnyen látható, hogy minden egyszerű hurok két részre osztja H -t, és az egyik a parkettázás véges sok $4g$ -szögét tartalmazza. Ekkor, az $[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = 1$ reláció véges sokszori alkalmazásával egyenként leválasztható minden $4g$ -szög a sokszög belsejéből, azaz az eredeti egyszerű hurkot leíró szó a fenti reláció segítségével az üres szóba módosítható. Amennyiben az eredeti szavunk tehát egyszerű hurkot ír le, akkor ezzel készen vagyunk. Különben, kezdjük el bejárni a hurkot, és tekintsük azt a C csúcsot, amelyiket leghamarabb érintünk másodszor. Ekkor, a huroknak a C két érintése közti része egyszerű hurok. Erre alkalmazva az előző gondolatmenetet, az eredeti szót tudjuk redukálni a reláció segítségével egy rövidebb szóvá. Az eredeti szó hossza szerinti teljes indukcióval most már az állítás könnyen igazolható. $\square$

KÖVETKEZMÉNY 2.82. *Az S^2 , $\mathbf{RP}^2$, T^2 , Σ_g (ahol $g \geq 2$) és K terek páronként nem homeomorfak.*

BIZONYÍTÁS. Ezen terek közül S^2 az egyetlen egyszeresen összefüggő, tehát a 2.25 Állítás miatt nem homeomorf egyetlen másikkal sem a felsoroltak közül. $\mathbf{RP}^2$ az egyetlen nem-egyszeresen összefüggő tér a listából, amelynek nem-triviális véges a fundamentális csoportja, tehát ez sem homeomorf egyetlen másikkal sem a felsoroltak közül. T^2 és K

fundamentális csoportjai ugyan mindketten végtelenek, de T^2 -é Abel-féle, míg K -é nem (A és B nem kommutálnak), tehát ezek sem homeomorfak. Hasonlóan Σ_g fundamentális csoportja is végtelen nem-kommutatív, tehát ez sem homeomorf S^2 -vel, $\mathbf{RP}^2$ -vel és T^2 -vel sem.

Lássuk be, hogy a Σ_g terek fundamentális csoportjai nem izomorfak egymással különböző g értékekre és K fundamentális csoportjával sem. Tetszőleges G csoportra legyen G^{ab} az a csoport, amelynek ugyanazok a definiáló elemei, mint G -nek, de G relációihoz még hozzáveszünk minden olyan relációt, ami azt fejezi ki, hogy G generátorai kommutálnak. Ekkor G^{ab} egy Abel-csoport, amit G Abel-féle részének nevezünk. Nyilvánvaló, hogy G Abel-féle része az a csoport, amiben minden szorzást ugyanúgy végzünk mint G -ben, de bármely két eleme kommutál. Konkrétan, jelöljük $[G, G]$ -vel G kommutátor-részcsoporthát, azaz az összes $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ alakú elem által alkotott részhalmazt, ahol $g_1, g_2 \in G$. Ismert, hogy $[G, G]$ normálosztója G -nek, és könnyen látható, hogy

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G].$$

Többek között, izomorf csoportoknak izomorfak az Abel-féle részeik is. Tekintsük most $\pi_1(K)^{\text{ab}}$ -t: a 2.80 Tétel miatt ez tehát az a csoport, amelyet A és B generál, amelyek felcserélhetők és teljesítik az $ABA^{-1}B = 1$ relációt. Mivel A és B felcserélhető, ez a reláció az $AA^{-1}B^2 = 1$ -re, vagyis $B^2 = 1$ -re redukálódik, azaz B másodrendű elem. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\pi_1(K)^{\text{ab}} = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/(2)),$$

többek között $\pi_1(K)^{\text{ab}}$ rangja 1. Másrészt, $\pi_1(\Sigma_g, p_0)^{\text{ab}}$ az a csoport, amelyet az $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g, A_g^{-1}, B_g^{-1}$ elemek generálnak, amelyek mindegyike kommutál egymással, és teljesítik továbbá az

$$[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = 1$$

egyenletet. Ez utóbbi azonban, generátorok kommutátorainak szorzata lévén, már következik abból, hogy bármely két generátor kommutál. Ezért $\pi_1(\Sigma_g, p_0)^{\text{ab}}$ az az Abel-csoport, amit $2g$ elem generál, minden további reláció nélkül; tehát $\pi_1(\Sigma_g, p_0)^{\text{ab}} = \mathbf{Z}^{2g}$, amelynek rangja $2g$. A végesen generált Abel-csoportok alaptétele miatt ezek a csoportok különböző g értékekre nem izomorfak, továbbá nem izomorfak az 1 rangú $\pi_1(K)^{\text{ab}}$ csoporttal sem. Ezért a Σ_g terek páronként nem homeomorfak, és egyikük sem homeomorf K -val. $\square$

- FELADAT 2.83. (i) Bizonyítsuk be, hogy a 3-dimenziós euklideszi tér 0-t rögzítve hagyó $\text{SO}(3)$ mozgáscsoportja homeomorf $\mathbf{RP}^3$ -mal!
- (ii) Mutassuk meg, hogy $\text{SU}(2)$ összefüggő univerzális kétrétű fedése $\text{SO}(3)$ -nak!
- (iii) Következtessünk arra, hogy $\text{SU}(2)$ homeomorf az S^3 gömbbel!

- FELADAT 2.84. (i) Legyen $f : M \rightarrow \mathbf{RP}^2$ az egységnégyzet identitása által meghatározott folytonos leképezés, és $m_0 \in M, p_0 \in \mathbf{RP}^2$ a $(0, 0)$ pont ekvivalencia-osztályai. Állapítsuk meg az $f_* : \pi_1(M, m_0) \rightarrow \pi_1(\mathbf{RP}^2, p_0)$ indukált homomorfizmust! Fedőleképezés-e ez?
- (ii) Legyen $g : M \rightarrow K$ az egységnégyzet identitása által meghatározott folytonos leképezés, és $m_0 \in M, k_0 \in K$ a $(0, 0)$ pont ekvivalencia-osztályai. Állapítsuk meg a $g_* : \pi_1(M, m_0) \rightarrow \pi_1(K, k_0)$ indukált homomorfizmust!

- FELADAT 2.85. (i) Minden $n > 2$ -re határozzuk meg az $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ fundamentális csoportját!
- (ii) Minden $n > 2$ -re legyen $A \subset \mathbf{R}^n$ egy $(n - 2)$ -dimenziós altér. Állapítsuk meg $\mathbf{R}^n \setminus A$ fundamentális csoportját!

FELADAT 2.86. Léteznek-e a következő terek között fedőleképezések?

- $\mathbf{RP}^n \rightarrow T^n$
- $\mathbf{C}^* \rightarrow T^2$
- $\mathbf{C}^* \rightarrow M$, ahol M a Möbius-szalag
- $\mathbf{RP}^2 \rightarrow K$, ahol K a Klein-kancsó.

FELADAT 2.87. A 2.75 Lemma segítségével lássuk be, hogy minden $n \geq 3$ -ra $\pi_1(SO(n), \text{Id})$ legfeljebb kételemű! (Megjegyzés: a lemma egy általánosabb változatából az is bebizonyítható, hogy pontosan kételemű.)

II. Rész

Riemann-felületek geometriája

3. FEJEZET

A Riemann-felülettel kapcsolatos definíciók

Az előző részben tárgyalt topologikus terek legnagyobb részének gazdagabb struktúrája is van az eddig használtaknál: sok közülük differenciálható felület, némelyikük pedig Riemann-felület is. Ezeket a fogalmakat vezetjük be ebben a fejezetben.

3.1. Sokaságok, differenciálható struktúrák

Legyen X egy összefüggő, megszámlálható bázisú Hausdorff-tér.

DEFINÍCIÓ 3.1. Azt mondjuk, hogy X egy *(topologikus) sokaság*, amennyiben minden $x \in X$ -nek létezik egy U_x nyílt környezete X -ben és egy

$$\varphi_x : U_x \rightarrow V_x$$

homeomorfizmus valamely $V_x \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmazzal az n -dimenziós euklideszi térben. Egy ilyen (U_x, φ_x) párt X egy *térképének* nevezzük. Térképeknek egy egész X -et fedő $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ családját X egy *atlaszának* nevezzük. Legyen $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ és $\{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{j \in B}$ két atlasza X -nek. Ekkor a két atlaszt *ekvivalensnek* nevezzük, ha minden $i \in A, j \in B$ -re amelyre $U_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$, a

$$(3.1) \quad \tilde{\varphi}_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap \tilde{U}_j) \rightarrow \tilde{\varphi}_j(U_i \cap \tilde{U}_j)$$

leképezés homeomorfizmus. Végül, két ekvivalens atlasz által megadott sokaság-struktúrát szintén *ekvivalensnek* nevezünk.

MEGJEGYZÉS 3.2. Kicserélve U_x -et egy V_x -beli $\varphi(x)$ -et tartalmazó nyílt gömb φ általi ösképerre feltehető ebben a definícióban, hogy V_x homeomorf egy nyílt gömbbel; többek között, pontra húzható. Ezt a továbbiakban gyakran külön említés nélkül meg is tesszük.

A következő (szemléletesen nyilvánvalónak tűnő, ám matematikailag nem-triviális) tételt bizonyítás nélkül elfogadjuk.

TÉTEL 3.3. *Legyenek n és m különböző természetes számok, $V_1 \subset \mathbf{R}^n$ és $V_2 \subset \mathbf{R}^m$ nemüres nyílt halmazok. Ekkor nem létezik homeomorfizmus V_1 és V_2 között.*

MEGJEGYZÉS 3.4. A tételnek az a speciális esete, hogy $\mathbf{R}^1$ nem homeomorf $\mathbf{R}^n$ -nel $n > 1$ -re, következik abból, hogy ha $\mathbf{R}^1$ -ből elveszünk egy tetszőleges pontját, akkor az eredmény egy nem-összefüggő tér, míg ha $\mathbf{R}^n$ -ből vesszük el egy pontját $n > 1$ -re, akkor – amint az

könnyen látható – az eredmény ívszerűen összefüggő, többek között összefüggő lesz. Az pedig, hogy $\mathbf{R}^2$ nem homeomorf $\mathbf{R}^n$ -nel $n > 2$ -re, a fundamentális csoport segítségével látható be: egy $\mathbf{R}^2$ -beli pont komplementerének deformációs retraktuma S^1 , többek között nem-triviális fundamentális csoportú, míg magasabb n -re egy $\mathbf{R}^n$ -beli pont komplementerének deformációs retraktuma S^{n-1} , amely pedig egyszeresen összefüggő. A tétel általános esetének belátásához használni kell a fundamentális csoporthoz hasonlóan értelmezett úgynevezett magasabb homotópia-csoportokat (vagy homológia-csoportokat).

Legyen X egy sokaság, és tegyük fel, hogy valamely $x_1, x_2 \in X$ -re $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$, és

$$\begin{aligned}\varphi_{x_1} : U_{x_1} &\rightarrow V_{x_1} \\ \varphi_{x_2} : U_{x_2} &\rightarrow V_{x_2}\end{aligned}$$

homeomorfizmusok valamely $V_{x_1} \subset \mathbf{R}^n$ és $V_{x_2} \subset \mathbf{R}^m$ nyílt halmazokkal. Ekkor $U_{x_1} \cap U_{x_2}$ egy olyan nyílt halmaz X -ben, amelyen mind φ_{x_1} , mind φ_{x_2} értelmezve van. Mivel φ_{x_1} és φ_{x_2} homeomorfizmus, ezért a $\varphi_{x_1}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$ képhalmaz nyílt részhalmaza V_{x_1} -nek és $\varphi_{x_2}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$ nyílt részhalmaza V_{x_2} -nek. Mivel homeomorfizmusok kompozíciója is homeomorfizmus, ekkor tehát a

$$(3.2) \quad \varphi_{12} = \varphi_{x_2} \circ \varphi_{x_1}^{-1} : \varphi_{x_1}(U_{x_1} \cap U_{x_2}) \rightarrow \varphi_{x_2}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$$

leképezés is homeomorfizmus $\varphi_{x_1}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$ -ből $\varphi_{x_2}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$ -be. Itt $\varphi_{x_1}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$ nemüres nyílt halmaz $\mathbf{R}^n$ -ben és $\varphi_{x_2}(U_{x_1} \cap U_{x_2})$ nemüres nyílt halmaz $\mathbf{R}^m$ -ben. A 3.3 Tételből következik, hogy szükségszerűen $n = m$. Azt kaptuk tehát, hogy a definícióban szereplő n érték lokálisan egyértelműen meghatározott. Mivel X összefüggő, ezért n értéke globálisan (egész X -en) is egyértelműen meghatározott.

DEFINÍCIÓ 3.5. Az (eddigiek értelmében egyértelműen meghatározott) n értéket X *dimenziójának* nevezzük. A (3.2)-ben szereplő φ_{12} leképezést *áttérési függvénynek* hívjuk. Egy 1-dimenziós sokaságot *görbének*, egy 2-dimenziós sokaságot pedig *felületnek* hívunk.

- PÉLDA 3.6.** (i) Az $x \mapsto |x|$ függvény A képe $\mathbf{R}^2$ -ben egy görbe; valóban, az abszcisszára való $(x, |x|) \mapsto x$ vetítés homeomorfizmus A és $\mathbf{R}$ között. Ez tehát megadja A -nak egy egyetlen térképből álló atlaszát.
- (ii) A -nak egy másik egy térképből álló atlaszát kapjuk, ha A -ból $\mathbf{R}$ -be az $(x, |x|) \mapsto \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ leképezést tekintjük. Ez ekvivalens az előző pont atlaszával: a (3.1) leképezés ebben az esetben a

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|},$$

amely könnyen ellenőrizhetően homeomorfizmus $\mathbf{R}$ -ből $\mathbf{R}$ -be. Ez a két atlasz tehát ekvivalens sokaság-struktúrákat határoz meg A -n.

- (iii) Az $x^2 + y^2 = z$ egyenletű F félkúp $\mathbf{R}^3$ -ban felület: itt az (x, y) síkra való vetítés homeomorfizmus F és $\mathbf{R}^2$ között.
- (iv) Az $x^2 + y^2 = |z|$ egyenletű K kúp $\mathbf{R}^3$ -ban nem felület. Valóban, a 0 pontot eltávolítva K -ból nem összefüggő teret kapunk (amelynek két összefüggő komponense $K \cap \{z > 0\}$ és $K \cap \{z < 0\}$), tehát 0-nak nem lehet egy $\mathbf{R}^2$ -beli nyílt halmazzal homeomorf környezete.
- (v) A $(0, 1)$ nyílt egységsszakasz $\mathbf{R}$ -ben görbe: mivel nyílt, ezért minden pontjának létezik egy nyílt intervallum környezete.
- (vi) Hasonlóan adódik, hogy minden $V \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmaz n -dimenziós sokaság.
- (vii) Az I zárt egységsszakasz nem görbe: valóban, a 0 pontjának bármely összefüggő nyílt környezete valamely $[0, \varepsilon)$ félig nyílt szakasz, amely azonban nem homeomorf egy nyílt szakasszal $\mathbf{R}$ -ben, hiszen a 0 pont komplementere összefüggő.
- (viii) Hasonlóan igaz (de mélyebb algebrai topológiai módszerek nélkül csak körülményes igazolható), hogy az $I^n \subset \mathbf{R}^n$ zárt n -dimenziós kocka sem sokaság.
- (ix) Szintén az előzőhöz hasonlóan következik, hogy az M Möbius-szalag nem felület. Ha azonban M -ből elvesszük az $(x, 0)$ és $(x, 1)$ alakú pontok osztályainak ∂M halmazát, az így nyert $M \setminus \partial M$ tér már sokaság lesz.
- (x) Az S^2 gömb, az $\mathbf{RP}^2$ projektív sík, a T^2 tórusz felületek, és hasonlóan a g nemű felületek is. Ezeket az állításokat a későbbiekben bizonyítjuk.

Topologikus sokaságok közötti leképezések folytonosságára létezik egy egyszerű kritérium.

ÁLLÍTÁS 3.7. *Legyenek X és Y topologikus sokaságok, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ és $\{(W_j, \psi_j)\}_{j \in B}$ X és Y atlaszai, és $f : X \rightarrow Y$ egy leképezés. Ekkor f akkor és csak akkor folytonos, ha minden $i \in A, j \in B$ -re a*

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap f^{-1}(W_j)) \rightarrow \psi_j(U_i \cap W_j)$$

leképezés folytonos.

BIZONYÍTÁS. Mivel φ_i és ψ_j homeomorfizmusok, ezért többek között φ_i^{-1} és ψ_j folytonosak. Ebből következik, hogy ha f folytonos, akkor $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ is az. Megfordítva, ha $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ folytonos, akkor mivel ψ_j^{-1} és φ_i folytonosak, ebből következik, hogy f is az. $\square$

Emlékeztessünk most egy analízisbeli fogalomra.

DEFINÍCIÓ 3.8. Legyenek $V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^n$ nyílt halmazok, és

$$\varphi : V_1 \rightarrow V_2$$

egy leképezés közöttük. Azt mondjuk, hogy φ egy C^∞ -*diffeomorfizmus*, vagy röviden *diffeomorfizmus*, ha homeomorfizmus, és inverzával együtt végtelen sokszor differenciálható.

Ezek segítségével már értelmezhetjük a következő fogalmunkat.

DEFINÍCIÓ 3.9. Legyen X egy topologikus sokaság és $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ egy atlasza. Azt mondjuk, hogy ez az atlasz értelmez X -en egy *sima sokaság-struktúrát*, ha minden $(U_{i_1}, \varphi_{i_1}), (U_{i_2}, \varphi_{i_2})$ térképeire $(i_1, i_2 \in A)$ a (3.2) áttérési függvény diffeomorfizmus. Ekkor $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ -t *sima atlasznak* nevezzük. Ha adott X -en két sima atlasz: $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ és $\{(\tilde{U}_j, \tilde{\varphi}_j)\}_{j \in B}$, akkor azt mondjuk hogy ez a két struktúra ekvivalens, amennyiben minden $i \in A, j \in B$ -re a $\tilde{\varphi}_j \circ \varphi_i^{-1}$ leképezés diffeomorfizmus. Végül, két ekvivalens sima atlasz által megadott sima sokaság-struktúrát szintén *ekvivalensnek* nevezzük.

- MEGJEGYZÉS 3.10.** (i) Vigyázat: egy topologikus sokaság-struktúra nem feltétlenül határoz meg egy sima sokaság-struktúrát X -en, és még ha meg is határoz, akkor sem feltétlenül csak egyet (ld. a következő példát)! Ellenben, egy sima sokaság-struktúra X -en mindig meghatároz egy topologikus sokaság-struktúrát, mert minden diffeomorfizmus egyben homeomorfizmus is.
- (ii) Könnyen látható, hogy két sima atlasz akkor és csak akkor ekvivalens, ha az egyesítésük is sima atlasz.

PÉLDA 3.11. A 3.6 Példa (i) pontjának egy térképből álló atlasza meghatároz egy sima sokaság-struktúrát A -n. Ugyanez igaz a (ii) pontban szereplő atlaszára. Ez a két sima sokaság-struktúra nem ekvivalens A -n, mert az $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ az $x = 0$ pontban nem differenciálható.

A 3.7 Állítás mintájára most értelmezhetjük a sima leképezés fogalmát két sima sokaság között.

DEFINÍCIÓ 3.12. Legyenek X és Y topologikus sokaságok, $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ és $\{(W_j, \psi_j)\}_{j \in B}$ X és Y sima atlaszai, és $f : X \rightarrow Y$ egy folytonos leképezés. Azt mondjuk, hogy f *sima leképezés* X -ből Y -ba, ha minden $i \in A, j \in B$ -re a

$$\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow \psi_j(W_j)$$

leképezés végtelen sokszor differenciálható valamely $\mathbf{R}^n$ -beli nyílt halmazból $\mathbf{R}^m$ -be.

Lássuk be, hogy ez a definíció ekvivalens atlaszokra megegyező függvényosztályt ad, azaz két sima sokaság közötti sima leképezés fogalma független a koordináták (ekvivalens) választásától! A 3.10 (ii) Megjegyzés értelmében ez a következőre vezethető vissza.

ÁLLÍTÁS 3.13. Legyenek X és Y sima sokaságok $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ és $\{(W_j, \psi_j)\}_{j \in B}$ sima atlaszokkal, $f : X \rightarrow Y$ egy folytonos leképezés,

$x \in U_1 \cap U_2$ és $f(x) \in W_1 \cap W_2$. Ekkor $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ akkor és csak akkor sima, ha $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ sima. Továbbá, $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ akkor és csak akkor immerzió illetve szubmerzió, ha $\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ teljesíti ugyanezeket a feltételeket.

BIZONYÍTÁS. Mivel $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ és $\{(W_j, \psi_j)\}_{j \in B}$ sima atlaszok, ezért a

$$\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$$

és

$$\psi_{12} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$$

áttérési függvények simák. Vegyük észre hogy

$$\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1} = \psi_{12} \circ (\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_{12}^{-1}.$$

Az első állítás tehát a láncszabályból azonnal következik. A másik két állításhoz vegyük észre, hogy mivel φ_{12} inverzével együtt differenciálható, azért $\varphi_1(x)$ -beli differenciálja invertálható (és az inverze megegyezik φ_{12}^{-1} differenciáljával $\varphi_2(x)$ -ben); hasonló természetesen igaz ψ_{12} -re is. Így a fenti képlet és a láncszabály miatt

$$D_{\varphi_2(x)}(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}) = D_{\psi_1(f(x))}\psi_{12} \circ D_{\varphi_1(x)}(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ D_{\varphi_2(x)}\varphi_{12}^{-1},$$

ahol a jobb oldali hármas kompozícióban a két szélső lineáris leképezés invertálható. Elemi lineáris algebra alapján tehát a bal oldalon írt lineáris transzformáció akkor és csak akkor injektív (illetve szürjektív), ha a jobb oldalon levő középső lineáris transzformáció az. $\square$

DEFINÍCIÓ 3.14. Legyenek X és Y sima sokaságok és $f : X \rightarrow Y$ egy sima leképezés. Azt mondjuk, hogy f *diffeomorfizmus* X és Y között, ha homeomorfizmus és inverze is sima. X -et és Y -t *diffeomorf sima sokaságoknak* nevezzük, ha létezik közöttük diffeomorfizmus. Azt mondjuk, hogy f *immerzió* (illetve *szubmerzió*) X -ből Y -ba, ha bármely (U, φ) és (W, ψ) térképén X -nek illetve Y -nak a $D_{\varphi_1(x)}(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1})$ lineáris leképezés injektív (illetve szürjektív). Egy injektív immerziót *beágyazásnak* nevezünk.

PÉLDA 3.15. Az A halmaz a 3.6 Példa (i) és (ii) pontjának differenciálható struktúráival diffeomorfak. Valóban, az

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}$$

leképezés diffeomorfizmus.

FELADAT 3.16. Legyen X egy ívszerűen összefüggő kompakt görbe. Bizonyítsuk be, hogy X homeomorf az S^1 körvonallal!

FELADAT 3.17. Igazoljuk, hogy az $\operatorname{Sl}(n, \mathbf{R})$ csoport egy $(n^2 - 1)$ -dimenziós sima sokaság!

FELADAT 3.18. Igazoljuk, hogy az $\operatorname{SO}(n)$ csoport egy $n(n - 1)/2$ -dimenziós sima sokaság!

3.2. Peremes sokaságok és sokaságok összefüggő összege

Ebben a részben a sima sokaság fogalmának egy geometriailag természetes általánosítását adjuk meg.

Vezessük be az

$$\mathbf{R}_+^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_{\geq 0} = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbf{R}^n : x_n \geq 0\}$$

jelölést, és lássuk el a $\mathbf{R}_+^n$ halmazt az $\mathbf{R}^n$ -ből örökölt topológiával! Ekkor tehát $\mathbf{R}_+^n$ topológiájának egy bázisát alkotják a következő halmazok:

$$(3.3) \quad B_\varepsilon(\vec{x}) \subset \mathbf{R}^n, \text{ ahol } x_n > \varepsilon > 0,$$

$$(3.4) \quad B_\varepsilon(\vec{x}) \cap \mathbf{R}_+^n, \text{ ahol } x_n = 0 \text{ és } \varepsilon > 0 \text{ tetszőleges,}$$

ahol $B_\varepsilon(\vec{x})$ az $\vec{x}$ körüli ε sugarú nyílt gömb az euklideszi metrikára nézve.

DEFINÍCIÓ 3.19. X egy *peremes topologikus sokaság*, ha minden $x \in X$ pontjának létezik olyan U_x környezete, amely homeomorf $\mathbf{R}_+^n$ egy nyílt halmazával.

Algebrai topológiai módszerekkel belátható, hogy nem létezik homeomorfizmus egy (3.3) alakú és egy (3.4) alakú halmaz között. (Például az $n = 2$ esetben $B_\varepsilon(\vec{0}) \cap \mathbf{R}_+^2 \setminus \vec{0}$ egyszeresen összefüggő, míg $B_\varepsilon(\vec{0}) \setminus \vec{0}$ fundamentális csoportja $\mathbf{Z}$.) Tehát, az (3.2) áttérési függvények (3.3) alakú halmazokkal homeomorf környezetekből ugyanilyenekbe képeznek.

DEFINÍCIÓ 3.20. X egy *peremes sima sokaság*, ha peremes topologikus sokaság és létezik egy olyan atlasza, amelyre a (3.2) áttérési függvények diffeomorfizmusok az (3.3) esetben, illetve kiterjednek egy $B_\varepsilon(\vec{x})$ -en értelmezett diffeomorfizmussá a (3.4) esetben. Egy ilyen atlaszt ekvivalencia erejéig X -en egy *sima peremes sokaság-struktúrájának* nevezzük. X *pereme* ekkor az összes olyan $x \in X$ pontból áll, amelynek kizárólag (3.4) alakú halmazzal homeomorf környezete létezik; X peremét a ∂X jellel jelöljük.

- MEGJEGYZÉS 3.21.**
- (i) A perem ekvivalens definíciója: azon pontok halmaza, amelyek egy (vagy akár minden) térképen $\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$ -ba képződnek.
 - (ii) Vegyük észre, hogy a peremes (sima) sokaság $\partial X = \emptyset$ speciális esete a (sima) sokaság. Ezért a sima sokaságokat nevezhetjük perem nélküli sima sokaságoknak is.
 - (iii) Ha X peremes sima sokaság, akkor ∂X sima sokaság: valóban, ha (3.2) kiterjed egy sima leképezésre $B_\varepsilon(\vec{x})$ -en, akkor nyilván e kiterjesztés megszorítása a $B_\varepsilon(\vec{x}) \cap (\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$ ($n - 1$)-dimenziós gömbre $(\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\})$ -be képez, bijektív és inverzével együtt sima.

- (iv) Ha X peremes (sima) sokaság és $Y \subset X$ egy nyílt részhalmaza, akkor Y is peremes (sima) sokaság és

$$\partial Y = Y \cap \partial X.$$

Legyen most X egy (perem nélküli) sima vagy topologikus sokaság, $x \in X$ egy pontja és U_x egy olyan térkép, amelyre $\varphi_x(U_x) \subset \mathbf{R}^n$ homeomorf egy $B_\varepsilon(\vec{0})$ alakú halmazzal. Legyen továbbá $0 < \delta < \varepsilon$ tetszőleges és

$$\tilde{U}_x = \varphi_x^{-1}(B_\delta(\vec{0})).$$

ÁLLÍTÁS 3.22. Ekkor $X \setminus \tilde{U}_x$ sima vagy topologikus peremes sokaság, $\varphi_x^{-1}(S_\delta^{n-1}(\vec{0}))$ peremmel.

BIZONYÍTÁS. Legyen $y \in X \setminus \tilde{U}_x$. Amennyiben y -et nem tartalmazza $\tilde{U}_x$ lezártja sem, akkor (mivel X Hausdorff és lokálisan homeomorf egy reguláris térrel) y elválasztható egy nyílt U_2 környezettel $\tilde{U}_x$ lezártjától. Elmetszve X egy (U_3, φ_3) térképének U_3 értelmezési tartományát U_2 -vel, kapunk tehát egy $(U_3 \cap U_2, \varphi_3|_{U_3 \cap U_2})$ térképét $X \setminus \tilde{U}_x$ -nek y körül.

Amennyiben y -et tartalmazza $\tilde{U}_x$ lezártja, akkor $\varphi(y) \in S_\delta^{n-1}(\vec{0})$, így a $\varphi(y)$ körüli $\varepsilon - \delta > 0$ sugarú $B_{\varepsilon-\delta}(\varphi(y))$ gömböt tartalmazza $B_\varepsilon(\vec{0})$. Legyen ekkor $U_2 = \varphi^{-1}(B_{\varepsilon-\delta}(\varphi(y))) \subset U_x$. Ekkor $\varphi|(U_2 \setminus \tilde{U}_x)$ képe a

$$B_{\varepsilon-\delta}(\varphi(y)) \setminus B_\delta(\vec{0})$$

halmaz. Könnyen látható, hogy ez a halmaz peremes sokaság, ezért ez egy megfelelő térképét ad meg y körül. Végül, egy adott sima atlaszból két ilymódon választott φ, φ' térkép áttérési függvényei definíció szerint kiterjednek egy U_2 -t tartalmazó nyílt halmazon értelmezett áttérési függvényre, ezért a peremes sokaságon meghatároznak egy sima struktúrát. $\square$

Legyenek most X_1, X_2 n -dimenziós sima vagy topologikus sokaságok, $x_j \in X_j$ egy-egy pontjuk és $U_j \subset X_j$ olyan térképek, amelyre $\varphi_{x_1}(U_1), \varphi_{x_2}(U_2) \subset \mathbf{R}^n$ homeomorfak egy $B_\varepsilon(\vec{0})$ alakú halmazzal. Ezeknek a homeomorfizmusoknak a ∂U_j -re vett megszorításuk meghatároz egy

$$f = \varphi_{x_2}^{-1} \circ \varphi_{x_1} : \partial(X_1 \setminus U_1) \rightarrow \partial(X_2 \setminus U_2)$$

homeomorfizmust.

DEFINÍCIÓ 3.23. Az X_1 sokaság összefüggő összege X_2 -vel U_1, U_2 mentén az

$$(X_1 \setminus U_1, \partial(X_1 \setminus U_1)), (X_2 \setminus U_2, \partial(X_2 \setminus U_2))$$

párok f általi összeragasztásából nyert topologikus tér, amelyet az $X_1 \# X_2$ jellel jelölünk.

TÉTEL 3.24. *Ekkor $X_1 \# X_2$ topologikus sokaságok, továbbá amenyiben X_1, X_2 sima sokaságok és f diffeomorfizmus, akkor $X_1 \# X_2$ örököl egy természetes sima sokaság-struktúrát X_1 -ről és X_2 -ről, ami $X_j \setminus \bar{U}_j$ -n megegyezik az X_j -ről örökölt sima sokaság-struktúrával. (Itt $\bar{U}$ -val egy $U \subset X$ halmaz lezártját jelöljük.)*

BIZONYÍTÁS. Csak a topologikus esetet tárgyaljuk itt. Ekkor minden $y \in X_1 \setminus \bar{U}_1$ pont osztályának létezik egy olyan környezete, amelyet teljesen tartalmaz $X_1 \setminus \bar{U}_1$; ekkor egy ilyen környezetet elmeteszve X_1 egy térképének értelmezési tartományával nyerünk egy térképét $X_1 \# X_2$ -nek y körül. Hasonló persze igaz $X_2 \setminus \bar{U}_2$ pontjaira is.

Egy $y \in \bar{U}_1$ pont osztályának egy környezete pedig két topologikus félgömb ragasztásával kapható egy homeomorfizmus mentén, ami az 1.68 Állítás miatt egy nyílt topologikus gömb. $\square$

FELADAT 3.25. Lássuk be, hogy bármely n -dimenziós X topologikus sokaságra $X \# S^n$ homeomorf X -szel!

FELADAT 3.26. Mutassuk meg, hogy a $\bar{B}_1^n(\vec{0})$ zárt n -dimenziós egységsgömb peremes sokaság.

3.3. Sima részsokaságok

Legyen $M \subset \mathbf{R}^{m+k}$.

DEFINÍCIÓ 3.27. M -et $\mathbf{R}^{m+k}$ egy m -dimenziós *sima részsokaságának* nevezzük, ha bármely $x \in M$ pontnak létezik olyan $\tilde{V} \subseteq \mathbf{R}^{m+k}$ nyílt környezete és egy olyan $f : \tilde{V} \rightarrow \mathbf{R}^k$ szubmerzió, amelyre

$$(3.5) \quad f^{-1}(0) = \tilde{V} \cap M.$$

Legyen most X egy sima $m+k$ -dimenziós sokaság és $M \subset X$ egy részhalmaza.

DEFINÍCIÓ 3.28. M -et X egy m -dimenziós *sima részsokaságának* nevezzük, ha X atlaszának bármely (U, φ) térképére $\varphi(U \cap M)$ az $\mathbf{R}^{m+k}$ tér egy m -dimenziós sima részsokasága.

Könnyen látható, hogy ezzel ekvivalens ugyanezt megkövetelni minden $x \in X$ pont körül legalább egy térképen.

ÁLLÍTÁS 3.29. *A következő feltételek ekvivalensek:*

- (i) M egy m -dimenziós sima részsokaság $\mathbf{R}^{m+k}$ -ban,
- (ii) Minden $x \in M$ pontnak létezik egy olyan $\tilde{V}$ nyílt környezete $\mathbf{R}^{m+k}$ -ban és egy $g : \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$ diffeomorfizmus egy $\tilde{W} \subset \mathbf{R}^{m+k}$ nyílt részhalmazzal, amelyre

$$M \cap \tilde{V} = g^{-1}((\mathbf{R}^m \times \{0\}) \cap \tilde{W}),$$

- (iii) Minden $x \in M$ ponthoz létezik egy olyan $\tilde{V}$ nyílt környezete $\mathbf{R}^{m+k}$ -ban, egy $W \subset \mathbf{R}^m$ nyílt részhalmaz és egy $\psi : W \rightarrow \tilde{V}$ injektív immerzió, amelyre

$$M \cap \tilde{V} = \psi(W),$$

továbbá két ilyen $(W_1, \psi_1), (W_2, \psi_2)$ esetén amennyiben $\psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2) \neq \emptyset$, akkor a

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1 : W_1 \cap \psi_1^{-1}(\psi_2(W_2)) \rightarrow W_2 \cap \psi_2^{-1}(\psi_1(W_1))$$

leképezés diffeomorfizmus.

BIZONYÍTÁS. Először bebizonyítjuk hogy (i) $\Leftrightarrow$ (ii). $\Rightarrow$ Legyen $f = (f_1, \dots, f_k)^t : \tilde{V} \rightarrow \mathbf{R}^k$ egy olyan szubmerzió, amelyre (3.5) teljesül. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az $x_1, \dots, x_{m+k}$ olyan sorrendben állnak, hogy a

$$(3.6) \quad J_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}} \right)_{i,j=1}^k$$

Jacobi-mátrix nemelfajuló. Defináljuk g -t a következőképpen:

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{m+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}.$$

Ekkor g Jacobi-mátrixa tömb-alakba írható:

$$Jac_x(g) = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ J_m & J_k \end{pmatrix},$$

ahol I_m az m méretű egységmátrix, J_k -t (3.6)-ban értelmeztük, J_m az f Jacobi-mátrixa az $x_1, \dots, x_m$ változók szerint, 0 pedig a $k \times m$ méretű azonosan 0 mátrixot jelöli. Feltételünk alapján J_k nemelfajuló, ezért a tömb-háromszög mátrixok determináns-képlete miatt $Jac(g)$ is nemelfajuló. Az inverz-függvény tétel miatt ekkor g diffeomorfizmus $\tilde{V}$ egy olyan $\tilde{\tilde{V}}$ nyílt részhalmazára megszorítva, amely tartalmazza x -et. (A jelölés egyszerűsége érdekében $\tilde{\tilde{V}}$ -t továbbra is $\tilde{V}$ -vel jelöljük, észben tartva hogy esetleg szűkebb az (i)-ből származó halmaznál.) Legyen továbbá $\tilde{W} = g(\tilde{V})$, ekkor továbbra is az inverz-függvény tétel értelmében $\tilde{W}$ nyílt $\mathbf{R}^{m+k}$ -ban. Végül, $f(x_1, \dots, x_{m+k}) = 0$ ekvivalens $g(x_1, \dots, x_{m+k}) \in \mathbf{R}^m \times \{0\}$ -val, ezért ha $f^{-1}(0) = \tilde{V} \cap M$ igaz, akkor (ii) egyenlősége is.

$\Leftarrow$ Ha g egy (ii) feltételeit kielégítő diffeomorfizmus, akkor legyen $f = \pi_2 \circ g$, ahol $\pi_2 : \mathbf{R}^{m+k} \rightarrow \mathbf{R}^k$ az utolsó k koordinátára való vetítés.

Ekkor (mivel π_2 lineáris, ezért) minden $x \in \tilde{V}$ -re

$$Jac_x(f) = \pi_2 \circ Jac_x(g);$$

mivel azonban $Jac_x(g)$ feltétel szerint teljes rangú (többek között szürjektív) és π_2 szürjektív, ebből következik, hogy $Jac_x(f)$ is szürjektív minden x -re, vagyis szubmerzió. Másrészt, (3.5) azonnal következik (ii) egyenlőségéből.

A (ii) $\Rightarrow$ (iii) irány triviális: legyen $W = (\mathbf{R}^m \times \{0\}) \cap \tilde{W}$ és $\psi = g^{-1}$; két ilyen közötti áttérés azért diffeomorfizmus, mert diffeomorfizmusok k -kodimenziós alterekre való megszorításából kapjuk.

Végül, tegyük fel, hogy (iii) teljesül, és legyen $x \in M$ és W, ψ mint (iii)-ban. Legyen továbbá $y = \psi^{-1}(x)$. Ekkor $D_y(\psi)$ rangja feltevés szerint m , tehát létezik k lineárisan független vektor $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbf{R}^{m+k}$, amelyekre

$$\mathbf{R}^{m+k} = \text{Im}(D_y(\psi)) \oplus \mathbf{R}\vec{v}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}\vec{v}_k$$

mint vektorterek. Az általánosság megszorítása nélkül (egy forgatás alkalmazása segítségével) feltehetjük, hogy $\vec{v}_i = \vec{e}_{m+i}$ az $(m+i)$ -edik standard generátora $\mathbf{R}^{m+k}$ -nak. Defináljuk a következő

$$h : W \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^{m+k}$$

leképezést: minden $y' \in W$ és $(c_1, \dots, c_k) \in \mathbf{R}^k$ esetén legyen

$$h(y', c_1, \dots, c_k) = \psi(y') + c_1 \vec{e}_{m+1} + \dots + c_k \vec{e}_{m+k}.$$

Ekkor h differenciálható és y -beli Jacobi-mátrixa tömb alakban:

$$Jac_y(h) = \begin{pmatrix} (Jac_y(\psi))_m & 0 \\ (Jac_y(\psi))_k & I_k \end{pmatrix},$$

ahol $(Jac_y(\psi))_m$ és $(Jac_y(\psi))_k$ a ψ függvény Jacobi-mátrixát jelöli az első m , illetve az utolsó k koordináta szerint. A tömb-determináns számítás miatt tehát $Jac_y(h)$ invertálható. Ekkor az inverz-függvény tétel miatt minden y -nak létezik olyan W' környezete W -ben és olyan $\varepsilon > 0$, amelyre a h megszorítása $\tilde{W} = W' \times (-\varepsilon, \varepsilon)^k$ -ra diffeomorfizmus, és h képe egy $\tilde{V}$ nyílt halmaz $\mathbf{R}^{m+k}$ -ban. Mivel

$$h(y', 0, \dots, 0) = \psi(y')$$

azért

$$\text{Im}(h|_{\mathbf{R}^m \times \{0\}}) = M \cap \tilde{V},$$

ami bizonyítja (ii)-t $g = h^{-1}$ választással. $\square$

KÖVETKEZMÉNY 3.30. Minden $\mathbf{R}^{m+k}$ -beli M sima m -dimenziós részsokaságon természetesen adott egy m -dimenziós sima sokaság-struktúra.

BIZONYÍTÁS. Az (i) $\Rightarrow$ (iii) alapján kapunk M -nek minden x pontja körül egy $M \cap \tilde{V}$ környezetét M -ben és egy rajta értelmezett ψ^{-1} homeomorfizmust $\mathbf{R}^m$ egy W nyílt halmazába, amelyekre az áttérési függvények simák — ez éppen az m -dimenziós sima atlasz definíciója. $\square$

3.4. Differenciálható sokaság eukildeszi térbe való beágyazhatósága

A 3.30 Következmény ismeretében természetes kérdés, hogy minden M sima m -dimenziós sokaság előáll-e diffeomorfizmus erejéig mint valamely $\mathbf{R}^N$ -beli sima részsokaság. Egy ilyen eredmény ugyanis részleges megfordítottja lenne a Következménynek. Ebben a szakaszban erre a kérdésre adunk egy eredményt.

Szükségünk lesz a következő fogalmakra.

DEFINÍCIÓ 3.31. Legyen X egy topologikus tér és $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ folytonos függvény. Ekkor f tartója a

$$\text{Supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \subseteq X$$

halmaz, ahol $\overline{A}$ az A halmaz lezárását jelöli. Legyen $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ az X tér részhalmazainak egy családja. Azt mondjuk, hogy a $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ család *lokálisan véges*, ha bármely $x \in X$ elemnek létezik olyan U környezete, amelyre teljesül $U \cap Z_\alpha = \emptyset$ véges sok $\alpha \in A$ indextől eltekintve.

DEFINÍCIÓ 3.32. Legyen M egy sima m -dimenziós sokaság, $\{U_i\}_{i \in I}$ valamely nyílt fedése, és $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sima függvények M -en. Azt mondjuk, hogy az $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ függvénycsalád egy $\{U_i\}_{i \in I}$ alá rendelt *egységosztás*, ha kielégülnek a következő feltételek:

- (i) minden $\alpha \in A$ esetén létezik olyan $i(\alpha) \in I$, amelyre $\text{Supp}(f_\alpha) \subset U_{i(\alpha)}$,
- (ii) a $\{\text{Supp}(f_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ halmazrendszer lokálisan véges,
- (iii) és minden $x \in M$ pontra

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1,$$

(ahol az összeg az előző pont értelmében minden rögzített x esetén csak véges sok 0-tól különböző tagot tartalmaz, tehát jól értelmezett).

TÉTEL 3.33. Legyen M egy tetszőleges sima m -dimenziós sokaság, és $\{U_i\}_{i \in I}$ valamely nyílt fedése. Ekkor létezik $\{U_i\}_{i \in I}$ alá rendelt egységosztás.

BIZONYÍTÁS. Lásd [?]. □

TÉTEL 3.34. Ha M kompakt sima m -dimenziós sokaság, akkor létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ amelyre létezik $F : M \rightarrow \mathbf{R}^N$ beágyazás.

BIZONYÍTÁS. Legyen $U_1, \dots, U_n$ tetszőleges, koordináta-környezetekből álló véges fedése M -nek (egy ilyen kiválasztható bármely $\{U_i\}_{i \in I}$ koordináta-környezetekkel való fedésből a kompaktság miatt), és legyen $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ egy alá rendelt egységosztás. Feltehető, hogy utóbbi szintén véges. Valóban, a

$$W_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) \neq 0\} \subseteq M$$

nyílt halmazok fedik M -et, tehát kiválasztható véges sok $f_1, \dots, f_k$, amelyekre a megfelelő $W_1, \dots, W_k$ halmazok már fedik M -et. Ekkor a

$$\tilde{f}_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_1(x) + \dots + f_k(x)} \quad (1 \leq i \leq k)$$

függvények egy véges, $U_1, \dots, U_n$ alá rendelt egységoztást adnak. A jelölés egyszerűsítése kedvéért tehát legyen $f_1, \dots, f_k$ egy $U_1, \dots, U_n$ alá rendelt egységoztás: minden $1 \leq l \leq k$ esetén létezik olyan $1 \leq i(l) \leq n$, amelyre

$$\text{Supp}(f_l) \subset U_{i(l)}.$$

Legyenek a koordináta-leképezések

$$\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subseteq \mathbf{R}^m,$$

koordinátákban

$$\varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \vdots \\ \varphi_i^m \end{pmatrix}.$$

Végül, legyen $N = (m+1)k$ és

$$F : M \rightarrow \mathbf{R}^{(m+1) \times k} \cong \mathbf{R}^N$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1(x)\varphi_{i(1)}^1(x) & \dots & f_k(x)\varphi_{i(k)}^1(x) \\ \vdots & & \\ f_1(x)\varphi_{i(1)}^m(x) & \dots & f_k(x)\varphi_{i(k)}^m(x) \end{pmatrix},$$

amely formula értelmezett mivel f_l tartója része $\varphi_{i(l)}$ értelmezési tartományának (és így $f_l\varphi_{i(l)}$ kiterjeszthető az $M \setminus U_{i(l)}$ komplementerre az azonosan 0 függvényként). Ekkor F a keresett beágyazás. Lássuk be először, hogy F injektív. Tegyük fel, hogy valamely $x, x' \in M$ esetén $F(x) = F(x')$. Ekkor a két mátrix első sorát összehasonlítva kapjuk, hogy minden $1 \leq l \leq k$ esetén $f_l(x) = f_l(x')$. Válasszunk most egy olyan l értéket, amelyikre $f_l(x) \neq 0$, ekkor $F(x)$ és $F(x')$ l -edik oszlopát összevetve kapjuk, hogy $\varphi_{i(l)}(x) = \varphi_{i(l)}(x')$. Ebből viszont $\varphi_{i(l)}$ injektivitása miatt $x = x'$.

Lássuk be most, hogy minden $x \in M$ esetén $d_x F$ injektív. Ehhez minden x -re válasszunk egy olyan $1 \leq l \leq k$ értéket, amelyre $f_l(x) \neq 0$. Határozzuk meg $F \circ \varphi_{i(l)}^{-1}$ teljes deriváltját $y = \varphi_{i(l)}(x)$ -ben. Jelöljük minden $1 \leq \mu \leq m$ -re és minden $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre $\partial_\mu g$ -vel a $\frac{\partial(g \circ \varphi_{i(l)}^{-1})}{\partial y_\mu}$ parciális deriváltat. Vegyük észre, hogy definíció alapján a $V_{i(l)} \subseteq \mathbf{R}^m$ nyílt halmazon

$$F \circ \varphi_{i(l)}^{-1}(y)$$

l -edik oszlopa

$$\begin{pmatrix} f_l(\varphi_{i(l)}^{-1}(y)) \\ f_l(\varphi_{i(l)}^{-1}(y))y^1 \\ \vdots \\ f_l(\varphi_{i(l)}^{-1}(y))y^m \end{pmatrix}.$$

Ennek a vektornak a teljes deriváltja

$$A_l = \begin{pmatrix} \partial_1 f_l & \cdots & \partial_m f_l \\ (\partial_1 f_l)y^1 + f_l & \cdots & (\partial_m f_l)y^m \\ \vdots & \ddots & \\ (\partial_1 f_l)y^m & \cdots & (\partial_m f_l)y^m + f_l \end{pmatrix}.$$

Kivonva A_l első sorának $\varphi_{i(l)}^1$ -szeresét a második sorából, s. í. t. az első sorának $\varphi_{i(l)}^m$ -szeresét az utolsó sorából, látjuk hogy A_l sor-ekvivalens az

$$B_l = \begin{pmatrix} \partial_1 f_l & \cdots & \partial_m f_l \\ f_l & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & f_l \end{pmatrix}$$

$(m+1) \times m$ dimenziójú mátrix-szal, amelynek az utolsó $m \times m$ -es aldeterminánsa

$$f_l(x)I_m.$$

Ezzel beláttuk, hogy $F \circ \varphi_{i(l)}^{-1}$ teljes deriváltja teljes rangú. $\square$

Bizonyítás nélkül kimondjuk a következő tételt, amely már éles becslést ad N -re.

TÉTEL 3.35 (H. Whitney). *Minden m -dimenziós M sima sokasághoz létezik egy $i : M \rightarrow \mathbf{R}^{2m}$ beágyazás.*

MEGJEGYZÉS 3.36. A $2m$ optimális, például a valós projektív terek nem ágyazhatók be $2m-1$ dimenzióba, amennyiben $m = 2^k$.

3.5. Differenciálható csoportthatások

Legyen X egy sima sokaság és G egy csoport, amelynek $e \in G$ -vel jelöljük az egységelemét.

DEFINÍCIÓ 3.37. Azt mondjuk, hogy G *simán hat* X -en, ha minden $g \in G$ -re létezik egy olyan

$$f_g : X \rightarrow X$$

diffeomorfizmus, amelyekre teljesül, hogy ha $g, h \in G$, akkor $f_{gh} = f_g \circ f_h$ és $f_e = \text{Id}_X$. Egy $p \in X$ -re $f_g(p)$ -t néha $g.p$ -vel vagy $g(p)$ -vel jelöljük. Azt mondjuk hogy a csoportthatás *teljesen diszkrét*, amennyiben minden $x \in X$ -re létezik olyan véges $G_x \subseteq G$ részhalmaz és $U = U_x$ környezet, amelyre minden $g \in G \setminus G_x$ -re $g(U) \cap U = \emptyset$. Azt

mondjuk hogy a csoportthatás *szabad*, ha minden $x \in X$ -re és $g \neq e$ -re $g(x) \neq x$. Egy ilyen U nyílt halmazt X -ben *jónak* hívunk. Ha G simán hat X -en, akkor G *pálya-terének* nevezzük és X/G -vel jelöljük X hányadosát arra az ekvivalencia-relációra, amelyre minden $x \in X$ -re és minden $g \in G$ -re $x \sim g.x$. Az $x \in X$ elem ekvivalencia-osztályát a $\sim$ relációra $[x] \in X/G$ -vel jelöljük.

Egy egyszerű topológiai gondolatmenet a következőt eredményezi.

ÁLLÍTÁS 3.38. *Ha f_g egy teljesen diszkrét, szabad hatás egy X Hausdorff-téren, akkor minden $x \in X$ -nek létezik olyan $U = U_x$ környezete, amelyre minden $g \in G \setminus \{e\}$ -re $g(U) \cap U = \emptyset$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$G_x = \{e, g_1, \dots, g_n\}.$$

Mivel a hatás szabad, tudjuk hogy $g_n(x) \neq x$. Legyenek $\tilde{U}$ és $\tilde{V}$ diszjunkt környezetei x -nek illetve $g_n(x)$ -nek. Legyen $U_n = \tilde{U} \cap g_n^{-1}(\tilde{V})$. Legyen továbbá

$$U'_x = U_x \cap U_n.$$

Ekkor U'_x -re és minden $g \in G \setminus \{e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ -re teljesül

$$g(U'_x) \cap U'_x = \emptyset.$$

Az állítást innen teljes indukcióval nyerjük. □

A továbbiakban egy szabad, teljesen diszkrét csoportthatás esetén jó környezeten olyan környezetet fogunk érteni, amely teljesíti a 3.38 Állítás tulajdonságát.

A pálya-teret elláthatjuk a hányados-topológiával, azonban ez nem minden csoportthatásra örökli a sokaság-struktúrát. Igaz viszont ez a teljesen diszkrét hatásokra.

ÁLLÍTÁS 3.39. *Legyen X egy sima sokaság és G egy csoport amely simán, szabadon és teljesen diszkrétén hat X -en. Ekkor az X/G pálya-téren létezik egy természetes sima sokaság-struktúra. Továbbá, ekkor a $p : X \rightarrow X/G$ természetes leképezés az X/G fedése. Többek között, ha X egyszeresen összefüggő, akkor tetszőleges $x_0 \in X$ -re $\pi_1(X/G, [x_0])$ izomorf G -vel.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $x \in X$ tetszőleges és U_x egy olyan jó környezete, amely egyben X egy

$$\varphi_x : U_x \rightarrow V_x$$

térképének alaphalmaza is. Ilyen U_x létezik: elég elmeszeni egy jó környezetet és egy térkép alaphalmazát. Ekkor az $[x] \in X/G$ pont körül definiáljunk egy térképet úgy, hogy $U_{[x]}$ alaphalmaza álljon az U_x -beli pontok pályájából, és legyen

$$\varphi_{[x]} : U_{[x]} \rightarrow V_x$$

az a leképezés, amely valamely $y \in U_x$ -re $[y]$ -t $\varphi_x(y)$ -ba képezi. Mivel U_x jó környezete x -nek, azért benne minden ekvivalencia-osztálynak legfeljebb egy reprezentánsa lehet, ami miatt $\varphi_{[x]}$ injektív. Ez az értelmezés függ $x \in p^{-1}([x])$ -tól. Lássuk be, hogy valamely másik $x' \in p^{-1}([x])$ választás ekvivalens térképhez vezet. Valóban, ekkor $x' = f_g(x)$ valamely $g \in G$ -re, s így (ha szükséges, esetleg U_x -et szűkítve) $U_{x'}$ -nek választhatjuk $g(U_x)$ -et, amin létezik egy

$$\varphi_{x'} : U_{x'} \rightarrow V_{x'}$$

térkép. Ekkor

$$\varphi_{[x']} : U_{[x']} \rightarrow V_{x'}$$

az a leképezés, amely $y' = g.y \in U_{x'}$ -re $[y']$ -t $\varphi_{U_{x'}}(y')$ -be képezi. Másrészt, mivel f_g diffeomorfizmus X -en, ezért

$$(3.7) \quad \varphi_{x'} \circ f_g \circ \varphi_x^{-1} : V_x \rightarrow V_{x'}$$

diffeomorfizmus. Könnyen látszik azonban, hogy ez pontosan a

$$\varphi_{[x']} \circ \varphi_{[x]}$$

leképezéssel egyezik meg, amely definíció szerint az X/G két térképe közötti áttérési függvény. E két térkép tehát ekvivalens.

Nyilvánvaló, hogy ekkor a $\{g(U_x)\}_{g \in G}$ nyílt halmazok egyenletesen fedik $U_{[x]}$ -et, hiszen páronként diszjunktak és mindegyikük diffeomorf (tehát többek között homeomorf is) U_x -szel. Mivel minden $[x] \in X/G$ -nek létezik egy ilyen környezete (konkrétan valamely $x \in X$ reprezentánsához tartozó jó U_x pályája G által), ezért p fedőleképezés. Ha X egyszerűen összefüggő, akkor p univerzális fedőleképezés, tehát $\pi_1(X/G, [x_0])$ bijektív a $G.x_0$ pályával. Mivel G teljesen diszkrét, azaz minden $g \in G \setminus \{e\}$ -re $g.x_0 \neq x_0$ teljesül, tehát $G.x_0$ bijektív G -vel. Vezessük be erre bijekcióra a

$$\iota : G.x_0 \rightarrow G$$

jelölést; ekkor nyilván $\iota(x_0) = e$. Legyen most $g_1, g_2 \in G$ két csoportelem, és jelöljük x_j -vel $g_j.x_0$ -t. Ekkor x_j jelöl egy elemet $\pi_1(X/G, [x_0])$ -ban, mégpedig egy tetszőleges x_0 -ból x_j -be vezető X -beli f_j út $p(f_j)$ levetítettjének $[p(f_j)]$ homotópia-osztályát. Másrészt, a ι bijekcióban x_j -nek $g_j \in G$ felel meg. Azt kell belátnunk, hogy a $\pi_1(X/G, [x_0])$ -beli $[p(f_1)][p(f_2)]$ elemnek ι által a $g_1g_2 \in G$ elem felel meg. Könnyen látható, hogy az X/G -beli $[x_0]$ alappontú $p(f_1)*p(f_2)$ hurok x_0 kezdőpontú felemeltje az $f_1 * g_1(f_2)$ út X -ben. Ennek végpontja

$$\begin{aligned} g_1.f_2(1) &= g_1.x_2 \\ &= g_1.(g_2.x_0) \\ &= (g_1g_2).x_0, \end{aligned}$$

ami ι által a g_1g_2 elemnek felel meg. Tehát az ι bijekció megtartja a $\pi_1(X/G, [x_0])$ -beli és a G -beli szorzásokat, azaz homomorfizmus. $\square$

PÉLDA 3.40. (i) Az $\mathbf{RP}^2$ valós projektív sík mint topologikus tér az S^2 gömb hányadosa a $\mathbf{Z}/(2)$ -hatással, amelyre az egyetlen nem egység $a \in \mathbf{Z}/(2)$ antipodálisan hat, azaz

$$a.(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

Könnyen látható, hogy ez a hatás sima, fixpont-mentes (azaz, szabad) és teljesen diszkrét. Tehát a 3.39 Állítás alapján kapunk egy természetes sima sokaság-struktúrát $\mathbf{RP}^2$ -n.

- (ii) Az $\mathbf{R}^2$ valós síkon hasson a $\mathbf{Z}^2$ csoport $(1, 0)$ -val és $(0, 1)$ -gyel való eltolásokkal generálva. Ekkor azonosítva minden pályát egy ponttal, a hányados a T^2 tórusz, tehát kapunk T^2 -n egy természetes sima sokaság-struktúrát.
- (iii) Legyen $X = \mathbf{R} \times]0, 1[$, és hasson ezen a $\mathbf{Z}$ csoport azon A csúsztatva tükrözés által generálva, amely az $(1, 0)$ -val való eltolás után elvégzett $y = \frac{1}{2}$ egyenesre való tengelyes tükrözés. Ekkor könnyen láthatóan $X/\mathbf{Z}$ az M Möbius-szalagban a $[0, 1] \times]0, 1[$ pontok M^o ekvivalencia-osztályai. Tehát M^o sima sokaság, amelynek fundamentális csoportja $\mathbf{Z}$.
- (iv) Legyen Γ az $\mathbf{R}^2$ mozgáscsoportjának az a részcsoportha, amelyet az A és B elemek generálnak, ahol B a $(0, 1)$ -gyel való eltolás, és a A az előző pontban szereplő csúsztatva tükrözés. Ekkor könnyen leellenőrizhető hogy $ABA^{-1}B = 1$, és $\mathbf{R}^2/\Gamma = K$ a Klein-kancsó.

FELADAT 3.41. Hasson a $\mathbf{Z}$ csoport $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ -n a következő módon:

$$m.(x_0, \dots, x_n) = (2^m x_0, \dots, 2^m x_n).$$

Lássuk be, hogy ez a hatás teljesen diszkrét, és a hányados-sokaság diffeomorf $S^1 \times S^n$ -nel!

- FELADAT 3.42. (i) Legyen $\alpha \in \mathbf{R}$ tetszőleges, és hasson a $\mathbf{Z}$ csoport $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ -n az $\alpha.[x] = [\alpha + x]$ szabály szerint. Mutassuk meg, hogy ez a hatás nem teljesen diszkrét!
- (ii) Tegyük fel, hogy $\alpha = p/q$, ahol $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$, és a p/q tört nem egyszerűsíthető. Bizonyítsuk be, hogy az előbbi hatás ekkor faktorizálódik egy $\mathbf{Z}/(q)$ -hatássá, amely már teljesen diszkrét! Mi a hányados-sokaság és a hányados-leképezés?

3.6. Irányíthatóság

DEFINÍCIÓ 3.43. Legyen X egy n -dimenziós sima sokaság. Azt mondjuk, hogy X *irányítható*, ha létezik olyan atlasza, amelyben minden φ_{12} áttérési függvényre és minden $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ -re a

$$D_x \varphi_{12} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

lineáris leképezés irányítástartó. Egy ezzel a tulajdonsággal bíró atlaszt *irányított atlasznak*, és X -et egy ilyen atlaszával *irányított sokaságnak* nevezzük.

Legyenek most $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \{(W_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ egy adott X irányítható sokaság irányított atlaszai és $x \in X$ egy tetszőleges pont.

ÁLLÍTÁS 3.44. *Ekkor vagy minden olyan $i \in I$ -re és $j \in J$ -re, amelyekre $x \in U_i \cap W_j$, a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa pozitív, vagy minden ilyen $i \in I$ -re és $j \in J$ -re a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa negatív. Többek között, ha X összefüggő, akkor vagy minden $i \in I$ -re és $j \in J$ -re, amelyekre $U_i \cap W_j \neq \emptyset$, a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa pozitív, vagy minden ilyen $i \in I$ -re és $j \in J$ -re a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa negatív.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy valamely $i, i' \in I$ -re és $j, j' \in J$ -re $x \in U_i \cap U_{i'} \cap W_j \cap W_{j'}$. Ekkor egy kellően szűk nyílt halmazán $\mathbf{R}^n$ -nek

$$\psi_{j'} \circ \varphi_{i'}^{-1} = (\psi_{j'} \circ \psi_j^{-1}) \circ \psi_j \circ \varphi_i^{-1} \circ (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1}).$$

Mivel az $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \{(W_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ atlaszok irányítottak, tudjuk hogy a jobb oldal első és utolsó zárójelében levő leképezések Jacobi-determinánsa pozitív. Ekkor a Jacobi-determináns szorzat-képlete miatt $\psi_{j'} \circ \varphi_{i'}^{-1}$ és $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsának előjele megegyezik; ezzel igazoltuk az első állítást.

Vezessük be azt az $\epsilon : X \rightarrow \{\pm 1\}$ leképezést, amely valamely $x \in X$ -hez pontosan akkor rendel +1-et, ha valamely $i \in I$ -re és $j \in J$ -re, amelyekre $x \in U_i \cap W_j$, a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa pozitív; az előző bekezdés miatt ez ekvivalens azzal, hogy bármely olyan $i \in I$ -re és $j \in J$ -re, amelyekre $x \in U_i \cap W_j$, a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa pozitív. Mivel $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ folytonosan differenciálható és a determináns folytonos függvény a mátrixokon, az előjel-függvény pedig folytonos a $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon, azért ϵ folytonos függvények kompozíciója, tehát folytonos X -en. Ha X összefüggő, akkor az ϵ általi képe is összefüggő, azaz vagy $\{+1\}$, vagy $\{-1\}$; ezzel igazoltuk a második állítást is. $\square$

DEFINÍCIÓ 3.45. Egy X összefüggő irányítható sokaság $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \{(W_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ irányított atlaszait *ekvivalens irányított atlaszoknak* nevezzük, ha minden $i \in I$ -re és $j \in J$ -re, amelyekre $U_i \cap W_j \neq \emptyset$, a $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$ Jacobi-determinánsa pozitív.

Ez az ekvivalencia-fogalom nyilván ekvivalencia-reláció.

KÖVETKEZMÉNY 3.46. *Egy X összefüggő irányítható sokaság irányított atlaszainak létezik pontosan két ekvivalencia-osztálya.*

BIZONYÍTÁS. Először mutassuk meg, hogy létezik legalább két ekvivalencia-osztály: legyen $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tetszőleges irányított atlasza X -nek és $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ tetszőleges irányítás-váltó (azaz negatív determinánsú) lineáris transzformáció (például, egy hipersíkra vett merőleges tükrözés). Ekkor $\{(U_i, T \circ \varphi_i)\}_{i \in I}$ nem ekvivalens $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ -vel: valóban, minden $i \in I$ -re és $x \in U_i$ -re

$$T \circ \varphi_i \circ \varphi_i^{-1} = T;$$

utóbbi lineáris leképezés, tehát differenciálja saját maga, így többek közt Jacobi-determinánsa megegyezik T determinánsával, ami feltétel szerint negatív.

Másrészt, bizonyítsuk be, hogy legfeljebb két ekvivalencia-osztály van. Ehhez legyenek

$$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}, \{(W_j, \psi_j)\}_{j \in J}, \{(\tilde{W}_{\tilde{j}}, \tilde{\psi}_{\tilde{j}})\}_{\tilde{j} \in \tilde{J}}$$

tetszőleges irányított atlaszai X -nek, és tegyük fel, hogy $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ nem ekvivalens sem $\{(W_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ -vel, sem $\{(\tilde{W}_{\tilde{j}}, \tilde{\psi}_{\tilde{j}})\}_{\tilde{j} \in \tilde{J}}$ -vel; az állításhoz azt kell megmutatnunk, hogy ekkor $\{(W_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ ekvivalens $\{(\tilde{W}_{\tilde{j}}, \tilde{\psi}_{\tilde{j}})\}_{\tilde{j} \in \tilde{J}}$ -vel. Legyen $x \in W_j \cap \tilde{W}_{\tilde{j}}$, és válasszunk egy olyan $i \in I$ indexet, amelyre továbbá $x \in U_i$ is teljesül. Ekkor a $W_j \cap \tilde{W}_{\tilde{j}} \cap U_i$ nyílt halmazon

$$\tilde{\psi}_{\tilde{j}} \circ \psi_j^{-1} = (\tilde{\psi}_{\tilde{j}} \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \psi_j^{-1}).$$

A jobb oldalon álló mindkét zárójelben levő leképezés Jacobi-determinánsa feltétel szerint negatív, ezért szorzatuk pozitív. Mivel ez minden $x \in X$ pontra és $j, \tilde{j}$ indexekre teljesül, azért a fenti két irányított atlasz ekvivalens. $\square$

DEFINÍCIÓ 3.47. Legyen X egy irányítható sokaság X_α összefüggő komponensekkel. Ekkor minden X_α irányított atlaszai egy-egy ekvivalencia-osztályának választását egy X -en adott *irányított sokaság struktúrának* hívunk.

Speciálisan, ha X összefüggő, akkor X irányított atlaszai egy ekvivalencia-osztályának választása megad egy irányított sokaságot.

DEFINÍCIÓ 3.48. Tegyük fel, hogy X_1 és X_2 irányított n -dimenziós sima sokaságok, és rögzítsünk X_1 -nek (illetve X_2 -nek) egy $(U_i, \varphi_i)_{i \in A}$ (illetve $(W_j, \psi_j)_{j \in B}$) irányított atlaszát. Azt mondjuk, hogy egy $f : X_1 \rightarrow X_2$ folytonos leképezés *irányítástartó*, ha tetszőleges $i \in A, j \in B$ -re és $x \in \varphi_i(U_i \cap \psi_j^{-1}(W_j))$ -re a

$$D_{\varphi_i(x)}(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})$$

lineáris leképezés irányítástartó. Ha minden $i \in A, j \in B$ -re és $x \in \varphi_i(U_i \cap \psi_j^{-1}(W_j))$ -re a fenti lineáris leképezés irányításváltó, akkor f -et *irányításváltónak* hívjuk.

PÉLDA 3.49. (i) Legyen $\mathbf{R}$ egyenes a következő atlással: $U_1 = U_2 = \mathbf{R}$, $\varphi_1 = \text{Id} = -\varphi_2$ az identikus leképezés. Ekkor az egyetlen nemtriviális áttérési függvény $\varphi_{12} = -\text{Id}$, tehát erre az atlaszra nem teljesül a definíció. Ha azonban elhagyjuk az atlaszból a térképek bármelyikét, nem marad nemtriviális áttérési függvény, tehát a kapott atlasz már teljesíti a definíciót. Ezért $\mathbf{R}$ irányítható. Továbbá, U_1 és U_2 ellentétes irányításokat indukálnak $\mathbf{R}$ -en: azaz, Id irányításváltó az $\{(U_1, \varphi_1)\}$ és $\{(U_2, \varphi_2)\}$ atlaszok között.

- (ii) Hasonlóan belátható, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ -re $\mathbf{R}^n$ irányítható, az $\{(U_1 = \mathbf{R}^n, \varphi_1 = \text{Id})\}$ és $\{(U_2 = \mathbf{R}^n, \varphi_2 = -\text{Id})\}$ irányított atlaszokkal.

FELADAT 3.50. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}^n$ -en a fenti két atlasz pontosan akkor értelmez különböző irányítást, ha n páratlan!

ÁLLÍTÁS 3.51. *Legyen X egy irányított sokaság és tegyük fel, hogy egy G csoport simán és teljesen diszkrétén hat E -n irányítástartó transzformációkkal. Ekkor X irányítása indukál egy irányítást X/G -n. Fordítva: ha X ívszerűen összefüggő és X/G irányítható, akkor minden $f_g : X \rightarrow X$ transzformáció irányítástartó.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy X irányított és minden f_g transzformáció irányítástartó. Legyen $(U_i, \varphi_i)_{i \in A}$ egy irányított atlasza X -nek. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy az U_i halmazok jók a G -hatásra nézve. Legyen $[x] \in X/G$ tetszőleges és $x \in X$ tetszőleges reprezentánsa, amelyet tartalmazzon X -nek egy U_x térképe. Ekkor az 3.39 Állítás alapján az X/G egy $[x]$ -et tartalmazó térkép alaphalmaza az $U_{[x]} = G.U_x$ halmaz, és leképezése

$$\begin{aligned} \varphi_{[x]} : U_{[x]} &\rightarrow V_x \\ [y] &\mapsto \varphi_x(y), \end{aligned}$$

ahol $y \in U_x$. Bizonyítsuk be, hogy ez a térkép irányított! Először is, ha $x' = f_g(x) \in X$ egy másik reprezentánsa $[x] \in X/G$ -nek, akkor a $\varphi_{[x]}$ és $\varphi_{[x']}$ közti áttérési függvény (3.7)

$$\varphi_{x'} \circ f_g \circ \varphi_x^{-1},$$

ami f_g irányított volta miatt definíció alapján irányítástartó. Hasonló a bizonyítás, ha x és x' nem ugyanazt az X/G -beli osztályt reprezentálják, csupán $U_{[x]} \cap U_{[x']} \neq \emptyset$.

Az ellenkező irányú állításhoz, legyenek $x \in X$ tetszőleges, és $x' = f_g(x)$ valamely $g \in G$ -re amelyre f_g irányításváltó. Be akarjuk látni, hogy az $(U_{[x]}, \varphi_{[x]})$ atlaszból nem választható ki irányított rész-atlasz. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy $G = \mathbf{Z}/(2)$, ekkor f_g az egyetlen nem-triviális csoportelem-hatás. Vegyük először észre, hogy tetszőleges $y \in X$ -re egy irányított rész-atlaszban az $(U_{[y]}, \varphi_{[y]})$ és $(U_{[g.y]}, \varphi_{[g.y]})$ térképek legfeljebb egyike szerepelhet. Valóban, különben e két térkép közti áttérési függvény éppen

$$\varphi_{g.y} \circ f_g \circ \varphi_y^{-1}$$

lenne, ami f_g irányításváltó volta miatt irányításváltó. Legyen most $h : I \rightarrow X$ egy út x -ből x' -be, és $[h]$ a $p : X \rightarrow X/G$ vetítésre vett képe. Mivel $[h]$ képe kompakt, kiválasztható véges sok $[x_0], \dots, [x_n] \in X/G$, amelyekre $\text{Im}([h]) \subset U_{[x_0]} \cup \dots \cup U_{[x_n]}$; itt x_j -nek az $[x_j]$ azon felemeltjét nevezzük, amely a h úton van. Válasszuk $U_{[x_0]}$ -nak az U_{x_0} felemeltjét bele a rész-atlaszba. Ekkor $U_{[x_1]}$ -nek az U_{x_1} felemeltjét

kell beleválasztani a rész-atlaszba: ekkor az $U_{[x_0]}$ és $U_{[x_1]}$ térkép közti áttérési függvény ugyanis éppen a megfelelő U_{x_0} és U_{x_1} közti áttérési függvénnyel egyezik meg, ami X irányított volta miatt irányítástartó. Teljes indukcióval látható, hogy egy irányított rész-atlaszba minden $U_{[x_j]}$ -nek az U_{x_j} felemeltjét kell beleválasztani. Ám ez $j = n$ -re azt jelenti, hogy $U_{[x_n]} = U_{[g.x_0]}$ -nak az $U_{g.x_0}$ felemeltjét bele kell választani, ami az első észrevételünk miatt nem ad irányított atlaszt, mivel U_{x_0} már korábban bele lett választva. $\square$

FELADAT 3.52. Lássuk be, hogy az M Möbius-szalag nem irányítható!

FELADAT 3.53. Lássuk be, hogy a K Klein-kancsó nem irányítható!

FELADAT 3.54. Lássuk be, hogy $\mathbf{RP}^2$ nem irányítható! Mely n értékekre irányítható $\mathbf{RP}^n$?

3.7. Komplex koordináták

Az $\mathbf{R}^2$ valós síknak létezik egy kanonikus azonosítása a $\mathbf{C}$ komplex egyenessel: utóbbi kanonikus holomorf koordinátája $z = x + iy$, ahol (x, y) az $\mathbf{R}^2$ kanonikus koordinátái. Egy $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ leképezést tehát úgy is tekinthetünk, mint egy $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ leképezést. Ez alapján értelmes a következő fogalom.

DEFINÍCIÓ 3.55. Legyen F egy differenciálható felület $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ sima atlaszsal. Azt mondjuk, hogy ez az atlasz meghatároz F -en egy *Riemann-felület* struktúrát, ha minden φ_{ij} áttérési függvény holomorf. Legyen F_1, F_2 két Riemann-felület, és $f : F_1 \rightarrow F_2$ egy sima leképezés. Azt mondjuk, hogy f *holomorf*, ha valamely (vagy ekvivalens módon, bármely) térképeken holomorf. Azt mondjuk hogy F_1 és F_2 *biholomorf* Riemann-felületek, ha létezik közöttük egy diffeomorfizmus, amely inverzével együtt holomorf. Ha G egy csoport, amely simán hat F -en, akkor azt mondjuk, hogy a hatás *holomorf*, ha minden $g \in G$ -re az $f_g : F \rightarrow F$ diffeomorfizmus holomorf.

ÁLLÍTÁS 3.56. Legyen F egy Riemann-felület és G egy csoport, amely holomorf módon és teljesen diszkréten hat F -en. Ekkor az F/G felületen létezik egy természetes Riemann-felület struktúra.

BIZONYÍTÁS. Ha minden f_g leképezés holomorf, akkor a 3.39 Állítás bizonyításabeli

$$\varphi_{x'} \circ f_g \circ \varphi_x^{-1}$$

leképezések holomorfak. Mivel ezek az F/G sima atlaszának áttérési függvényei, ezért F/G -n ez az atlasz meghatároz egy Riemann-felület struktúrát. $\square$

ÁLLÍTÁS 3.57. Minden Riemann-felület irányítható.

BIZONYÍTÁS. Legyen F egy Riemann-felület valamely $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$ atlaszra nézve. Lássuk be, hogy ez az atlasz egyben irányított is. Ehhez elegendő belátni, hogy minden $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ holomorf függvényre V_1 és V_2 nyílt halmazok között és minden $x \in V_1$ -re

$$D_x \varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

megtartja $\mathbf{R}^2$ kanonikus irányítását. Legyen $z = x + iy$ a $\mathbf{C}$ standard holomorf koordinátája és jelöljük φ komponenseit ebben a bázisban (φ_1, φ_2) -vel. A Cauchy-Riemann egyenletek kimondják, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}. \end{aligned}$$

Másrészt, $D_x \varphi$ mátrixa ebben a bázisban

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Utóbbi determinánsa tehát

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 > 0,$$

ezért az új bázis is direkt. $\square$

PÉLDA 3.58. (i) Az S^2 gömb szokásos atlasza az, amely a két $(S^2 \setminus \{e\}, p_e)$ és $(S^2 \setminus \{d\}, p_d)$ térképből áll, ahol $e = (0, 0, 1)$, $d = (0, 0, -1)$, és p_e (és p_d) az e -ből (illetve d -ből) a $z = 0$ síkra való sztereografikus vetítés. Koordinátákkal,

$$p_e(x, y, z) = \frac{1}{1-z}(x, y) \quad \text{és} \quad p_d(x, y, z) = \frac{1}{1+z}(x, y).$$

Az ehhez az atlaszhoz rendelt áttérési függvény $\mathbf{C}^*$ -on az $|z| = 1$ körre vonatkozó inverzió. Valóban, mivel a

$$e, (x, y, z), p_e(x, y, z)$$

pontok egy egyenesen helyezkednek el, és hasonlóan a

$$d, (x, y, z), p_d(x, y, z)$$

pontok is egy egyenesen helyezkednek el, ezért nyilvánvaló hogy a

$$e, d, (x, y, z), p_e(x, y, z), p_d(x, y, z)$$

pontok egy síkon helyezkednek el, s így $0, p_e(x, y, z)$ és $p_d(x, y, z)$ egy egyenesen fekszenek. Másrészt, mivel $x^2 + y^2 = 1 - z^2$,

ezért $p_e(x, y, z)$ és $p_d(x, y, z)$ hosszára teljesül, hogy

$$\begin{aligned} |p_e(x, y, z)| |p_d(x, y, z)| &= \left(\frac{1}{(1-z)^2} (x^2 + y^2) \right) \left(\frac{1}{(1+z)^2} (x^2 + y^2) \right) \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^2}{(1-z)^2 (1+z)^2} \\ &= \frac{(1-z^2)^2}{(1-z)^2 (1+z)^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

tehát $p_d(x, y, z)$ és $p_e(x, y, z)$ egymás képei az egységgörre való inverzióban. Ismert, hogy a z komplex koordináta függvényeként az egységgörre való inverzió az $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ függvénynek felel meg. Ez nyilván sima, de nem holomorf függvény. Így tehát S^2 az $\{(S^2 \setminus \{e\}, p_e), (S^2 \setminus \{d\}, p_d)\}$ atlaszával sima felület, de nem Riemann-felület. Jelöljük $\bar{p}_d$ -vel a p_d leképezés konjugáltját. Ekkor viszont az $\{(S^2 \setminus \{e\}, p_e), (S^2 \setminus \{d\}, \bar{p}_d)\}$ atlasz egyetlen áttérési függvénye az egységgörre való inverzió konjugáltja, azaz a $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, ami már holomorf $\mathbf{C}^*$ -on. Tehát ezzel az atlasszal az S^2 már Riemann-felület. Az így kapott Riemann-felület neve *Riemann-féle gömb, kiterjesztett komplex sík* vagy *komplex projektív egyenes*, jelölése $\mathbf{CP}^1$.

- (ii) Legyen $\tau \in \mathbf{C}$ tetszőleges olyan komplex szám, amelyre $\Im(\tau) > 0$. Ekkor nyilván 1 és τ lineárisan függetlenek $\mathbf{R}$ felett $\mathbf{C}$ -ben. Tekintsük azt a T_τ topologikus tóruszt, amelyet úgy kapunk, hogy a $0, 1, \tau + 1, \tau$ pontok által határolt paralelogramma szemben levő oldalait páronként azonosítjuk. T_τ -nak vegyük a következő három nyílt halmazból álló fedését: U_1 a

$$0, 1, \tau + 1, \tau$$

pontok által határolt paralelogramma belseje, U_2 a

$$\frac{1+\tau}{3}, 1 + \frac{1+\tau}{3}, \tau + 1 + \frac{1+\tau}{3}, \tau + \frac{1+\tau}{3}$$

pontok által határolt paralelogramma belseje, és végül U_3 a

$$\frac{2+2\tau}{3}, 1 + \frac{2+2\tau}{3}, \tau + 1 + \frac{2+2\tau}{3}, \tau + \frac{2+2\tau}{3}$$

pontok által határolt paralelogramma belseje. Ezen halmazokon értelmezzük a φ_j leképezéseket mint identitást. Ekkor az áttérési függvények $\pm \frac{1+\tau}{3}$ -val vagy $\pm \frac{2+2\tau}{3}$ -val való eltolások, tehát többek között holomorf függvények. Így tehát definiáltunk T_τ Riemann-felületeket, amelyek mint sima felületek minden τ -ra megegyeznek, mert létezik olyan sima függvény (az

- $1 \mapsto 1, i \mapsto \tau$ $\mathbf{R}$ -lineáris kiterjesztése), amely átviszi T_i -t T_τ -ba. Ugyanakkor belátható, hogy a T_τ Riemann-felületek nem mind izomorfak.
- (iii) A 3.40 (iii) Példában előállítottuk az M Möbius-szalagnak az M^o nyílt részhalmazát mint az $\mathbf{R} \times]0, 1[$ tér hányadosát egy $\mathbf{Z}$ -hatásra nézve. Mivel $\mathbf{Z}$ csúsztatva tükrözéssel hat, ami nem holomorf leképezés (mivel a tükrözés $z \mapsto \bar{z}$ antiholomorf), ezért itt nem alkalmazhatjuk a 3.56 Állítást, tehát nem kapunk M^o -n egy természetes hányados Riemann-felület struktúráját. Ez nem véletlen: a 3.51 Állítás szerint M nem irányítható, tehát a 3.57 Állítás miatt nem létezhet rajta egyetlen Riemann-felület struktúra sem.
- (iv) A tórusz csoport-hányados konstrukciójában láttuk, hogy $\mathbf{Z}^2$ a sík eltolásaival, tehát irányítástartó mozgásokkal hat; a Möbius-szalag esetén pedig egy csúsztatva tükrözéssel, ami nem holomorf. Emlékezzünk a 3.40 (iv) Példából, hogy a K Klein-kancsó megkapható, mint $\mathbf{R}^2$ hányadosa egy olyan csoporthatásra vonatkozóan, amelyben B egy eltolás, tehát irányítástartó mozgása $\mathbf{R}^2$ -nek, A viszont egy csúsztatva tükrözés, tehát nem irányítástartó mozgás. Ezért a 3.51 Állítás és a 3.57 Állítás értelmében K -n nem létezhet Riemann-felület struktúra.
- (v) A Klein-kancsóhoz hasonlóan, a valós projektív sík is az S^2 gömbnek olyan hányadosa, amely nem tartja meg az irányítást, így a 3.51 Állítás és a 3.57 Állítás értelmében $\mathbf{RP}^2$ nem Riemann-felület.

FELADAT 3.59. Lássuk be, hogy az $\{(S^2 \setminus \{e\}, \bar{p}_e), (S^2 \setminus \{d\}, p_d)\}$ atlasz S^2 -n a 3.58 (i) Példabelivel nem-ekvivalens Riemann-felület struktúráját határoz meg, amelyek azonban biholomorfak!

3.8. Érintőtér, lokális koordinátázás

Legyen X egy sima sokaság és $x \in X$ egy pontja. Jelöljük $P_{X,x}$ -szel az olyan

$$\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$$

utak halmazát valamely $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ -ra, amelyekre $\gamma(0) = x$. Vezessünk be $P_{X,x}$ -en egy relációt:

$$\gamma \sim \gamma'$$

akkor és csak akkor, ha valamely (U, φ) térképen

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ \gamma'(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

ÁLLÍTÁS 3.60. $A \sim$ reláció független az (U, φ) térképtől és ekvivalencia-reláció.

BIZONYÍTÁS. Legyen (U_1, φ_1) és (U_2, φ_2) két térkép ugyanabból a differenciálható atlaszból, és $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ közöttük az áttérési függvény. Ekkor minden $\gamma \in P_{X,x}$ -re

$$\varphi_2 \circ \gamma = \varphi_{12} \circ (\varphi_1 \circ \gamma),$$

tehát a lánc-szabály alapján

$$\frac{d(\varphi_2 \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = D_{\varphi_1(x)} \varphi_{12} \frac{d(\varphi_1 \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Mivel φ_{12} diffeomorfizmus, azért $D_{\varphi_1(x)} \varphi_{12}$ izomorfizmus (hiszen inverze $D_{\varphi_2(x)} \varphi_{21}$, ami szintén létezik és lineáris mert φ_{21} is sima). Tehát, valamely $\gamma, \gamma' \in P_{X,x}$ -re

$$\frac{d(\varphi_2 \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi_2 \circ \gamma'(t))}{dt} \Big|_{t=0}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{d(\varphi_1 \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi_1 \circ \gamma'(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\sim$ független a térképtől. Az, hogy ekvivalencia-reláció, szintén következik. $\square$

DEFINÍCIÓ 3.61. $P_{X,x}$ hányadosát a $\sim$ ekvivalencia-relációra nézve az X sima sokaság x -beli érintőterének nevezzük, és $T_x X$ -szel jelöljük.

KÖVETKEZMÉNY 3.62. Legyen X egy n -dimenziós sima sokaság és $x \in X$. Ekkor $T_x X$ egy n -dimenziós vektortér.

BIZONYÍTÁS. Az előző állítás miatt $T_x X$ bármely (U, φ) térképen a $\varphi(x)$ -en átmenő görbék $\varphi(x)$ -beli sebességvektoraival azonosítható. Ezek halmaza nyilván a $\overrightarrow{\varphi(x)}$ vektorok tere, ahol $y \in \mathbf{R}^n$ tetszőleges. Valóban, minden ilyen sebességvektor kezdőpontja szükségszerűen $\varphi(x)$; másrészt, ha $\vec{u}$ egy tetszőleges $\varphi(x)$ kezdőpontú vektor, akkor elég kis $\varepsilon > 0$ esetén minden $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ -ra $\varphi(x) + t\vec{u} \in V$, ahol $V = \varphi(U)$. Ekkor $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\vec{u})$ egy megfelelő sebességvektorú görbe x -en keresztül. $\square$

Legyenek továbbra is (U_1, φ_1) és (U_2, φ_2) térképek X egy differenciálható atlaszából és $V_1 = \varphi_1(U_1), V_2 = \varphi_2(U_2) \subset \mathbf{R}^n$. Legyen továbbá $x \in U_1 \cap U_2$ és $y_1 = \varphi_1(x) \in V_1, y_2 = \varphi_2(x) \in V_2$ és

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + \cdots + v_n \vec{e}_n$$

egy y_1 talppontú vektor $\mathbf{R}^n$ -ben, ahol $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ az $\mathbf{R}^n$ standard bázisa a V_1 nyílt halmazon. Ekkor az előbbieket alapján $\vec{v}$ meghatároz egy osztályt $T_x X$ -ben, és ugyanezt az osztályt határozza meg a

$$D_{y_1} \varphi_{12}(\vec{v}) = \vec{v}' = v'_1 \vec{e}'_1 + \cdots + v'_n \vec{e}'_n$$

y_2 talppontú vektor, ahol $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ az $\mathbf{R}^n$ standard bázisa, ezúttal a V_2 nyílt halmazon. A többváltozós analízisből ismert képlet alapján ekkor

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix} = Jac_{y_1} \varphi_{12} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Így, ha $\vec{v}$ -t azonosítjuk $\vec{v}'$ -vel, az szükségszerűen azzal is jár, hogy a $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ bázist azonosítsuk a $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)(Jac_{y_1} \varphi_{12})^{-1}$ bázissal V_2 -n.

Legyenek most X és Y sima sokaságok, $f : X \rightarrow Y$ egy sima leképezés, $x \in X$ tetszőleges és $y = f(x)$. Ekkor f indukál egy

$$D_x f : T_x X \rightarrow T_y Y$$

lineáris leképezést a következőképpen. Legyen (U, φ) tetszőleges olyan térképe X -nek, amelyre $x \in U$ és (W, ψ) tetszőleges olyan térképe Y -nak, amelyre $y \in W$, továbbá legyen $V \in T_x X$. Legyen γ egy x -en átmenő görbe V osztályában. Rendeljük V -hez az y -on áthaladó $f \circ \gamma$ görbe osztályát:

$$D_x f(V) = [f \circ \gamma].$$

Lássuk be, hogy ez jól definiált: mivel γ sima út és f sima, ezért $f \circ \gamma$ is sima út. Tegyük fel, hogy $\gamma \sim \gamma'$, azaz

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ \gamma'(t))}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Mivel a láncszabály miatt

$$\frac{d(\psi \circ (f \circ \gamma(t)))}{dt} \Big|_{t=0} = D_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \frac{d(\varphi \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0},$$

azért ekkor

$$\frac{d(\psi \circ (f \circ \gamma(t)))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(\psi \circ (f \circ \gamma'(t)))}{dt} \Big|_{t=0}$$

is teljesül, tehát $(f \circ \gamma) \sim (f \circ \gamma')$.

DEFINÍCIÓ 3.63. A $D_x f$ leképezést f x -beli érintőleképezésének nevezzük. Azt mondjuk, hogy f *sima beágyazás*, ha f injektív és továbbá minden $x \in X$ -re $D_x f$ injektív.

FELADAT 3.64. Lássuk be, hogy az 3.27 definícióban értelmezett részsokaság érintőtere az x pontban $\ker(D_u f)$!

3.9. Riemann-féle metrika

Legyen V az $\mathbf{R}^n$ euklideszi tér egy nyílt részhalmaza, és jelöljük $\mathbf{R}^n$ standard bázisának elemeit $(e_1, \dots, e_n)$ -nel. Ekkor tehát e_j az az $n \times 1$ -es oszlopvektor, amelynek minden eleme 0 kivéve a j -ediket, ami

1. Legyen $x \in V$ tetszőleges, és jelöljük $(x_1, \dots, x_n)$ -vel a standard bázisbeli koordinátáit; ekkor tehát

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$e_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

vagy egyszerűen csak $e_j = \partial_{x_j}$. Jelöljük a duális $(\mathbf{R}^n)^*$ vektortér duális bázisát $(dx_1, \dots, dx_n)$ -nel. Ekkor definíció alapján igaz, hogy

$$x_j = dx_j(x),$$

tehát

$$x = \sum_{j=1}^n dx_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Az $x \in V$ pontot a $(\partial_{x_1}(x), \dots, \partial_{x_n}(x))$ bázisban azonosíthatjuk az $(x_1, \dots, x_n)^t$ oszlopvektorral. Legyen $g(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ szimmetrikus nemelfajuló mátrixok serege, amelynek elemei sima függvényei x -nek (azaz minden $g_{ij} : V \rightarrow \mathbf{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény x -ben). Defináljuk a következő szorzatot $T_x V$ -n: tetszőleges két

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{és} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

x kezdőpontú vektorra $\mathbf{R}^n$ -ben legyen

$$g_x(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n X_i g_{ij} Y_j = X^t g(x) Y,$$

ahol az utolsó képletben X, Y -ra mint oszlopvektorokra, g -re mint négyzetes mátrixra gondolunk. Az előbbi jelölésekkel ezt a következő alakban is írhatjuk:

$$g_x(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n dx_i(X) g_{ij} dx_j(Y),$$

tehát azt mondhatjuk, hogy a $(\partial_{x_1}(x), \dots, \partial_{x_n}(x))$ bázisában $T_x V$ -nek

$$g_x = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i dx_j.$$

ÁLLÍTÁS 3.65. Ekkor g_x egy belső szorzatot definiál $T_x V$ -n, azaz: bilineáris, szimmetrikus és $g_x(X, X) = 0$ akkor és csak akkor ha $X = 0$. Többek között, g_x definiál egy normát a $T_x V$ vektortéren a $\|X\| = g_x(X, X)$ képlet által.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, mivel $g(x)$ szimmetrikus és nemelfajuló. $\square$

PÉLDA 3.66. A $V = \mathbf{R}^n$ esetben a $g(x) = \text{Id}$ mátrixra $g_x(X, Y) = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$, ami a standard belső szorzat $\mathbf{R}^n$ -en, amelynek alakja tehát:

$$g_x = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2.$$

Legyen most $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ egy homeomorfizmus két $\mathbf{R}^n$ -beli nyílt halmaz között, $x \in V_1$, $y = \psi(x) \in V_2$, és jelöljük $(\partial_{x_1}(x), \dots, \partial_{x_n}(x))$ -szel (illetve $(\partial_{y_1}(y), \dots, \partial_{y_n}(y))$ -nal) az x -beli (illetve y -beli) standard bázis elemeit. Jelöljük továbbá ψ koordinátáit a $(\partial_{y_1}(y), \dots, \partial_{y_n}(y))$ bázisban $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ -nel. Legyen X egy tetszőleges x kezdőpontú vektor $T_x V_1$ -ben. Ismert, hogy a $(\partial_{y_1}(y), \dots, \partial_{y_n}(y))$ bázisban a $D_x \psi(X)$ vektor koordinátáit a

$$\text{Jac}_x \psi \cdot X$$

oszlop mátrix adja meg, ahol

$$\text{Jac}_x \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

a ψ leképezés x -beli *Jacobi-mátrixa*.

ÁLLÍTÁS 3.67. Legyen adva egy $g(x) = (g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ sima szimmetrikus nemelfajuló mátrixsereg V_1 -en. Ekkor létezik pontosan egy olyan $\psi_* g : V_2 \rightarrow M_n(\mathbf{R})$ sima szimmetrikus nemelfajuló mátrixsereg V_2 -n, amelyre a $D_x \psi$ izometria $T_x V_1$ és $T_y V_2$ között a g illetve $\psi_* g$ normái által definiált metrikákra. Továbbá,

$$\psi_* g(y) = (\text{Jac}_y \psi^{-1})^t g(x) \text{Jac}_y \psi^{-1}.$$

BIZONYÍTÁS. A létezés és egyértelműség nyilvánvaló, kivéve azt, hogy a kapott $\psi_* g$ simán függ y -től, ez utóbbihoz pedig nyilván elég belátni a képletet, mivel $\text{Jac}_y \psi^{-1}$ és $g(x)$ simák.

Legyenek W, Z tetszőleges y kezdőpontú vektorok $T_y V_2$ -ben. Ekkor az izometria miatt

$$\begin{aligned} g_y(W, Z) &= g_x((D_x \psi)^{-1}(W), (D_x \psi)^{-1}(Z)) \\ &= ((\text{Jac}_x \psi)^{-1} W)^t g(x) (\text{Jac}_x \psi)^{-1} Z \\ &= W^t ((\text{Jac}_y \psi^{-1})^t g(x) \text{Jac}_y \psi^{-1}) Z, \end{aligned}$$

mivel a láncszabályból $(\text{Jac}_x \psi)^{-1} = \text{Jac}_y \psi^{-1}$. □

Ez alapján az állítás alapján definiálhatjuk a szakasz leglényegesebb fogalmát.

DEFINÍCIÓ 3.68. Egy *Riemann-féle metrika* egy M sima sokaságon egy olyan $g = (g_x)_{x \in M}$ leképezés-sereg, amely minden $x \in M$ -re és minden $X, Y \in T_x M$ -hez hozzárendel egy $\mathbf{R}$ -beli $g_x(X, Y)$ értéket úgy,

hogy tetszőleges (U, φ) térképre a $g \circ \varphi(x)$ sima szimmetrikus nemelfajuló mátrixsereg legyen $V = \varphi(U)$ -n. Az (M, g) párost ekkor *Riemann-sokaságnak* hívjuk.

Legyenek most (M, g) és (N, h) Riemann-sokaságok, és $f : M \rightarrow N$ egy sima leképezés.

DEFINÍCIÓ 3.69. Azt mondjuk, hogy f *izometrikus beágyazás*, ha injektív és minden $x \in M$ -re és $X, Y \in T_x M$ -re

$$g(X, Y) = h(D_x f(X), D_x f(Y)).$$

Azt mondjuk, hogy f *izometria*, ha diffeomorfizmus és izometrikus beágyazás. M -et és N -et *izometrikusnak* mondjuk, ha létezik közöttük izometria.

MEGJEGYZÉS 3.70. Vigyázat: a metrikus terektől eltérően, a Riemann-sokaságok körében már nem igaz, hogy minden olyan $f : M \rightarrow N$ sima leképezés amelyre $g(X, Y) = h(D_x f(X), D_x f(Y))$, szükségszerűen injektív: például, a $q : \mathbf{R} \rightarrow S^1$ fedőleképezés az $\mathbf{R}$ feletti euklideszi metrikával és az ez által S^1 -en indukált Riemann-metrikával ellenpélda. Ezért az injektivitási feltételt itt nem hagyhatjuk el.

Az izometrikus beágyazás definíciójához hasonlóan értelmezhető az következő fogalom. Tegyük fel, hogy (M, g) egy Riemann-sokaság és N egy sima sokaság, és adott egy $f : N \rightarrow M$ leképezés, amelyre minden $x \in N$ -re $D_x f$ injektív. Ekkor értelmezhetünk egy h_x szimmetrikus nemelfajuló bilineáris formát $T_x N$ -en: bármely $X, Y \in T_x N$ -re legyen

$$h_x(X, Y) = g_{f(x)}(D_x f(X), D_x f(Y)).$$

Mivel $D_x f$ injektív, h_x valóban nemelfajuló, és nyilvánvalóan szimmetrikus és bilineáris. Továbbá belátható, hogy ha f sima akkor h_x simán függ x -től.

DEFINÍCIÓ 3.71. A fent definiált h Riemann-metrikát N -en a g f általi *visszahúzottjának* (vagy a g által az N részsokaságon *indukált metrikának*) nevezzük, és $f^*(g)$ -vel jelöljük.

3.10. Gauss-féle metszet-görbület

Legyen (M, g) egy 2-dimenziós Riemann-sokaság, és (U, φ) egy térképe. Legyen (∂_x, ∂_y) a szokásos bázis $\mathbf{R}^2$ -ben, és (dx, dy) a duális bázisa $(\mathbf{R}^2)^*$ -nek.

DEFINÍCIÓ 3.72. Ha g az U térképen

$$g(x, y) = \lambda(x, y)^2 (dx^2 + dy^2)$$

alakú valamely $\lambda : V \rightarrow \mathbf{R}_+$ függvényre, akkor azt mondjuk, hogy a (∂_x, ∂_y) lokális koordináták *izotermálisak*.

Az ebben a szakaszban következő eredményeket bizonyítás nélkül elfogadjuk.

TÉTEL 3.73 (A. Korn, L. Lichtenstein). *Minden (M, g) 2-dimenziós Riemann-sokaság tetszőleges m pontjának létezik olyan U környezete, amelyen léteznek izotermális koordináták.*

Legyen továbbá

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

a Laplace-operátor $\mathbf{R}^2$ -n.

TÉTEL 3.74 (J. Liouville). *Legyen (M, g) egy 2-dimenziós Riemann-sokaság, $m \in M$, és (∂_x, ∂_y) izotermális koordináták m körül. Ekkor a fenti jelölésekkel a*

$$K(m) = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2}(\varphi(m))$$

mennyiség megegyezik M m -beli Gauss-féle metszetgörbületével.

Emlékeztetőül: a $K(m)$ Gauss-féle metszetgörbület az M egy tetszőleges $\mathbf{R}^3$ -ba való lokális izometrikus beágyazásában a $\kappa_1(m)$ és $\kappa_2(m)$ főgörbületeinek szorzata.

TÉTEL 3.75 (K. F. Gauss, Theorema Egregium). *$K(m)$ független az $\mathbf{R}^3$ -ba való lokális izometrikus beágyazásától, kizárólag M Riemann-metrikájától függ.*

4. FEJEZET

A Riemann-felületek osztályozása

4.1. A hiperbolikus sík

További vizsgálódásainkban fontos szerepe lesz a Bolyai-féle hiperbolikus geometriának. Emlékeztetünk, hogy a Bolyai-geometria az euklideszitől abban különbözik, hogy az 5. axióma — mely szerint tetszőleges e egyeneshez és rajta nem fekvő p ponthoz létezik pontosan egy olyan egyenes, amely párhuzamos e -vel és áthalad p -n — helyett ennek ellenkezőjét tesszük fel.

A Bolyai-geometria megértéséhez célszerű elvonatkoztatni az általunk megszokott egyenes, kör, szög, stb. fogalmaktól, és pl. az egyenesre mint valamely “1-dimenziós” alakzatra gondolni. A pontok azonban a Bolyai-geometriában is a pontoknak felelnek meg, hiszen ezek az euklideszi axiomarendszerben úgy vannak értelmezve, mint “olyan alakzatok, amelyek további részekre nem oszthatók”. Erre többféle szemléletes mód is létezik, amelyek az általunk “megszokott” euklideszi sík valamely részében modellezi a H hiperbolikus síkot, és annak egyeneseit valamely jól ismert alakzatoknak felelteti meg. Mi az ún. *Poincaré-féle körmodell*t használjuk.

4.1.1. Poincaré kör-modellje és izometriák. A modellünk alaphalmaza legyen $D = D^2$, a nyílt egységkörlemez $\mathbf{R}^2$ -ben. Jelöljük $\partial\bar{D}$ -vel a D tartomány lezártjának S^1 peremét (amely a “végtelen távoli pontoknak” felel meg). Nevezzünk *hiperbolikus egyenesnek* egy olyan K (euklideszi értelemben vett) összefüggő körívet $\bar{D}$ -ben, amely két különböző pontban metszi $\partial\bar{D}$ -t és a körök metszésszöge mindkét pontban derékszög. Az euklideszi körbe itt (és a továbbiakban mindig) beleértjük a “végtelen sugarú” köröket is, amik ebben az esetben a 0-n átmenő átmérőket jelentik; ezek tehát speciálisan hiperbolikus egyenesek, de látni fogjuk, hogy nem játszanak kitüntetett szerepet, mivel izometriával tetszőleges másik hiperbolikus egyenesbe átvihetők. Vegyük észre, hogy D bármely pontpárjához létezik egy és csak egy olyan hiperbolikus egyenes, amely mindkét ponton áthalad. Végül, legyen két ilyen egymást metsző K_1 és K_2 hiperbolikus egyenes által bezárt *hiperbolikus értelemben vett szög* a metszéspontjaikban vett érintők által bezárt szög. Könnyű látni, hogy ez független attól hogy melyik metszéspontban tekintjük az érintőket, és ugyanúgy, mint az euklideszi esetben, jól értelmezett attól eltekintve, hogy α -t vagy $\pi - \alpha$ -t értünk alatta.

Belátható, hogy ezekkel a definíciókkal olyan H geometriai rendszert kapunk, amely teljesíti az abszolút geometria axiómáit, de amelyben nem teljesül az 5. axióma. Ezek a fogalmak lehetővé teszik, hogy — hasonlóan az euklideszi esethez — értelmezzük az izometria és a mozgáscsoport fogalmát.

DEFINÍCIÓ 4.1. A H hiperbolikus sík egy *izomertiája* egy olyan $f : H \rightarrow H$ bijekció, amely minden hiperbolikus egyenest hiperbolikus egyenesbe visz át, és megtartja az ezek közti előjeles szögeket. Egy olyan izometriát, amely a szögek irányát is megtartja, a hiperbolikus sík egy *mozgásának* hívunk.

Emlékeztessünk most a körre való inverziók néhány alapvető tulajdonságára:

- (i) egy körre való inverzió minden kört egy körbe visz át;
- (ii) egy körre való inverzió megőrzi a szögek nagyságát, de megváltoztatja az irányukat;
- (iii) páros sok körre való inverzió szorzata holomorf függvény, páratlan sok körre való inverzió szorzata pedig antiholomorf függvény $\mathbb{C}$ -n;
- (iv) az euklideszi sík (vagy annak valamely nyílt részhalmaza) minden olyan bijektív leképezése saját magára, amely teljesíti a (i) és (ii) feltételeket, szükségszerűen valamely körre való inverziók szorzata.

Ezek közül az (i)-(iii) középiskolából ismertek, a (iv) pedig Riemann egy tételéből következik, mely szerint a sík minden szögváltó transzformációja (amely tehát megőrzi a szögek nagyságát, de megfordítja irányításukat) holomorf függvénye a z koordinátának, amelyet itt bizonyítás nélkül elfogadunk.

Ezek alapján be tudjuk bizonyítani a következő alapvető állítást, amely egyben kifejezi a hiperbolikus síknak az euklideszi síkkal vett analógiáját is.

ÁLLÍTÁS 4.2. A H hiperbolikus sík izomertiái a Poincaré-féle körmodellben pontosan azon $f : D \rightarrow D$ homeomorfizmusok, amelyek előállnak valamely hiperbolikus egyenesre vonatkozó inverziók D -re való megszorításának véges szorzataként. Továbbá, f akkor és csak akkor mozgás, ha előáll páros sok ilyen inverzió szorzataként (és ekkor nem áll elő páratlan ilyen szorzatként). Végül, bármely két H -beli, egymástól ugyanakkora távolságra levő p, p' és q, q' pontpárra létezik pontosan két olyan g hiperbolikus izometria, amelyre $g(p) = q$ és $g(p') = q'$: egy mozgás és egy irányítás-váltó transzformáció.

BIZONYÍTÁS. Először lássuk be, hogy az állításban szereplő f -ek ténylegesen hiperbolikus izomertiák: ehhez elegendő észrevenni, hogy ha K egy hiperbolikus egyenes és i_K a rá vonatkozó inverzió, akkor a $\partial\bar{D}$ körvonal egy olyan körvonalba megy át i_K által, amely derékszöget

zár be K -val, és ugyanazon pontokban metszi, mint $\partial\bar{D}$. Mivel ilyen körvonal csak egy létezik, kapjuk hogy i_K invariánsan hagyja $\partial\bar{D}$ -t. Továbbá, mivel i_K a K körvonal pontjait fixen hagyja, ezért az előbbiből az is következik, hogy i_K a $\partial\bar{D}$ belsejét (vagyis D -t) saját magába viszi. Tehát i_K megszorítása D -re egy homeomorfizmus. A fenti (i) és (ii) tulajdonságokból következik, hogy i_K egy hiperbolikus izomertia, és nyilvánvalóan ilyenek szorzata is az.

Az, hogy minden hiperbolikus izomertia az előírt alakú, pontosan a (iv) tulajdonság. Végül, a (ii) tulajdonság alapján egy körre való inverzió megfordítja a szögek irányát, tehát ugyanez igaz minden páratlan szorzatukra is, ellenben tetszőleges páros szorzatuk megtartja.

A harmadik állításhoz tekintsük H -ban a p és q pontokat összekötő szakasz e_1 felező-merőlegesét. Legyen i_1 az e_1 -re vonatkozó tükrözés. Ekkor $i_1(p) = q$. Ha $i_1(p') = q'$, akkor találtunk egy keresett tulajdonságú irányítás-váltó transzformációt. Ha i_2 -vel jelöljük a $p'q'$ egyenesére vonatkozó tükrözést, akkor $i_2 \circ i_1$ olyan mozgás, amely szintén rendelkezik a keresett tulajdonsággal. Ha $i_1(p') \neq q'$, akkor tekintsük az őket összekötő egyenes e_2 felező-merőlegesét: mivel a feltétel és i_1 távolság-tartó tulajdonsága miatt q azonos távolságra helyezkedik el $i_1(p')$ -től és q' -től, azért $q \in e_2$. Ha most i_2 -vel jelöljük az e_2 -re vonatkozó tükrözést, akkor $i_2 \circ i_1$ olyan mozgás, amely rendelkezik a keresett tulajdonsággal. Ekkor, i_3 -mal jelölve a $p'q'$ egyenesére vonatkozó tükrözést, $i_3 \circ i_2 \circ i_1$ olyan irányítás-váltó izomertia, amely szintén a kívánt tulajdonságú. Az, hogy több ilyen izometria nem létezik, az euklideszi esethez hasonlóan következik. $\square$

4.1.2. Fuchs-féle modellek.

DEFINÍCIÓ 4.3. A H hiperbolikus sík egy O egyenes szakaszát valamely egyenese és ezen kitüntetett két különböző pont ad meg, amely pontokat a szakasz *végpontjainak* nevezzük. H egy *sokszöge* egy olyan alakzat H -ban, amelyet véges sok $O_1, \dots, O_N$ egyenes szakasz határoz meg, amelyekre minden $1 \leq j \leq N$ -re O_j két végpontja megegyezik O_{j+1} és O_{j-1} egy-egy végpontjával (ahol j -t modulo N értjük), és az O_j -knek ezen végpontokon kívül nincs más metszéspontjuk. Egy sokszöget *szabályosnak* hívunk, ha minden $1 \leq j \leq N$ -re az O_j és O_{j+1} közti szög nagysága megegyezik, és létezik H -nak olyan izometriája, amely O_j -t O_{j+1} -be viszi.

ÁLLÍTÁS 4.4. Minden $g \geq 2$ -re a g nemű felület univerzális fedőtere a H hiperbolikus sík. Többek között, Σ_g Riemann-felület.

BIZONYÍTÁS. A tórusz esetében látott ötleteket használjuk, ám van egy lényeges különbség: amíg a tórussszal az euklideszi síkot tudtuk izometriák segítségével csempézni, addig $g \geq 2$ -re ugyanez a hiperbolikus síkra igaz. Az alapvető lemma a következő.

LEMMA 4.5. *Létezik H -ban $\frac{2\pi}{4g}$ -szögű, 0 középpontú szabályos $4g$ -szög.*

BIZONYÍTÁS. Használjuk a Poincaré-féle kör-modellt, és induljunk ki ebben egy "ideális" $4g$ -szögből, azaz egy olyanból, amelynek minden csúcsa a $\partial\bar{D}$ végtelen távoli egyenesen van, mégpedig az egymást követő csúcsok egymástól ugyanakkora euklideszi távolságra. Ilyen ideális $4g$ -szög nyilvánvalóan létezik: ehhez elég felosztani $\partial\bar{D}$ -t $4g$ egyenlő részre, és az egymást követő csúcsokat összekötni $\partial\bar{D}$ -ra merőleges euklideszi körökkel. Jelöljük ezen körök középpontjait $P_1, \dots, P_{4g}$ -vel, és sugarukat r_0 -val. Minden $t \geq 0$ -ra és $1 \leq j \leq 4g$ -re legyen $P_j(t)$ a OP_j euklideszi félegyenesen a 0-tól $r_0 + t$ távolságra levő pont; ekkor többek között $P_j(0) = P_j$. Válasszuk továbbá $r(t) > 0$ -t úgy, hogy a $P_j(t)$ középpontú $r(t)$ sugarú $K_j(t)$ euklideszi kör merőleges legyen $\partial\bar{D}$ -re. Nyilvánvaló, hogy r folytonos, monoton növekvő függvénye t -nek a $[0, \infty[$ -n. Rögzített $t \geq 0$ -ra legyen $O_j(t)$ a $K_j(t)$ hiperbolikus egyenesnek a $K_j(t) \cap K_{j-1}(t)$ és $K_j(t) \cap K_{j+1}(t)$ végpontok által meghatározott szakasza. Nyilvánvalóan ezen metszetek nem üresek, és az $O_1(t), \dots, O_{4g}(t)$ $4g$ -szög szabályos, hiszen az $O_j(t)$ oldalt $O_{j+1}(t)$ -be viszi egy 0 középpontú, $\frac{2\pi}{4g}$ szögű euklideszi forgatás, amely két O -n áthaladó euklideszi egyenesre — s így speciálisan két hiperbolikus egyenesre — való tükrözés szorzata. Könnyen látszik, hogy abból hogy r folytonos függvénye t -nek a $[0, \infty[$ intervallumon, következik hogy az $O_j(t)$ és $O_{j+1}(t)$ közötti (j -től független) $\alpha(t)$ szög is folytonos t -ben. Konstrukció alapján $\alpha(0) = 0$, és könnyen meggyőződhetünk róla, hogy amint $t \rightarrow \infty$, úgy $\alpha(t) \rightarrow \pi - \frac{2\pi}{4g}$. Végül vegyük észre, hogy ha $g \geq 2$, akkor

$$0 < \frac{2\pi}{4g} \leq \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \leq \pi - \frac{2\pi}{4g},$$

tehát a közbenső-érték tétel alapján létezik olyan $t_0 \in]0, \infty[$, amelyre $\alpha(t_0) = \frac{2\pi}{4g}$. Ekkor tehát $O_1(t_0), \dots, O_{4g}(t_0)$ egy $\frac{2\pi}{4g}$ -szögű szabályos $4g$ -szög. $\square$

Ezek után a bizonyítás egy többlépcsős (végtelen) rekurzióra épül. Legyen először is $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1}$ egy $\frac{2\pi}{4g}$ -szögű szabályos $4g$ -szög, amely a Lemma alapján létezik; itt a -1 kitevők azt jelentik, hogy az adott oldal a negatív irányban irányított, míg azok az oldalak, amelyeknek nincs -1 kitevőjük, a pozitív irányban. Ekkor, a 4.2 Állítás értelmében létezik egyetlen olyan g_{A_1} izometriája H -nak, amely átviszi az A_1 jelű oldalt az A_1^{-1} jelűbe úgy, hogy az irányításuk is megegyezzek, továbbá az eredeti $4g$ -szög és annak

$$g_{A_1}(A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_g B_g A_g^{-1} B_g^{-1})$$

képe csak az A_1^{-1} jelű oldalon messe egymást. Konkrétan, g_{A_1} a következő két tükrözés kompozíciójával nyert izometriája H -nak: az 0 pontot a B_1 oldal felezőpontjával összekötő egyenesre való tükrözés, majd az A_1^{-1}

oldalra való hiperbolikus tükrözés (euklideszi körre inverzió). Nevezzük p -nek a B_1 és A_1^{-1} jelű oldalak közös végpontját, és q -nak az A_1^{-1} és B_1^{-1} jelű oldalak közös végpontját. Ekkor p -nél két $4g$ -szög találkozik az A_1^{-1} oldal mentén, és mivel g_{A_1} szögtartó, ezért a két $4g$ -szög által p -ben lefedett szögtartomány nagysága $\frac{4\pi}{4g}$, és az itt összefutó oldalak címkézése sorban B_1, A_1^{-1} és B_1^{-1} ; q -nál ugyanez a két $4g$ -szög találkozik szintén összesen $\frac{4\pi}{4g}$ szöget lefedve, az összefutó élek pedig B_g^{-1}, A_1^{-1} és B_1^{-1} . Legyen továbbá $g_{B_1}^{-1}$ a következő izometriája H -nak: az 0 pontot az A_1^{-1} oldal felezőpontjával összekötő egyenesre való tükrözés, majd az B_1 oldalra való hiperbolikus tükrözés, és tekintsük az eddigi két $4g$ -szögünk képét $g_{B_1}^{-1}$ által. Könnyű meggondolni, hogy p -nél ekkor négy $4g$ -szög lesz összeragasztva, összesen $\frac{8\pi}{4g}$ szöget lefedve, és az összefutó élek sorban a $B_g^{-1}, A_1, B_1, A_1^{-1}$ és B_1^{-1} címkéket viselik.

Ezt az eljárást folytathatjuk: mindaddig, amíg a p -ben illeszkedő $4g$ -szögek száma nem éri el a $4g$ -t, vegyük az egyik szélső p -beli C oldalt, a mellette levő oldal "felezőmerőlegesére" tükrözzük az addig kapott ábrát, majd az eredményre alkalmazzuk a C -re vonatkozó tükrözést. A végeredmény p körül $4g$ számú $4g$ -szög lesz, amelyek egyszeresen fedik p egy teljes kis környezetét (tehát az általuk fedett szögtartomány 2π), és ahol az összefutó csúcsok sorban az $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, \dots, A_g, B_g, A_g^{-1}, B_g^{-1}$ címkéket viselik.

Hasonlóan járhatunk el az eredeti szabályos $4g$ -szög összes többi csúcspontjára. Ekkor kapunk egy olyan sokszöget, amelyben az eredeti szabályos $4g$ -szög összes csúcspontja már belső pont. Nevezzük ezen sokszög csúcsait *első szintű csúcsoknak*. Jelöljük d -vel az eredeti $4g$ -szög éleinek legkisebb távolságát az 0-tól. Az első szintű csúcsok hiperbolikus értelemben vett távolsága a 0 origótól ekkor legalább $2d > 0$. Továbbá, az első szintű csúcsok által körbezárt sokszög belsejében tartalmaz minden olyan pontját a hiperbolikus síknak, amely 0-tól $2d$ -nél kisebb távolságra helyezkedik el.

Hajtsuk most végre ugyanezt a tükrözéses eljárást minden első szintű csúcsra mindaggig, amíg minden első szintű csúcs a kapott sokszögnek belső pontja lesz. Az így nyert sokszög csúcsait nevezzük *második szintűeknek*. A második szintű csúcsok távolsága 0-tól legalább $3d$, és az általuk körbezárt sokszög belsejében tartalmaz minden olyan pontját a hiperbolikus síknak, amely 0-tól $3d$ -nél kisebb távolságra helyezkedik el.

Ezt az eljárást alkalmazva a szintek száma szerinti rekurzióval, kapjuk az egész D parkettázását szabályos hiperbolikus $4g$ -szögekkel, amelyeket hiperbolikus mozgásokkal vihetünk egymásba. A D hányadosa erre a teljesen diszkrét hiperbolikus csoportthatásra pontosan Σ_g . Mivel D egyszeresen összefüggő, ez egy univerzális fedőtér. Végül, minthogy minden hiperbolikus mozgás holomorf leképezés, a 3.56 Állításból következik, hogy Σ_g egy Riemann-felület. $\square$

KÖVETKEZMÉNY 4.6. Minden $A_i, B_i : I \rightarrow \Sigma_g$ hurok $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -beli osztálya nem-triviális, és ezen elemek generálják $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -t.

BIZONYÍTÁS. A 4.4 Állítás bizonyításából látszik, hogy ha rögzítjük a $p_0 \in \Sigma_g$ alappontnak a $p \in H$ felemeltjét, akkor minden $A_i, B_i : I \rightarrow \Sigma_g$ hurok p kezdőpontú felemeltjének végpontja p_0 -nak valamely p -től különböző felemeltje (egy p -vel szomszédos első szintű csúcs) lesz. Többek között, mivel H egyszeresen összefüggő, azért a 2.57 Tétel miatt minden A_i, B_i hurok $\pi_1(\Sigma_g, p_0)$ -beli osztálya különbözik az $1 \in \pi_1(\Sigma_g, p_0)$ elemtől. Továbbá, a 2.57 Tétel értelmében a fundamentális csoport a parkettázás összes q csúcsainak halmazával bijektív, és nyilván bármely q -ra létezik út p -ből q -ba a parkettázás élein keresztül. Mivel minden él képe Σ_g -ben valamely A_i vagy B_i hurok ezért ebből kapjuk a második állítást is. $\square$

MEGJEGYZÉS 4.7. A bizonyításunk kiindulása egy szabályos hiperbolikus sokszög választása volt. Látjuk azonban, hogy a bizonyítás nem használta a szabályosságot, csupán azt, hogy az inverz címkés oldalak izometriákkal egymásba vihetők és hogy a szögek összege 2π . Ezért tetszőleges, ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező $4g$ -szöggel megismételhető a bizonyítás, és az eljárás meghatároz egy Riemann-felület struktúrát Σ_g -n. Tehát, a következő paramétereink vannak a Riemann-felület struktúrára: minden A_k -ra és B_k -ra egy "oldalhossz" (ekkor A_k^{-1} és B_k^{-1} hossza már meghatározott), és az egymást követő $A_1, B_1, \dots, A_g^{-1}, B_g^{-1}$ oldalak közötti szög (ekkor a B_g^{-1} és A_1 oldalak közti szög már meghatározott). Ez összesen $2g + (4g - 1) = 6g - 1$ paraméter. Ezekre a paraméterekre teljesülni kell annak, hogy az általuk meghatározott tööttvonal záródik: az utolsó végpont elvileg tetszőleges D -beli elem lehet, tehát ez 2 feltétel. Marad tehát $6g - 3$ paraméter. Ezek közül azonban izomorf Riemann-felület struktúrákat határoz meg két olyan $4g$ -szög, amelyek hiperbolikus izometriával egymásba vihetők. Mivel a hiperbolikus izometriák $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$ csoportja 3-dimenziós, marad $6g - 6$ paraméter.

4.2. A Riemann-féle gömb

4.3. Az uniformizációs tétel

Ebben a szakaszban kimondjuk az egyváltozós komplex analízis egyik alapvető tételét, amelynek nagy szerepe van a geometriai vizsgálatainkban is.

Kezdjük egy nyilvánvaló fogalommal:

DEFINÍCIÓ 4.8. Legyenek E és F Riemann-felületek, $p : E \rightarrow F$ egy holomorf leképezés, amely egyben egy fedőleképezés is. Ekkor azt mondjuk, hogy E *Riemann-féle fedőfelülete* F -nek.

Ez alapján Riemann uniformizációs tétele a következőképpen szól.

TÉTEL 4.9 (Uniformizációs tétel). *Minden F Riemann-felületnek létezik egy Riemann-féle univerzális fedőfelülete, amely az alábbi Riemann-felületek pontosan egyikével biholomorf:*

- (i) S^2
- (ii) $\mathbf{C}$
- (iii) D^2 .

5. FEJEZET

A Gauss-Bonnet tétel

5.1. Az Euler-Poincaré karakterisztika

5.2. Felületelem, integrálás

5.3. A tétel

Irodalomjegyzék