Kognitív tudományok és matematika

Szabó Szilárd, BME Matematika Intézet

2020. július 8.

A csodás 7-es szám (Magical number 7)

Kísérleti megfigyelés:

az emberi agy által rölvid távon megjegyezhető elemek száma $n \approx 7$. (Értsd: $3 \leq n \leq 10$.)

Példa: Luck–Vogel (1997) "Change detection paradigm".

A kísérleti alanyok látnak egy n különböző színből álló diagramot $100ms$ ideig, majd azután egy másikat. Ezután el kell dönteniük, hogy a diagramok azonosak voltak-e. Kimenetel: $n = 3$ színig kiváló teljesítmény, $n \geq 4$ esetén egyre rosszabb.

Munkamemória modellek

A rövid távú (munka-)memória (working memory, WM) jelenleg elfogadott modelljei:

- "fiók"-modell (slot model): az agyban el van különítve WM céljára n rekesz, mindegyikben tárolható egy elem;
- folytonos erőforrás-modell: az agyban el van különítve WM céljára egy bizonyos mennyiségű "tárhely".

Érvek a fiók-modell mellett:

- a Luck–Vogel kísérlet (ám ez valójában mindkét modellel összeegyeztethető);
- Cowan-elmélet (1995): azokat az elemeket tartja WM-ban az agy, amelyekre párhuzamosan odafigyel, és egyszerre $3-4$ elemre tud odafigyelni.

Ellenérv a fiók-modellel szemben: kísérletileg nem mutatható ki, hogy összefüggés van a WM és a párhuzamos figyelem-feladatok között.

WM korlát oka

Alapkérdés

Milyen pszichológiai mechanizmus okozza a WM fent bemutatott (viszonylag alacsony) korlátját?

Általánosan elfogadott válaszok

Aktív fenntartási (maintenance) mechanizmusok, individuális elem megjegyzésének csökkenése (decay) pl. fáradtság miatt.

Javasolt alternatív válasz

Endress–Szabó, 2017, Psychological Review: elemek közötti interferencia.

Javasolt magyarázat előnyei:

- tisztán matematikai levezetés, minimáils feltételek mellett;
- összeegyeztethető mind a fiók-, mind a folytonos erőforrás-modellel;
- mindhárom fő kognitív kapacitás (WM, párhuzamos figyelem, subitizing) korlátjának egyöntetű magyarázata.

Interferencia

Példa: Egy kísérlet alanyai hallják a 4 7 2 3 9 számsorozatot, ezután a 5 3 8 6 1 sorozatot. A feladat: eldönteni, hogy a 2-es szám szerepelt-e a második sorozatban. Kimenetel: a résztvevők egy része azt válaszolja, hogy a 2-es szám szerepelt a második sorozatban.

Magyarázat: az első sorozatban hallott 2-es szám interferál a második sorozat számaival (pro-aktív interferencia).

Interferencia tulajdonságai: megfigyelések alapján,

- rendkívül sok WM folyamatban fontos szerepet játszik;
- már egyetlen korábbi elem is jelentős interferenciát okoz;
- a kizárásával növekszik a WM-kapacitás.

WM modell

Egy kísérlet alanyainak egymás után sorolunk elemeket (pl.: számokat), és utána valamilyen módon ellenőrizzük, hogy hányra emlékeznek. Jelöljük $P \geq 0$ esetén M_P-vel a P első elem felsorolása után átlagosan megjegyzett elemek számát (várható értékét). Ekkor nyilván $0 \leq M_P \leq P$.

Interferencia-mentes modell: Legyen $R \in (0, 1)$ egyetlen felsorolt elem megjegyzésének valószínűsége. Ekkor, egy naiv modell:

$$M_{P+1} = M_P + R.$$

Interferenciás modell:

$$M_{P+1} = M_P + R - I(M_P),$$

ahol $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ valamely valós függvény, amely az interferenciáért felel.

Az interferencia-függvény tulajdonságai

Feltevések:

- I folytonosan differenciálható;
- minden $M > 0$ esetén $I'(M) \in (0, 2)$ (töbek közt, I szigorúan monoton növekszik);
- $I(0) = 0$.

Magyarázat:

- $I'(M)$ jelentése:

$$I'(M) \approx \frac{I(M+h) - I(M)}{h},$$

ami $h = 1$ esetén $I(M+1) - I(M)$, és természetes feltételezni, hogy két egymás utáni elem megjelenése között I növekszik, ám 2-nél nem többel.

- $I(0) = 0$ matematikailag nem feltétlenül szükséges, de pszichológiai szempontból természetes.

Lehetséges határértékek

Minden monoton növekvő sorozat konvergens (esetleg $+\infty$-be).

Lehetőségek:

1. $\lim_{M\to\infty} I(M) > R$;
2. $\lim_{M\to\infty} I(M) = R$;
3. $\lim_{M\to\infty} I(M) < R$.

1. tétel: kapacitás-korlát az 1. esetben

Ha $\lim_{M\to\infty} I(M) > R$, akkor

$$\lim_{P\to\infty} M(P) = I^{-1}(R) = K.$$

Bizonyítás

Vezessük be a

$$g(M) = M + R - I(M)$$

függvényt; ekkor tehát $M_{P+1} = g(M_P)$. Keressük g fix-pontját:

$$g(M) = M,$$

ami ekvivalens az $I(M) = R$ egyenlettel.
Banach-féle fixpont-tétel: ha $|g'(K)| < 1$, akkor M_P konvergál K-hoz. Mármost:

$$g'(M) = 1 - I'(M) \in (-1, 1).$$

Ráadásul, a konvergencia exponenciálisan gyors: $q = |I'(K)|$-val

$$|K - M_P| \leq \frac{q^P}{1-q}(M_1 - M_0).$$

Levágott interferencia-függvény

Pszichológiai szempontból indokolt az interferencia-függvény értékét R-nél "levágni":

$$\hat{I}(M) = \min(I(M), R).$$

Tulajdonágok:

- $\hat{I}$ folytonosan differenciálható a K pont kivételével mindenhol;
- $\hat{I}$ szigorúan monoton növekszik $[0, K]$-on, állandó R értékkel $[K, +\infty)$-on.

Kapacitás-korlát: érvényben marad.

Gyakorlatilag korlátos kapacitás

2. tétel: kapacitás-korlát a 2. esetben

Ha $\lim_{M\to\infty} I(M) = R$, akkor $\forall A > 0, \varepsilon > 0$ létezik olyan P_0 hogy minden $P > P_0$ esetén

$$M_{P+A} - M_P < \varepsilon.$$

A kapacitás ekkor tehát gyakorlati szempontból korlátos.

Például: $\varepsilon \ll 1$ és $A = 10^6$ esetén, $M_{P+10^6} \approx M_P$.

Bizonyítás

Vegyük észre, hogy

$$M_{P+1} - M_P = R - I(M_P) \to 0 \quad \text{amint } R \to \infty.$$

Innen:

$$M_{P+A} - M_P = \sum_{k=P}^{P+A-1} (R - I(M_k)) \leq A(R - I(M_P)).$$

Rögzítsünk tetszőlegesen $A, \varepsilon > 0$ értékeket.
Konvergencia-feltevés $\Rightarrow$ létezik olyan P_0, hogy minden $P > P_0$ esetén teljesül:

$$R - I(M_P) < \frac{\varepsilon}{A}.$$

Ekkor:

$$M_{P+A} - M_P \leq A(R - I(M_P)) < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon.$$

Katasztrofális interferencia

Közös jelenség számos idegsejt-hálós modellben

French 1999, Kirkpatrick et al. 2017, stb.: az újonnan prezentált információ teljesen “felülírja” a korábban elsajátított tudást, azaz az utóbbi megszűnik. Ezt nevezzük katasztrofális interferenciának.

Kísérleti megfigyelés

- Felnőtteknél nincs katasztrofális interferencia;
- Feigenson et al. (2002, 2005): gyermekeknél van katasztrofális interferencia! Az alanyok egyszerre mutatott 3 étel közül tudnak koherensen választani, 4 közül nem.

Javasolt magyarázat

Endress–Szabó, 2020, Cognitive Science: Egyszerre (simultaneous)/ szakaszonkénti (sequential) prezentáció; adaptatív stratégia: az egyszerre prezentált elemek szakaszonkénti feldolgozása.

Knops–Sengupta modell

Adott N idegsejt, az i-edik idegsejt állapota a t időpillanatban leírható egy $x_i(t) \in [0,1]$ "gerjeszettségi szinttel".

Knops–Sengupta modell

Az idegsejtek állapota teljesíti a

$$\dot{x}_i(t) = -\lambda x_i(t) + \alpha F(x_i(t)) - \beta \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} F(x_j(t)) + I_i(t) + \text{zaj}$$

nemlineáris sztochasztikus közönséges differenciál-egyenlet rendszert, ahol:

- $\lambda > 0$ a csökkenési tényező;
- $\alpha > 0$ az öngerjeszetési tényező;
- $\beta > 0$ a gátló tényező;
- $F(x) = \frac{x}{1+x}$;
- $I_i(t) \geq 0$ az i-edik idegsejtet a t időpillanatban érő külső inger.

Megjegyzések a Knops–Sengupta modellről

- A WM és a kis számok feldolgozását hivatott modellezni;
- $F(0) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$;
- más hasonló tulajdonságú F függvényt is lehetne tekinteni;
- minden idegsejt minden másikra ugyanakkora hatással van – hálózati topológia: teljes gráf;
- a zaj-tényezőt elméletben gyakran elhanyagoljuk, ám numerikus szimulációkban lehet pl. Gauss-féle zajt is feltételezni;
- $N \gg 1$ esetén nincs általános matematikai képlet a rendszer megoldására.

Egyszerre prezentált elemek vizsgálata

Választunk S idegsejtet ($1 \leq S \leq N$), amelyeket egyszerre és azonos mértékben gerjesztünk, a maradék $N - S$ idegsejtet pedig nem gerjesztjük. Egyszerűség kedvéért az $1 \leq i \leq S$ idegsejteket gerjesztjük.
Szimmetria $\Rightarrow$ a gerjesztett (illetve nem gerjesztett) idegsejtek állapota t időpillanatban is megegyezik. Tehát, összesen két gerjesztettségi szint van.
Többváltozós analízis $\Rightarrow$ ha létezik határértéke a rendszernek, akkor anak helye egy stacionárius pont.

Stacionárius pontok egyszerre prezentált elemek esetén

Stacionárius pontok: $x_{S+1} = \cdots = x_N = 0$, és ha $1 \leq i \leq S$, akkor

$$0 = -\lambda x_i + \alpha F(x_i) - \beta(S-1)F(x_i),$$

azaz

$$x_i = \frac{\alpha - \beta(S-1)}{\lambda} - 1.$$

Legyen

$$S_{\max} = 1 + \frac{\alpha - \lambda}{\beta}.$$

Észrevétel: Ha $S \geq S_{\max}$, akkor a rendszer egyetlen stacionárius pontja $\vec{x} = \vec{0}$.

Katasztrofális interferencia egyszerre prezentált elemek esetén

3. tétel:
Ha $S \geq S_{\max}$, akkor $\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$.

Biz.:
Legyen

$$g(x) = (1 - \lambda)x + (\alpha + \beta)F(x) - S\beta F(x),$$

ekkor

$$g'(x) = (1 - \lambda) + (\alpha - (S - 1)\beta)F'(x).$$

Látjuk, hogy $S \geq S_{\max}$ esetén $|g'(0)| < 1$.

4. tétel
Ha $S \leq S_{\max}$, akkor $\lim_{t \to \infty} \vec{x}(t)$ létezik, és megegyezik a $\vec{0}$-n kívüli egyetlen stacionárius ponttal.

Tetszőleges gerjesztési függvény esete

Legyen most

$$F : R_+ \to [0, 1]$$

tetszőleges folytonos valós függvény. Legyen $x_1(0) = \cdots = x_S(0) > 0$ és $x_{S+1} = \cdots = x_N = 0$.

5. tétel

Ekkor létezik a

$$\dot{x}_i(t) = -\lambda x_i(t) + \alpha F(x_i(t)) - \beta \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} F(x_j(t))$$

rendszernek legalább egy stacionárius pontja.

Bizonyítás

Legyen $x(t) = x_1(t), y(t) = x_N(t)$, és

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} [(1-\lambda)x + (\alpha - (S-1)\beta)F(x) - \beta(N-S)F(y)]_+ \\ [(1-\lambda)x + \alpha F(y) - S\beta F(x) - \beta(N-S-1)F(y)]_+ \end{pmatrix}$$

ahol $z_+ = \max(z,0)$. Keresünk olyan $(x_0, y_0) \geq 0$ értékeket, amelyekre $f(x_0,y_0) = (x_0,y_0)$.
Észrevétel: ha $R > \frac{\alpha}{\lambda}$ és $x, y \in [0,R]$, akkor

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &\leq (1-\lambda)x + \alpha F(x) \\ &\leq (1-\lambda)R + \alpha < R, \end{aligned}$$

és hasonló becslés igaz f második komponensére is. Azaz: f megőrzi az $[0,R] \times [0,R]$ négyzetet.
Brouwer-féle fixpont-tétel $\Rightarrow$ f-nek létezik fixpontja.

Alsó becslés a legnagyobb gerjeszettségi szintre

Legyen

$$M(t) = \max_i x_i(t).$$

Ekkor M teljesíti:

$$\dot{M}(t) \geq \alpha F(M(t)) - \lambda M(t) - (S-1)\beta F(M(t)) = f(M(t)).$$

Ezért $M(t)$ alulról becsülhető a

$$\dot{N}(t) = f(N(t))$$

egyenlet megoldásaival.

Stacionárius pontok és stabilitásuk

Stacionárius pontok és stabilitás

Tegyük fel, hogy $\lambda < \alpha - (S-1)\beta$. Ekkor N-nek két stacionárius pontja létezik: az instabil $M_0 = 0$ és a stabil

$$M_S = \frac{\alpha - (S-1)\beta}{\lambda} - 1.$$

Biz.: Számolás $\rightsquigarrow$ stac. pontok: M_0, M_S, és

$$f'(M) = (\alpha - (S-1)\beta)\frac{1}{(1+M)^2} - \lambda.$$

Többek között,

$$f'(M_S) < 0 < f'(M_0).$$

Grobman-Hartman tétel $\Rightarrow$ M_0 instabil, M_S stabil.