Modulusterek geometriája

Szabó Szilárd

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2016 május 2.

Jelölések

C: projektív görbe $\mathbb{C}$ felett
E: Hermite-féle sima vektor-nyaláb C-n
∇: unitér konnexió E-n
θ: Higgs-mező, azaz egy globális szelése $End(E) \otimes K_C$-nek

Harmonikus nyalábok

A Yang-Mills egyenletek 2-dimenziós redukciója (Hitchin 1987):

$$\nabla^{(0,1)}\theta = 0$$
$$F_{\nabla} + [\theta, \theta^{\dagger}] = 0.$$

Elsőrendű, nem-lineáris parciális differenciál-egyenlet rendszer.
Egy megoldása: harmonikus nyaláb.

Parabolikus nyalábok

Rögzítsünk $t_1, \ldots, t_n \in C$ pontokat.
Parabolikus struktúra t_i-ben (Mehta–Seshadri 1980): minden $1 \leq i \leq n$-re egy filtrálás :

$$0 = F_i^{l_i} \subset F_i^{l_i - 1} \subset \cdots \subset F_i^1 \subset F_i^0 = E_{t_i}$$

és parabolikus súlyok:

$$1 > \alpha_i^{l_i} > \cdots > \alpha_i^0 \geq 0.$$

Parabolikus nyaláb: E vektornyaláb és minden t_i-ben egy parabolikus struktúra.

Parabolikus harmonikus nyalábok

Logaritmikus / irreguláris parabolikus harmonikus nyaláb (Simpson 1990 / Biquard–Boalch 2004):

- harmonikus nyaláb legfeljebb elsőrendű / tetszőleges rendű pólusokkal t_i-ben,
- minden t_i-ben egy (kompatibilis) parabolikus struktúra.

Modulustér: bizonyos szingularitás-paraméterekkel rendelkező parabolikus harmonikus nyalábok összességét paraméterező topologikus tér.

Néhány kapcsolódó téma

- izomonodromikus egyenletek, Stokes-jelenség (Fuchs, Garnier, Schlesinger, ... , Jimbo–Miwa–Ueno 1981)
- Riemann–Hilbert megfelelés (Deligne 1970, Kashiwara 1980)
- $\pi_1(C \setminus \{t_1, \ldots, t_n\})$ reprezentációi, Teichmüller-elmélet (Goldmann 1984)
- integrálható rendszerek (Hitchin 1987)
- tegez-varietások (Nakajima 1999)
- elektromos-mágneses dualitás (Witten 2005)
- Donaldson–Thomas invariánsok (Kontsevich–Soibelman 2013, Gaiotto–Moore–Neitzke 2013)

Nahm-transzformált

Legyen $C = \mathbb{C}P^1$. Ekkor (bizonyos feltételek mellett) létezik egy integrál-transzformált:

$$\mathcal{N} : (E, \nabla, \theta, F^{\bullet}_{\bullet}) \mapsto (\widehat{E}, \widehat{\nabla}, \widehat{\theta}, \widehat{F}^{\bullet}_{\bullet}),$$

ahol

$$\mathcal{N}(.) = R^1(\pi_2)_*(\pi_1^*(.) \otimes P),$$

P a Poincaré-nyaláb $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ felett, és

$$\pi_j : \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$$

a j-edik komponensre vetítés. (Analógia:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\sqrt{-1}x\xi} \mathrm{d}x.)$$

Nahm-transzformált, folyt.

$\mathcal{N}$ teljesíti a következő tulajdonságokat:

- parabolikus harmonikus nyalábot ugyanilyen megoldásba visz (2007);
- egy előjel erejéig involutív: $\mathcal{N}^2 = (-1)^*$ (2007);
- holonóm $\mathcal{D}$-modulusok Fourier–Laplace transzformáltjával megegyezik (2012);
- hiper–Kähler izometria modulus-terek között (2014, 2015).

Felhasznált eszközök: Szinguláris parciális differenciál-operátorok (a Dirac-operátor) Fredholm-elmélete, L^2-kohomológia, hiperkohomológia, spektrál-sorozatok, kévék deformáció-elmélete.

Alacsony-dimenziós modulusterek

Az alább felsorolt geometriai objektumok modulustereinek explicit leírása differenciál-geometriai és kéve-elméleti módszerekkel:

- Etesi Gáborral közösen, a k-Taub–NUT terek feletti, 1 energiájú, gyorsan lecsengő SU(2) Yang–Mills insztantonok (2011);
- Ivanics Péterrel és Stipsicz Andrással közösen, a $\mathbb{C}P^1$ feletti, egyetlen 4-edrendű pólussal rendelkező, Gl_2-harmonikus nyalábok (2016).

Harmonikus nyalábok spektrál-előállítása

Létezik egy kategória-ekvivalencia a következő kategóriák között :

1. harmonikus nyalábok C-n, bizonyos alakú szingularitásokkal,
2. bizonyos tulajdonságú torzió-mentes koherens kévék egy C feletti vonalfelületen.

Továbbá, a megfelelő modulustereken ez az ekvivalencia egy holomorf Poisson-izomorfizmust határoz meg (2015).

Látszólagos szingularitások és deformációk

- Pozitív válasz N. Katz egy kérdésére (1996): Létezik egy 1-súlyú tiszta Hodge-struktúra a logaritmikus konnexiók modulusterén, amelynek $(1,0)$-komponense a Fuchs-féle egyenletek terének érintő-nyalábja (2012).
- A Gl_2 esetben pozitív válasz Singer és van der Put egy kérdésére (2003): a logaritmikus konnexiók modulustere a várt dimenziójú varietás (2013).
- Masa-Hiko Saito-val közösen (előkészületben): logaritmikus λ-konnexiók látszólagos szingularitásainak algebrai geometriai konstrukciója, változó-szétválasztás, biracionális leképezés a logaritmikus Higgs-nyalábok modulusteréből egy vonalfelület feletti pontok Hilbert-sémájába.

További kutatási tervek

- Az összes 2 komplex dimenziós, a $\mathbb{C}P^1$ feletti irreguláris parabolikus harmonikus nyalábokat paraméterező modulustér explicit leírása.
- Irreguláris Deligne–Simpson probléma: mely lokális szingularitás-adatokra létezik megfelelő harmonikus nyaláb?
- Irreguláris harmonikus nyalábok kéve-elméleti leírása tetszőleges valós reduktív struktúra-csoport esetén.