Készítő: Szabó Viktor

Jelölések:

bizonyítás

fontos

ez is

ez nem annyira

itt meg rajz kell: ######

az integrálás határai ált. értelem szerűek (f Є R[a,b] esetén pl. a és b)

itt meg nem volt kedvem átírni a formulát (vsz mert bonyolult volt) JEGYZET!!!

MATEMATIKUS BSC ZÁRÓVIZSGA TÉTELSOROK -- 2009

(A) ALGEBRA, DISZKRÉT MATEMATIKA, GEOMETRIA TÉTELSOR

Algebra I

A-1 A csoport fogalma (részcsoportok, normálosztók, izomorfizmustételek)

Csoport	
n-vált. művelet	H nem üres H^n → H-ba való egyért. leképezése
alg. struktúra	nem üres hz, >= 1n-vált. műv.
félcsoport	(S,·) kétvált. műv. ellátott alg. stukt., ahol a „·” asszoc.
csoport	fcsop, van neutr. elem és minden elemnek van inverze
b/j/két- old. neutr. elem	ea=a(=ae), ha van b/j-old. akkor e=f
b/j/két- old. inverz	a'a=e(aa”), ha van b/j-old., akkor a'=a”
példák	(Z,+),(Q,+),(R,+),(C,+) (Q\{0},·),(R\{0},·),(C\{0},·) (Z_m,+),(Z_p\{0},·), p prím kvaterniócsoport: G={+-1,+-i,+-j,+-k} 4-edfokú diédercsoport: D_4={e,t,f,f^2,f^3,tf,tf^2,tf^3} n-edfokó diédercsoport
Részcsoport	
H rcsop-ja G-nek	ab Є H van H-ban neutr. elem minden H-belinek van H-beli inverze

	VAGY: HH része H, H^-1 része H
tétel (H rcsop-ja G-nek)	HH^-1 része H
tétel (H_n rcsop-ja G-nek)	∩ H_n is rcsop-ja G-nek
{K}	K nemüres része G, K-t tart. rcsop. metszete K által gen. rcsop.
tétel ({K} elemei)	a_1^l_1· a_2^l_2 ·... alakú, ahol a_i Є K, l_i Є Z
ciklikus rcsop/csop	g Є G, {g} c.rcsop, ha G={g} → G cikl. csop.
tétel ({g} mivel izomorf)	{g} izomorf (Z,+), vagy (Z_n,+)
tétel (c.csop. rcsop-ja)	c.csop. minden rcsop-ja cikl.
Normálosztó	
mellékosztály	G csop. H rcs szerinti bo mo: a·H (jo.: H·a) részhalmazok
bo. mellékosztályok …	G egy osztályozását adják
bo. mo-k száma = …	jobboldaliaké. Jel: |G:H|
t. (Lagrange)	|G|=|H|·|G:H|
g rendje	ordó(g): {g} száma
minden elem rendje...	osztja a csop. rendjét
prímrendű csop. …	cikl.
csop prímrendű <->...	két rcsop-ja van.
N norm. rcsop	aN=Na (bo/jo. mo. =), jel: N⊲G
példa	D_4-ben N={e,f,f^2,f^3}
konjugálás	φ(x)=a^-1xa (a-val való konjugálás)
	φ(xy)=φ(x)φ(y) → homomorfizmus
	G-t G-be képezi → endomorfizmus
	φ(axa^-1)=x → szürjektív
	φ(x)=φ(y) → x=y → injektív
	tehát φ G-nek önmagára való inj. hom. → automorfizmus
tétel (N normálosztó)	N megegyezik minden konjugáltjával (N=a^-1Na)
t. (nrcs-k metszete)	nrcs-k metszete is nrcs
{H,N}	H rcs, N nrcs, {N,H}=HN=NH
t. (2-indexű rcsop.)	csoport bmely 2-indexű rcsopja normálosztó
Kongruencia	
kongruencia	(a alfa b, c alfa d → ac alfa bd) a alfa b → ac alfa bc → a^-1 alfa b^-1
áll. (N szerinti osztályozás =)	N-hez tart. mo-k szerinti oszt. által def. ekv. rel. = kongr. rel.
t. (alfa kong.rel, van olyan N nrcs...)	van N nrcs, h G alfa-osztályai = N szerinti mo-k + fordítva
	(biz.: N=[e]_alfa, N rcsop (N^2 része N, N^-1 része N), N norm. rcsop., H=[c]_alfa=c·N)
t. (G csop, nrcs <-> kongr.rel)	
G/N	G csop, N nrcs. G N szerinti mellékosztályai által alkotott faktorcsop.: G/N
φ magja	φ: G → G' hom., N={g Є G, φ(g)=e'}⊲G
t. (hom. magja <-> nrcs)	
t. (Hom. tétel)	Ha φ G → G' szürjektív hom. (epimorf.), akkor G' ~ G/N (N: ker(φ))
t. (G N-et tart. rcs <-> G/N rcs)	N⊲G, kölcs. egyért. megf. van a kettő között, nrcs-knek nrcs felel meg
t. (1. iz.-t)	H tetsz, N nrcs → H ∩ N⊲H, és {H,N}/N ~ H/(H ∩ N) + RAJZ!
	biz.: hom. tételen múlik
t. (2. iz.-t)	N,M⊲G, N része M → M/N⊲G/N, és (G/N)/(M/N) ~ G/M + RAJZ!
	biz.: hom. tételen múlik

A-2 Nevezetes részcsoportok, permutáció-csoportok

Részcsoport

H rcsop-ja G-nek	ab Є H
	van H-ban neutr. elem
	minden H-belinek van H-beli inverze
	VAGY: HH része H, H^-1 része H
tétel (H rcsop-ja G-nek)	HH^-1 része H
tétel (H_n rcsop-ja G-nek)	∩ H_n is rcsop-ja G-nek
{K}	K nemüres része G, K-t tart. rcsop. metszete K által gen. rcsop.
tétel ({K} elemei)	a_1^l_1· a_2^l_2 ·... alakú, ahol a_i Є K, l_i Є Z
ciklikus rcsop/csop	g Є G, {g} c.rcsop, ha G={g} → G cikl. csop.
tétel ({g} mivel izomorf)	{g} izomorf (Z,+), vagy (Z_n,+)
tétel (c.csop. rcsop-ja)	c.csop. minden rcsop-ja cikl.

Normállánc

normállánc	G csop. rcsopjainak G-vel kezdődő, e-vel végződő véges sorozata, ha a közbülső rcsop. mindegyike nrcs az őt megelőzőben, r a lánc hossza, G_(i-1)/G_i faktorcsop: normállánc faktorai
izomorf	G=G_0 >= (része) G_1 … >= G_r =e, G=H_0 >=... >=H_s=e izomorfak, ha faktoraik között kölcs. egyért. megf. létesíthető úgy, h a megfeleltetett faktorok izomorfak (ekkor r=s)
finomítás	G=G_0 >= (része) G_1 … >= G_r =e a G=H_0 >=... >=H_s=e finomítása, ha minden G_i-hez van H_j, hogy G_i=H_j
kompozíciólánc	ism. nélküli, nem finomítható n.l.
t. (Jordan-Hölder)	Ha G-nek van komp.l., akkor bmely két komp.l. egymással izomorf
	biz.: r szerinti teljes indukcióval, 1. iz. tételen múlik
áll. (∞ cikl. csop).	nincs komp. lánca
t. (Scheier-féle finomítási)	minden csop. bmely két norm.l.-ának vannak izomorf finomításai
csoport feloldható	ha van olyan n.l, melynek faktorai komm. csop.
áll. (véges csop. feloldható)	<-> komp.l.-ának faktorai kommutatívak
áll. (véges csop. feloldható II.)	<-> komp.l.-ának faktorai prímrendű cikl. csoportok (mivel a komp. lánc faktorai egysz. csoportok, és komm. egyszerű csoportok ciklikusak, prímrendűek)

Permutációcsoportok

permutáció	n elemű hz önmagára való kölcs. egyért. leképezései
S_n	ezek csoportja: n-edfokú szimm. csop.
ciklus	(i_1,i_2...i_k), i_1 → i_2, … (k<=n)
transzpozíció	(i_1,i_2) ciklus
két ciklus diszjunkt (def + áll.)	ha nem tartalmaznak közös elemet, egymással fölcserélhetők
t. (minden perm. felírható...)	(tényezők sorrendjétők eltekintve) egyértelműen diszjunkt ciklusok szorzataként
t. (minden perm. felírható... II.)	transzpozíciók szorzataként – nem egyértelmű
permutáció páros	ha a ∏(x_i-x_k) szorzatot fixen hagyja
A_n	ps permutációk⊲S_n
n>=5	A_n egyszerű → S_n nem feloldható
t. (Cayley)	minden n-edr. csop. izomorf egy n-edfokú szimm. csop. valamely rcsop-jával (=n-edfokú perm. csoporttal)

Centrum, centralizátor, normalizátor

centrum	C={c Є G, (minden g Є G-re) cg=gc}

t. (centrum nrcs. G)	
megj. (centrum)	olyan elemek hza, amelyek G minden belső automorfizmusánál fixen maradnak
a centralizátora	C(a)={h Є G, ah=ha}
C(a) G-beli indexe =...	kül. konjugáltak számával
t. (ha G rendje p^n...)	C!={e} (p prím, n>=1)
köv. (|C|...)	p-hatvány
t. (p^2 rendű csoport...)	kommutatív
A normalizátora, centralizátora	N(A)={g Є G, gA=Ag},
	C(A)={g Є G, (minden a Є A-ra) ga=ag}
	N(a)=C(a)
	C(A)=∩ C(a) (a Є A)
megj. (A rcs. kül. konj. száma =...)	A normalizátorának G-beli indexével

A-3 Abel csoportok és szabad csoportok

Direkt szorzat	
külső direkt szorzat	G_1xG_2, csoportot alkot a (g_1,g_2)·(g'_1,g'_2)=(g_1g'_1,g_2g'_2) műveletre, (e_1,e_2) az egységelem
	A={(g_1,e_2)...}, B=..., A,B nrcs G_1xG_2-ben
	AB=G_1xG_2, A ∩ B = (e_1,e_2)
belső direkt szorzat	A,B nrcs G-ben, G=AxB, ha AB=G, A ∩ B = {e}
	csak akkor, ha minden G-beli elem ab alakú (a Є A, b Є B)
áll. G n-edrendű cikl. csop.	n=rs, (r,s)=1, akkor G=C_rxC_s
t. G n-edrendű, n=... →	n=∏(p_i^(k_i)) → G=C_n=∏(C_(p_i^(k_i)))
Abel-csoport	(kommutatív)
p-csoport	ha minden elem rendje p valamely hatványa (p prím)
t. (minden véges Abel-csoport...)	kül. p prímekhez tartozó p-csoportok direkt szorzata
t. (minden Abel-féle p-csoport...)	felbontható véges sok p-hatványrendű cikl. csop. direkt szorzatára
t. (véges Abel-cs. alaptétele)	minden véges Abel-cs. felbontható véges sok prímhatványrendű cikl. csoport direkt szorzatára, ez a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű
köv. (G n-edrendű)	n=∏(p_i^(k_i)) → minden p_i-hez van p_i-edrendű elem
Szabad csoportok	
def.	X nemüres hz
	minden x Є X-hez rendeljünk x, x^-1 jeleket
	G_X: X unió X^-1 halmaz elemeiből véges sorozatok (xx^-1 tiltott) + üres sorozat (e)
	művelet: w_1w_2: egymásután írjuk, egymás melletti tiltott betűket elhagyjuk
t. (G_X csop.)	tetsz. X nemüres hz esetén G_X csoport a fenti művelettel → X feletti szabad csoport, X: szabad generátorrendszer
t. (G_X → G homomorf.)	G_X szabad csop, G tetsz. csop. X minden eleméhez hozzárendeljük G 1-1 elemét, akkor van olyan φ: G_X → G homomorfizmus, hogy φ(x) = g_x
	biz.: w=∏(x_i^(e_i)), akkor φ(w)=∏(g_(x_i)^(e_i)) hom.
megj. (ha g_x generálja G-t)	ha a {g_x, x Є X} hz generálja G-t, akkor φ hom. szürjektív
t. (csop <-> szabad csop. faktorcsop.)	minden csop. izomorf vmely szabad csoport egy faktorcsoportjával
	biz.: előző tétel (φ szürj. hom.) + hom. tétel miatt

Csoport megadása definiáló relációval	
példa	X={x}, G_x={...,x^(-1),x^(-1),e,x,x^2...}
	w=x^n
	{w}={x^n} rcsop G_x-ben
	G_x/{x^n} n-edrendű ciklikus csop, amelyben x^n=e
reláció	N nrcs az X feletti G_x szabad csoportban, G izomorf G_x/N faktorcsopoorttal, akkor ∏(x_i^(k_i)) Є G_x benne van N-ben <-> x_i-knek megfelelő G-beli g_i elemekkel fölírt ∏(g_i^(k_i))=e (G-ben) → az ilyen alakú kifejezéseket relációknak nevezzük
példa	G={a,b|a^m=e,b^2=e,abab=e}
	X={x,y}, G_x, N={x^m,y^2,xyxy szavak által generált nrcs}
	G=G_x/n=D_m (m-edfokú diédercsoport)
t. (Dyck)	Legyen G és G' uazon szimbólumok által generálva. Tfh G-hez tart. def. egyenlőségek mindegyike szerepel a G'-höz tart. def. egyenlőségek között → akkor a G' csopor a G egy faktorcsop-jával izomorf

A-4 p-csoportok, Sylow-tételkör

Sylow-tételek	
p-csoport	ha minden elem rendje p valamely hatványa (p prím)
p-Sylow részcsoport	G véges n-edrendű, p^k|n, (k max.)
	P rcsop, rendje p^k → p-Sylow rcsop
	ha p nem szerepel n felbontásában → G p-Sylow rcs: {e}
t. (Sylow-I)	G véges, minden p prímhez tartalmaz p-Sylow rcsoportot
	biz.: teljes ind. G rendjére (ha |G|=1 → igaz), esetszét-választás: p | |C| (Lagrange, Hom-tétel), p !| |C| (ind. miatt)
t. (Cauchy)	p|G rendje → tartalmaz p-edrendű elemeket
	biz.: Sylow-I miatt
t. (véges p-csoport rendje...)	p-hatvány
	biz.: Cauchy miatt
t. (Sylow-II)	véges csoport p-Sylow rcsopjainak száma = 1 (mod p)
	biz.: ekv. rel. a p-Sylow rcsoportok halmazán (P_1 elemeivel való konjugálás alapján), 0 mod p db. rcsop. minden rsz. konj. osztályában + P_1 → áll.
t. (Sylow-III)	véges csoport p-Sylow rcsopjai egymás konjugáltjai
	biz.: ha nem igaz, akkor 0 mod p db konj. van, de Sylow-II. miatt 1 mod p van → áll.

A-5 Polinomgyűrű, F[x] és Z ideáljai és faktorai

Gyűrűk	
gyűrű	(R,+,·) kétműveletes alg. strukt.: (R,+) komm. csop., (R,·) félcsoport, és a „·” disztributív a „+”-ra nézve
	ha (R,·) komm., akkor a gyűrű komm.
kitüntetett elemek	bo/jo vllosztó (van b!=0, hogy ab=0)
	nullosztómentes gyűrű (nincs a nullelemtől kül. bo/jo nullosztó)
	integritási tartomány (komm, nullosztómentes gy.) - Pl. valós számok

	egyszerűsítés (ab=ac → b=c, ha a nem nullosztó)
	bo/jo egységelem (ea=a)
	bo/jo inverz (a'a=e)
t. (ha a-nak van bo. inverze, …)	akkor a nem bo. nullosztó R-ben
Részgyűrű, ideál, faktorgyűrű, karakterisztika	
részgyűrű	A nemüres R részgyűrűje, ha A gyűrű az R-beli műveletekre nézve (azaz a-b, a·b Є A)
egyoldali-, kétoldali-, triviális-, főideál	a-b Є A, és minden A-beli a, és R-beli r-re ra Є A
	minden bo. ideál részgyűrű
	A ideál, ha bo és jo ideál
	A={0}
	Jel: (a_1,a_2...)_b: a_i elemek által generált bo. ideál
	(a_1,a_2...)_j: a_i elemek által generált jo. ideál
	(a_1,a_2...): a_i elemek által generált ideál
	(a): főideál
egyszerű gyűrű, zérógyűrű	egyszerű gyűrű: nincs trivitől kül. ideálja
	példa: minden test egyszerű gyűrű
	zérógyűrű: komm. add. csop. a·b=0 művelet → gyűrű
	itt: minden add. részcsop. ideál
	nullgyűrű: egy eleme van (a 0)
t. (ideál szerinti mellékosztályok...)	R gyűrű tetsz. ideálja szerinti mellékosztályai az R egy kompatibilis osztályozását alkotják. Fordítva, az R gyűrű tetsz. komp. osztályozásának osztályai R egy ideáljának mellékosztályai.
	Megj: (R,+,·) gyűrű, I ideálja R-nek, ekkor I rcsopja az (R,+) add. csoportnak, R komm. → I⊲R
	Komp. osztályozás: (H,·) alg. strukt. U H_i osztályozása kompatibilis, ha minden i,j-re létezik k, hogy H_i·H_j része H_k
t. (faktorgyűrű)	R gyűrű tetsz. I ideálja szerinti mellékosztályok az osztályok összeadására és szorzására nézve gyűrűt alkotnak. Ez az R gyűrű I szerinti faktorgyűrűje: R/I
karakterisztika	R gyűrű karakterisztikája az n poz. egész, ha nR={0}, és n a legkisebb ilyen. n=0, ha minden a Є R és minden n pozitív esetén na=0 → a=0
t. (nullosztómentes gyűrű kar.)	Nullosztómentes gyűrű karakterisztikája 0,1 vagy prím.
Polinomok	
F test feletti polinom	F test, a_i Є F tetsz., a_0!=0. f(x)=∑(a_i x^(n-i)) F test feletti n-edfokú pol.
	f fokszáma: f* (f*=n)
két polinom egyenlő...	ha azonos fokszámúak, és a megfelelő együtthatók rendre megegyeznek
műveletek (mit alkot)	összeg, szorzat
	kommutatív gyűrűt alkot
	szorzás nem nem invertálható F[x]-0-án
maradékos osztás	f(x) pol. g(x)!=0 polinommal való maradékos osztása = F feletti q(x), r(x) meghatározása, amelyekre f(x)=q(x)g(x)+r(x), ahol r*<g* vagy r=0
	mindig egyértelműen elvégezhető
oszthatóság (def, tul.(4))	g(x)|f(x), ha létezik q(x), h f(x)=g(x)q(x)
	f(x)|g(x) és g(x)|h(x) → f(x)|h(x)
	f(x)|g(x) → f(x)|g(x)h(x) minden h(x)!=0 polinom esetén
	f(x)|g1(x) és f|g2(x) → f(x)|h1(x)g1(x) + h2(x)g2(x)

	$f(x)\|g(x) \rightarrow f(x)\|cg(x)$ és $cf(x)\|g(x)$ minden $c!=0$ konstansra
(legnagyobb) közös osztó	$h(x)$ közös osztója $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, ha mindkettőnek osztója
	$d(x)$ legnagyobb közös osztója $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, ha közös osztója, és $d(x)$ osztható bármely közös osztóljukkal
	van legnagyobb közös osztó (konstans szorzó erejéig egyértelmű)
rel. prímek	két pol. rel. prím, ha közös osztói a test elemei
	f és g rel. prímek <-> létezik u év v pol.: $fu+gv=1$
	p rel. prím f-fel és g-vel, akkor fg-vel is

Irreducibilis polinomok

irreducibilis polinom (def, tul. (4))	F test feletti n-edfokó ($n>=1$) polinom irred, ha nem bontható fel két, n-nél kisebb fokszámú F feletti pol. szorzatára
	minden elsőfokú pol. irred.
	f irred → cf is ($c!=0$ konstans)
	p irred, f tetsz. pol, akkor p és f rel. prímek VAGY $p\|f$
	p irred, $p\|fg \rightarrow p\|f$ vagy $p\|g$
t. (felbonthatóság)	Minden F feletti legalább elsőfokú f polinomhoz megadhatók olyan F feletti irred p_i polinomok, hogy $f(x) = \prod(p_i(x))$. Ha $f(x)=\prod(q_i(x))$, akkor $p_i(x)=c\cdot q_j(x)$
t.(Schönemann-Eisenstein)	Ha egy egész együtthatós $\sum(a_i x^i)$ primitív pol. esetén megadható olyan p prím, hogy $p\|a_0$, … $p\|a_{n-1}$, de p nem osztja a_n-t, és p^2 nem osztja a_0-t, akkor a pol. irred. Q felett.
	pol. primitív, ha együtthatóinak legnagyobb közös osztója 1.

Polinomok felbontása

algebrai zártság	F test alg. zárt, ha minden F feletti legalább elsőfokú polinomnak van zérushelye F-ben.
t. (algebrai lezárt)	Minden testhez megadható olyan legszűkebb test, amely az eredetit tartalmazza, és algebrailag zárt (<- algebrai lezárt)
t. (algebra alaptétele)	A komplex számok teste algebrailag zárt
t. (c zérushelye f-nek)	c komplex zh egy komplex együtthatós $f(x)$ polinomnak <-> $f(x)$-nek a $g(x)=x-c$ elsőfokú polinommal való maradékos osztásánál maradékként 0-t kapunk.
	módszer $x-c\|f(x)$ kiszámítására: Horner-módszer
t. (gyöktényezős fölbontás)	minden komplex eh-ós $f(x)=\sum(a_i x^{n-i})$, $n>=1$ polinomhoz léteznek olyan c_i komplexek, hogy $f(x)=a_0 \prod(x-c_i)$ → ez az $f(x)$ gyöktényezős fölbontása
köv.	következmény: a komplex ehós polinomok gyűrűjében az irred. polinomok az elsőfokú polinomok.
t. (valós polinom)	minden legalább elsőfokú valós ehós polinom felbontható elsőfokú és/vagy negatív diszkriminánsú másodfokú valós ehós polinomok szorzatára
köv.	következmény: a valós ehós polinomok gyűrűjében az irreducibilisek az elsőfokúak és a neg. diszkriminánsú másodfokúak.
megj.	Vieta-képletek

Többváltozós polinomok

def.	F test feletti $x_1,...,x_m$ változós polinomon olyan többtagú összeggel definiált kifejezést értünk, amelyben az egyes tagok a $\cdot\prod(x_i^{k_i})$ alakúak ($a \in F$, k_i-k nemneg. egészek)
fokszám	$a\cdot\prod(x_i^{k_i})$ fokszámán $\sum(k_i)$-t, a polinom fokszámán a tagjaihoz tartozó fokszámok maximumát értjük
szimmetrikus	egy $f(x_1,...,x_m)$ többváltozós polinomot szimmetrikusnak nevezünk, ha változóinak bármely permutációjával az eredetivel megegyező polinomot kapunk
	pl. $f(x1,x2)=x1^2+x2^2+x1x2$

t. (szimm. pol. felbonthatósága)	minden test feletti szimm. polinom előállítható szimm. polinomok polinomjaként, amely polinom együtthatója az alaptestből való (→ elemi szimm. pol.)
Egyértelmű prímfaktorizáció	
a osztja b-t	egységelemes int. tartományban a|b, ha van c: b=ac
oszthatóság tul.	reflexív (a|a) és tranzitív (a|b, b|c → a|c)
egység	egységelem osztói
t. (a és b asszociáltak <-> …)	ha csak egységfaktorban különböznek
	VAGY: ha (a)=(b) (generált ideálok megegyeznek)
irreducibilis	a!=0 irred, ha nem egység, és minden osztója egység vagy a-val asszociált.
prímelem	a!=0 prímelem, ha nem egység, és a|xy → a|x v. a|y
t. (prímelem ? irred.)	a prímelem → irred. (vfelé nem igaz)
t. (felbonthatóság feltétele)	R egységelemes int. tart.
	csak akkor bontható fel minden a!=0 végessok prímelem szorzatára, ha
	i, R nem tartalmaz főideálok végtelen, szig. mon. növő láncát
	ii, R minden irred. eleme prímelem
Polinomgyűrű ideáljai	
Főideálgyűrű	olyan egységelemes int. tart., amelyben minden ideál főideál
t. (prímfakt.)	minden főideálgyűrűben érvényes az egyért. prímfakt.
Euklideszi gyűrű	egys. int. tart., ha φ: R → Z+ U {0}, ami R nemnulla elemeihez poz. számot rendel úgy, hogy minden a,b!=0 eleme R-hez van q,r eleme R, hogy a=bq+r, ahol r=0 vagy φ(r)<φ(b)
t. (eukl. gyűrű...)	minden euklideszi gyűrű főideálgyűrű → F[x] is
max. feltétel	R gyűrű balideáljaiban teljesíti a max. feltételt, ha balideáljainak tetsz. nemüres hz-ában van >= 1 max. elem
	VAGY: nincs szig. mon. növő, végtelen lánc
t. (max. felt. teljesül <-> …)	ha bmely L balideálja végesen generált
Noether-gyűrű	R komm. gyűrű Noether-gyűrű, ha minden ideálja végesen generált.
t. (Hilbert-tétel)	Ha R egységelemes Noether-gyűrű, akkor az R[x] polinomgyűrű is Noether-féle.

A-6 A testelmélet alapjai

Test fogalma	
test	(R,+,·) gyűrű, ahol (R\{0},·) csoport
példa	(Q,+,·), (R,+,·), (C,+,·), (a+bi+cj+dk, a,b,c,d Є R → Quaternió-test)
megj. (test elemei)	legalább 2
t. (test, ha...)	véges nullosztómentes gyűrű >=2 elemmel
Ideálok testben	
egyoldali, kétoldali ideál	a-b Є A, és minden A-beli a, és R-beli r-re ra Є A
	A ideál, ha bo és jo ideál
áll. (ideálok testben)	testnek nincs nemtrivi egyoldali ideálja (fordítva: ha R olyan gyűrű, hogy nincs nemtrivi egyo. id., és R nem zérógyűrű, akkor test)
t. (komm. egyszerű gyűrű...)	ha nem zérógyűrű, akkor test.
megj. ((bo/jo) egyszerű gyűrű)	nincs nemtrivi (bo/jo) ideálja

Izomorfizmus, homomorfizmus

homomorfizmus	φ: R → R' hom., ha φ(a+b)=φ(a)+φ(b), és φ(ab)=φ(a)φ(b)
mag	I_φ = {a Є R, φ(a) = 0'} (0' az R' gyűrű nulleleme)
t. (mag ideál)	R gyűrű bmely φ hom.-nak I_φ magja R ideálja. Fordítva: R minden ideálja R egy hom.-ának magja
t. (gyűrűk hom. tétele)	φ: R → R' szürj. hom. (epimorfizmus), I = I_fi, akkor R/I ~ R'
t. (test hom.)	test minden hom. izom., vagy a nullgyűrűre való (trivi.) leképezés

Karakterisztika

karakterisztika	R gyűrű karakterisztikája az n poz. egész, ha nR={0}, és n a legkisebb ilyen. n=0, ha minden a Є R és minden n pozitív esetén na=0 → a=0
t. (nullosztómentes gyűrű kar.)	Nullosztómentes gyűrű karakterisztikája 0,1 vagy prím.
t. (test. kar.)	Test karakterisztikája 0 v. prím.

Beágyazási tételek

t. (gyűrű → egységelemes gyűrű)	tetsz. gyűrű beágyazható egységelemes gyűrűbe ideálként
t. (gyűrű → kvóciensgyűrű)	R komm. gyűrű. M: nemnullosztók hza (nemüres) → R beágyazható részgyűrűként R'-be, ahol R'-ben M minden elemének van inverze. R' úgy is megválasztható, hogy minden eleme ra^-1 alakú (r eleme R, a eleme M). Az ilyen R' gyűrűk egymással izomorfak.
kvóciensgyűrű/hányadostest	előző tételbeli R' gyűrű. Ha test, akkor hányados-/kv.test
példa	Q a Z kv. teste
t. (int. tart.)	integritási tartománynak van kv. teste.

Véges testek

prímtest	ha nincs valódi részteste
t. (prímtest ~ …)	Q vagy Z_p (p prím)
t. (test tartalmaz...)	prímtestet, ami izomorf Q-val (ha kar.=0) vagy Z_p-vel (ha kar.=p)
t. (elemszám)	véges test elemeinek száma prímhatvány biz.: előző tétel miatt
t. (q=p^n → …)	van q-elemű test
megj.: itt minden a elemre...	q-elemű testben minden a elemre a^q-a=0, így a q-elemű test minden eleme gyöke az x^q-x=0 polinomnak
t. (izomorf)	azonos elemszámú véges testek egymással izomorfak

Diszkrét matematika és algoritmusok

A-7 Adatrendezési módszerek

Rendezés

alaphelyzet	A alaphz, < rendezési reláció
< tul.	irrefl. (a !< a) tranzitív (a<b, b<c → a<c) teljes (minden a,b-re a<b, b<a vagy a=b)
feladat	a_1,...,a_n Є A át kell rendezni: a_1 <= … <= a_n

t. (alsó becslés)	Tfh a_i-k különbözők, és az öhas.-nak 2 kimenetele van (a < b vagy nem). Akkor ha egy algo. az a_i-k minden sorrendjét rendezi, és minden esetben <= k öhas.-t használ, akkor k>=log_2 n! (→ k~nlogn)
Buborék-rendezés	
algoritmus	a_(i+1) < a_i, akkor csere, i++ (leegyszerűsítve)
lépésszám	teta(n^2)
öhas.	öhas: n(n-1)/2
csere	csere <= öhas.
	fordított sorrendnél lehet n(n-1)/2 csere
Beszúrásos rendezés	
feladat	első k jó helyen van, a_(k+1)-et akarjuk helyre tenni
	keresés: lineráris v. bináris
	tárolás: tömbök vagy éllista
öhas.	lineáris: n(n-1)/2
	bináris: (∑(log k)=log(n-1)!=) teta(nlogn)
mozgatások száma	n(n-1)/2
megj.	éllistánál a bináris keresés nem működik
	tömböknél a mozgatás sok
Összefésülés	
algoritmus	két rendezett lista → összefésüljük
	kettő legkisebb eleméhez mutató, a kisebbet leírom, léptetem eggyel
öhas.	kettő hossza + 1
mozgatás	kettő hossza
Rendezés	mindkettőt rekurzívan rendezzük, majd öfésüljük
öhas.	O(nlogn)
hátrány	kell +n hely
Kupacos rendezés	
kupac	teljes bináris fa (gyökeres, szintezett fa; teljes: utolsó szinten jobbról hiányzik néhány ág)
kupactulajdonság	apa értéke < fiai értéke
műveletek	Beszúr(x): új elem beszúrása
	Mintör(x): minimális törlése (ehhez Felszivárog())
kupacépítés	O(n)-ben teljes bin. fa + lentről fel, balról jobbra Felszivárog()
d-kupac	teljes fa, minden nem levél csúcsnak d fia, az utolsó nem levélnek <= d
Rendezés	Kupacépítés, majd n-szer Mintör(x)
lépésszám	O(n)+O(nlogn)=O(nlogn)
Gyorsrendezés	
algoritmus	véletlen s elemre Partíció(): átrendezi az elemeket [<s],[=s],[>s] módon
	s-nél kisebbeket és nagyobbakat külön-külön rendezzük uúgy
lépésszám	legrosszabb esetben Teta(n^2) – pl. mindig a legkisebbet választjuk ki
	átlagos lépésszám: O(nlogn)
Kulcsmanipulációs rendezés	
ládarendezés	minden a Є A-ra B[a] láda (lista)
	a_i-t B[a_i] végére rakjuk (i=1..n)
	a ládákat sorban kiolvassuk
lépésszám	O(beolvasás → n +kiolvasás → |A|+n)=O(n+|A|)

Ha |A|<=cn, akkor lépésszám: O(n)

radix rendezés: összetett kulcsok lexikografikus rendezése
A része A_1 x...x A_k
előbb k. szerint, aztán (k-1). szerint stb.
végül 1. komp. szerint teljes lista
komponens szerinti rendezés: ládarendezéssel

áll. (radix rendez): a radix rendezés rendez

lépésszám: O(kn+∑(|A_i|))
ha |A_i|<=c, k=O(logn), akkor O(nlogn)

A-8 A keresés alapvető módszerei, adatszerkezetei

Keresés

alaphelyzet: a_1,...,a_n; b, van-e olyan i, hogy b=a_i?

algo: i=1..n, b?a_i → O(n) lépésszám

lineáris keresés: ha a_1<=...<=a_n; b?a_i
i=1..n, b?a_i, vége, ha b=a_i (vagy nincs benne)
lépésszám: O(n)

lineáris keresés átl. lépésszáma: rendezetlen: sikeres: (n+1)/2, sikertelen: n
rendezett: sikeres: (n+1)/2, sikertelen: (1+2+..+n+n)/(n+1)
itt föltettük, h az eloszlás egyenletes

nem egyenletes eloszlás esetén: előre rakjuk a listában a gyakori elemeket
pl. Zipf eloszlás (szavak gyakorisága): i. szó vsz-ge: c/i, sikeres keresés: n/logn
80-20 szabály (kérdések 80%-a az elemek 20%-ára von.) → sikeres keresés: 0,112n

bináris keresés: b?a_[n/2], ha = OK, kül. felét kizárom, maradékra uúgy.
öhas. száma: Theta(logn)

áll. (opt.): bináris keresés optimális

megj.: nem mindig jó bin. keresni (pl. éllistában)

Bináris keresőfa

bináris fa: gyökeres, minden csúcsból a következő szintre 2 él mutat

bejárások: pre-, in-, postorder (a gyökér helyzetétől függően)
lépésszám: O(n)

bin. keresőfa: minden csúcsban 1 elem
minden v csúcsra a v-beli elem > v bo. részfájában levő elemek, és < jo. részfájában lévő elemek

áll. (inorder): bin. keresőfa inorder bejárása növekvő sorrendben adja az elemeket.

műveletek (6 db): Keres(x): x?gyökér, ha =, OK, ha < → bo. részfájában, ha > → jo. részfájában keresünk.
Min()/Max(): balra/jobbra megyünk, amíg lehet
Beszúr(x): Keres(x), ha megtalálja, OK, ha nem, beszúrja
Töröl(x): Keres(x), ha nincs, OK, ha van, akkor:
ha levél → töröljük
1 fia van → fiával helyettesítjük
2 fia van → bo. részfájának legnagyobb elemét rakjuk a helyébe, és ennek a legnagyobb elemnek a csúcsát töröljük (<= 1 fia van)
Tólig(a,b): a<=x<=b, gond lehet (sokat mászkálunk) → javítás: indorder fonal (mutató a köv. elemre) → Keres(a) + inorder fonal követése

lépésszám: O(l), ahol l: magasság. baj: ez lehet nagy

t. (átl. lépésszám)	üres fába beszúrral rakjuk be az elemeket, akkor átl. szintszám O(logn), átl. lépésszám: O(nlogn)
cél	olyan keresőfa, melyre szintek száma: O(logn)
Piros-fekete fa	
tulajdonságok (6)	bin. keresőfa + minden hiányzó ághoz egy új levél
	levelekben nem tárolunk
	minden csúcs piros vagy fekete
	gyökér és a levelek mind feketék
	piros csúcs mindkét fia fekete
	minden csúcsra igaz: minden v-ből levélbe vezető úton ugyanannyi a feketék száma → fm(v) „v fekete magassága”
m(v) (def, ?fm(v))	m(v): v magassága = max{hány lépés alatt érünk v-ből levélhez}
	minden v-re m(v)/2<=fm(v)<=m(v)
áll. (csúcsok száma)	v gyökerű részfában nem levél csúcsok száma >= 2^(fm(v)-1)
t. (fa magassága)	ha egy piros-fekete fában n elemet tárolunk, akkor a fa magassága <= 2 log(n+1)
műveletek (5 db)	Keres(x), Min(), Max() → mint előbb, lépésszám: O(logn)
	forgatás: RAJZ!
	Beszúr(x): lépésszám O(logn), és <=2 forgatást használ
	Töröl(x): lépésszám O(logn), és <=3 forgatást használ
2-3 fa	
tulajdonságok (6)	gyökeres, szintezett fa
	egy csúcsnak 2 v. 3 fia lehet (kivétel: ha csak 1 elemet tárolunk)
	levelek 1 szinten vannak
	elemeket csak levelekben tárolunk
	elemek a levelekben balról jobbra növekvő sorrendben
	nem levél csúcs szerkezete: RAJZ!
	[s1,s2] → [...(<s1)][s1,...(<s2)][s2,...] vagy
	[s] → [...(<s)][s,...]
szintszám	Teta(logn)
műveletek (5 db)	Keres(x) → Theta(logn)
	Min()/Max(): mindig a bal/jobb ágon → Theta(logn)
	Tólig(a,b): ha a levelek láncolva vannak, akkor Keres(a), láncon megyünk b-ig
	Beszúr(x): Keres(x), ha megtalálja, OK, ha nem, beszúrja (4 gyerek → csúcsvágás)
	Töröl(x): Keres(x), ha nincs, OK, ha van, akkor (3 gyerek → OK, 2 gyerek → nagybácsitól kér, vagy összevonjuk vele)
	lépésszám: Theta(logn)
B-fa	
tulajdonságok (6)	gyökeres, szintezett fa
	levelek 1 szinten vannak
	elemek a levelekben balról jobbra növekvő sorrendben
	nem levél csúcsnak <=m fia van
	nem levél, nem gyökér, akkor >=[m/2] (fölsőegészrész) fia van
	gyökérnek >= 2 fia van (kivétel: ha csak 1 elemet tárolunk
megj.	m=3 → 2-3 fa
szintszám	Theta(log_m n)
műveletek	Keres(x): m-1 útjelzővel kell öhasonlítani (~2-3 fánál)
	Beszúr(x): hasonló
	Töröl(x) is működik

megj.	Elsősorban külső táron lévő adatoknál használják. Ilyenkor a lapolvasások határozzák meg a lépésszámot/időt. → m-et úgy határozzuk meg, hogy nem levél csúcsa = 1 lap. Lapelérések = l+1 Gyakorlatban útjelzők helyén is tárolunk
Hash	
ötlet	minden kulcsnak saját helye → baj: túl sok hely kell. Ezért: X: lehetséges kulcsok hza h: X → Y hash-fv. (akkor hasznos, ha |Y| lényegesen kisebb, mint |X|) → de ekkor van x1 != x2, hogy h(x1) = h(x2) → ütközés
példa	születésnap-paradoxon: P(23 ember közül 2 uazon a napon született) >= ½, nem lin. nő
vödrös hash	|Y|=M, vödör-katalógus: v[0..M-1] Keres(x): kiszámolja h(x)-et, majd h(x) listájában lineárisan keres Töröl(x), Beszúr(x) hasonló lépésszám: n/M → várhatóan konstans, ha M=cn Külső háttértár esetén: nem n, hanem L (a lapok száma a fontos). Ha L lap van → 1 vödörbe átl. L/M , lapelérések vh. száma: L/M + 1 (<- v elérése). M~1,2L jó választás → vh. lépésszám: kis konstans
nyitott címzésű hash	T[0..M-1], h(x)=i, akkor x helye T[i] (lenne) ütközések feloldására: h_i(x) próbasorozat (permutáció), ementén végigmegyünk, amíg megtaláljuk x-et, vagy üres helyet találunk Lineáris próbálás: h_j(x)=-j mod M (baj: gyorsan hosszú csomók alakulnak) Kvadratikus (álvéletlen) próba: h_j(x)=+-j^2 mod M (ugrálunk) ha M=4k+3 alakú prím, akkor a h_j permutáció
kettős hash	h_j(x) függ x-től pl.: h_j(x)=-jh'(x), ahol (h'(x),M)=1 → pl.: h'(x)=x(mod M-1)+1 Hash-fv: lényeg: gyorsan számolható legyen + függjön x minden bitjétől → véletlenszerű legyen osztómódszer: h(x)=x mod M (célszerű: M prím, M !| 2^l+a (a kicsi)) szorzómódszer: h(x)=[{bx}M] (M=2^l, b=A/2^r (A ptlan egész, r szóhossz))+RAJZ!

A-9 Legrövidebb utak gráfokban

Gráfok megadása	
szomszédossági mx	M[i,j]=(i,j) élek száma
súlyfv.	G=(V,E) gráf, c:E → R
súlymx. (egyszerű gr. esetén)	c[i,j]={c(i,j), ha (i,j) Є E | 0, ha i=j | *, ha (i,j) nem eleme E} (ált: *=végtelen)
éllistás megadás	kimenő élek láncolt listában vannak fölsorolva + élsúlyok is benne vannak
műveletek lépéssz. - mx/éllista (6 db)	bemenet: n^2 - n+e (irányított) / n+2e (ir.tlan) van-e (i,j) él?: O(1) - d(i) i foka: O(n) - d(i) i,j közös szomszédai: Theta(n)- d(i)+d(j) élek száma: n^2 - O(n+e) izolált pont?: n^2 - O(n)

Legrövidebb utak gráfokban	
alapfeladat (5)	G=(V,E) gráf, élsúlyokkal c:E → R
	kell: s-ből legrövidebb élsorozat t-be
	föltesszük, h nincs negatív kör
	ha a körök pozitívak → tényleg út, ha van 0 súlyú kör → van legrövidebb élsorozat súlyával megegyező út is
	feladatok: legrövidebb út 1. s-ből t-be 2. s-ből minden t-be 3. minden s-ből minden t-be
Bell-Ford algo (7)	V={1..n}, s=1-ből többibe, nincs neg. kör
	G mx-ával adott: C[i,j]={0 | c(i,j) | ∞}
	T[a,i]: legrövidebb <= a élű 1-i út hossza
	T[1,i]=C[1,i], T[n-1,i] kell (minden út <= n-1 élű)
	T[a,i]=min_j {T[a-1,j] + c[j,i]} → az algo jó.
	lépésszám: O(n^3) = (mátrix →)n(n-1)*(n szám közül legkisebb →)(n-1)
	T[a,i] mellé eltároljuk j-t, amire minimális → út visszafejthető
Floyd-algo	V={1..n}, nincs neg. kör, összes pontpár
	F[i,j]=c[i,j] i,j Є V
	for k,i,j=1 to n F[i,j]=min {F[i,j], F[i,k]+F[k,j]}
	algo jó, minden k-ra ciklus végén legrövidebb olyan i-j út, aminek belső pontjai Є {1..k}
	lépésszám: O(n^3)
Tranzitív lezárt	G(V,E) tr. lezártja G'(V,E'), ahol (i,j) Є E' <-> G-ben van i-j irányított út
	erre használható Floyd
	egyszerűbben: Warshall (bitekkel)
	W[i,j]=W[i,j] vagy (W[i,k] és W[k,j])
Dijkstra-algo	G=(V,E), s eleme V, s-ből többibe, nemneg. élsúlyok
	D[v]=c[s,v] minden v-re
	KÉSZ={s}
	amíg KÉSZ != V
	x nem Є KÉSZ, D[x] minimális
	KÉSZ = KÉSZ U {x}
	D[w]=min{D[w],D[x]+c[x,w]} minden w nem eleme KÉSZ
	az algo jó → minden x Є KÉSZ: D[x]=s-ből x-be menő legrövidebb út hossza
	lépésszám: O(n^2) = (D tömb →) O(n) + ((min →)(n-1) + (frissítés →)(n-1))(n-1)
Kupacos megvalósítás	gráf éllistával adott
	lépésszám: O((n+e)logn) = O(n) + (n-1)*O(logn) (<-törlés) + ∑_v fok(v) O(logn) (<- fogyaszt)
	(fogyaszt: konkrét elemet kisebbre cserél)
Gráfalgoritmusok	
szélességi bejárás	Breadth First Search – BFS. Algo:I. füzet.
	lépésszám: O(n+e) – éllistás megadásnál
alkalmazások (3)	1. súlyozatlan gráfban legrövidebb utak s-ből (úthossz=élek száma), algo: s-ből BFS, O(n+e) (súlyozottra több)
	2. G irányítatlan – összefüggő-e? algo: tetsz. csúcsból BFS, ha minden pontot bejártunk → öf, kül. nem.
	3. ps gráfban max. psítás: magyar módszer
	- A-beli nem lefedett pontok
	- ezek B-beli szomszédjai
	- ezek A-beli párosítás szerinti párjai

	- ezek B-beli szomszédjai
	psítás nem max <-> van B-szinten nem párosított pont
	az ide vezető út az első szintből → javító út
	lépésszám: $O(n+e)\cdot n/2=O(n(n+e))$ ($n/2$-ször lehet javítani)
	ha a gráf öf. → BFS: $O(n+e)=O(e)$ ($e>=n-1$)
	itt max. psítás → $O(n\cdot e)$
	van $O(\text{gyök}(n)\cdot e)$ lépésszámú algo páros/általános gráfbeli max. psításra
mélységi bejárás	Depth First Search – DFS, algo: I. füzet
	lépésszám: $O(n+e)$ – éllistás megadásnál

Körmentesség, DAG

csúcsok számozása	mélységi szám (msz[v]): mikor értünk oda?
	befejezési szám (bsz[v]): mikor végzünk vele?
élek osztályozása	(x,y) él
	- faél: a bejárás során új pontba visz, msz[y]=0
	- előre-él: msz[x]<msz[y]
	- vissza-él: msz[x]>msz[y], bsz[y]=0
	- keresztél: msz[x]>msz[y], bsz[y]>0
t. (nincs irányított kör)	G irányított gráfban nincs irányított kör <-> nincs visszaél
DAG	ir. gráf, nincs irányított kör (directed acyclic graph)
	adott gráf DAG-e? → algo: DFS, ha találunk közben visszaélet, akkor nem. $O(n+e)$ lépés
topologikus rendezés	gr. csúcsainak top. rendezése: $v_1,\dots,v_n$, ha $(v_i,v_j) \in E \to i<j$
áll. (top. rend.)	G-nek van top. rendezése <-> G DAG.
DAG-ban legrövidebb utak s-ből	top. rendezés. Tfh. $s=v_1$, tetszőleges élsúlyok
	$d(s,v_i)$: s-ből v_i-be vivő legrövidebb út hossza
	$d(s,v_i) = \min \{d(s,v_j)+c(v_j,v_i) \mid (v_j,v_i) \in E\}$
	lépésszám: $O(n+e)$
DAG-ban leghosszabb utak s-ből (PERT-módszer)	top. rendezés, $d'(s,v_i) = \max \{d'(s,v_j)+c(v_j,v_i) \mid (v_j,v_i) \in E\}$
megj.	ált. gráfon leghosszabb út nehéz (nem ismert pol. algo)

Erősen összefüggő komponensek

G erősen öf.-e?	erősen öf.: bmely két pont között van irányított út
	algo: s-ből DFS, ha nem tart. minden csúcsot → nem erősen öf
	1. változat: minden s-ből DFS
	2. változat: G-ből és G fordítottjából (G') DFS
áll. (G erősen öf.)	<-> ha mindkét bejárásnál s mélységi fája minden csúcsot tartalmaz
erősen öf. komponensek meghatározása	gráf: erősen öf. komponensek, ezek között DAG
	algo: DFS (végig), G' fordított gráfon is DFS úgy, hogy mindig a legnagyobb befejezési számú* pontból indítjuk (*: 1. bejárás szerint) – RAJZ!
áll. (2. bejárás fái)	2. bejárás fái erősen öf. komponensek

A-10 Minimális súlyú feszítőfák keresése gráfokban, maximális méretű párosítások keresése páros gráfokban

Piros-kék algo

alaphelyzet	$G=(V,E)$ gráf, $c:E \to R$, G öf.

kék szabály	x része V, x!=0, x!=V; ha nincs x-et elhagyó kék él, akkor egy x-et elhagyú legkisebb súlyú színtelen élet színezzünk kékre
piros szabály	ha egy körben nincs piros él, akkor egy legnagyobb súlyú színtelen élet színezzünk pirosra
algo	piros+kék szabály alkalmazása tetsz. sorrendben, amíg lehet, kezdetben minden él színtelen
t. (algo jó)	az algo végén a kék élek egy min. súlyú feszítőfát adnak
	biz: színezés takaros, ha van olyan F min. fesz.fa, amire K része F, P ∩ F = üres
	1. lemma: az algo során a színezés mindig takaros
	2. lemma: az algo végén S=üres
megj.	ha már van n-1 kék él (n pontú gráfnál), akkor leállíthatjuk az algo-t
Konkrét alkalmazások	
Prim-Jarnik algo	kiindulópontból kék fát épít (kék szabály)
	K=üres, U={s}
	amíg U!=V: {a,b} Є E, a Є U, b nem Є U, c(a,b) min. → K=K unió {a,b}, U = U unió b
megvalósítás tömbökkel	Közel[i]={j, ha j Є U, i nem Є U, c(i,j) min., kül. *
	{a,b} élre a jelöltek {Közel[i],i}, i nem Є U. Ezek közül a legkisebb súlyú lesz {a,b}
	Közel[] frissítése, amikor berakjuk b-t U-ba (ha c(i,b)<c(i,Közel[i]), akkor Közel[i]=b), i nem Є U
	lépésszám: (minden csúcsra →)(n-1)·(Közel[i]+frissít →) O(n)=O(n^2)
megvalósítás kupaccal	éllistás megadás
	- kupac: U-ból kimenő legkisebb élek + korábbról maradt élek
	- MINTÖR(): ellenőrzi, hogy U-ból kilép-e, ha nem akkor újra MINTÖR()
	- frissítés: b-re illeszkedő élek mentén
	lépésszám: (kupacépítés →)O(n)+(él beszúrása + törlése →) O(e·loge) + (frissítés →)O(e)=O(elogn) (<- G öf.)
Boruvka-algo	kezdés: 1 pontú kék fák
	minden kék komponenshez megtalál egy kivezető min. súlyú élet, ezek kékek lesznek (van vannak az. súlyú élek, min. súlyú élek közül a legkisebb sorszámú komponensbe menőt).
	vége: ha csak 1 komp. van (kék szabályok)
	<= logn párhuzamos kör lesz, mert a komponensek száma feleződik
Kruskal-algo	K=üres, S=E
	amíg S!= üres: {v,w} Є S, c(v,w) min
	S=S-{v,w}
	ha K U {w,v}-ben nincs kör, akkor K=K U {v,w}
	min.: élek rendezése: O(eloge) VAGY kupac: O(e) + O(eloge)=O(eloge)
adatszerkezet	unió-holvan
	X alaphalmaz: X=U A_i (diszjunkt)
	műveletek: Unió(i,j) → A_i és A_j helyett A_i U A_j
	Holvan(x) = i, ha x Є A_i
megvalósítás tömbökkel	T[x]=i, ha x Є A_i
	Holvan: O(1) lépés
	Unió: O(n) lépés (|x|=n)
	ebből Kruskal: (rendezés →)O(eloge) + (holvan →)2eO(1) + (n-1)(unió →)O(n)=O(eloge) + O(n^2)
megvalósítás fákkal	A_i – fa (gyökeres)

	elem: csúcs
	i – csúcs
	+ csúcsból szülőbe mutató gyökérben tároljuk a fa méretét
	Holvan: csúcstól gyökérig felmegy
	Unió: $\lvert A_i \rvert <= \lvert A_j \rvert$ → A_i gyökerét A_j-éhez kapcsoljuk
	ha kezdetben minden hz. 1 elemű, akkor a fák magassága mindig <= logn
	lépésszám: holvan: O(logn), unió: O(1) → Kruskal: O(eloge) + 2eO(logn) + (n-1)O(1) = O(elogn)
javítás	útösszenyomással: holvan során a bejárt csúcsokat közvetlenül a gyökérhez köti
	ha kezdetben minden hz. 1 elemű, és n-1 db Unió és m>=n Holvan volt (n=|x|), akkor a lépésszám O(m a(m)), ahol a(m) = inverz Ackerman-fv, tulajdonságai:
	- a mon. nő
	- a(x) -> ∞, ha x-> ∞
	- a(m) <=4, ha m<=2^{65536}
	ebből Kruskal: O(eloge) + O(e a(2e))
kérdés	kérdés (nyitott): lehet-e O(e)-ben min. fesz.fa?
	ellenőrizni lehet O(e)-ben.

Gráfalgoritmusok

szélességi bejárás	Breadth First Search – BFS. Algo:I. füzet.
	lépésszám: O(n+e) – éllistás megadásnál
alkalmazások (3)	1. súlyozatlan gráfban legrövidebb utak s-ből (úthossz=élek száma), algo: s-ből BFS, O(n+e) (súlyozottra több)
	2. G irányítatlan – összefüggő-e? algo: tetsz. csúcsból BFS, ha minden pontot bejártunk → öf, kül. nem.
	3. ps gráfban max. psítás: magyar módszer
	- A-beli nem lefedett pontok
	- ezek B-beli szomszédjai
	- ezek A-beli párosítás szerinti párjai
	- ezek B-beli szomszédjai
	psítás nem max <-> van B-szinten nem párosított pont
	az ide vezető út az első szintből → javító út
	lépésszám: O(n+e)·n/2=O(n(n+e)) (n/2-ször lehet javítani)
	ha a gráf öf. → BFS: O(n+e)=O(e) (e>=n-1)
	itt max. psítás → O(n·e)
	van O(gyök(n)·e) lépésszámú algo páros/általános gráfbeli max. psításra
mélységi bejárás	Depth First Search – DFS, algo: I. füzet
	lépésszám: O(n+e) – éllistás megadásnál

A-11 Az NP fogalma, nevezetes NP-beli feladatok

P, NP fogalma

hatékony algo	polinom idejű (bemenet hosszának polinomja)
példa	adott m szám → írjuk fel a 2^m számot → nem pol (végeredmény m+1 bit → nem polinomja a bemenetnek (logm bit))
abc, szó, nyelv	abc: Σ véges hz (tipikusan Σ={0,1})
	szó: Σ-ból képezett véges sorozat, szavak hz-a: Σ^*
	nyelv: L része Σ^*

P	polinom időben felismerhető nyelvek
példák (3)	PRÍM (adott szám prím-e?)
	ÚT (G gráfban van-e s-t út?)
	SÍKGRÁF (G síkbarajzolható?)
NP	nemdeterminisztikus polinom időben felismerhető nyelvek
	L nyelv, L Є NP, ha van c>0 konstans, L_p Є P, hogy
	x Є L <-> van y Є Σ* (tanú), |y|<=|x|^c (rövid) és (x,y) Є L_p (bizonyítékot ellenőrizni is tudom)
áll. (P?NP)	P része NP
	nem ismert, hogy P=?NP
példák (4)	H (G-ben van-e Hamilton-kör?) → L_p = {(G,i_1,...,i_n): i_j – a csúcsok egy sorrendje, (i_j, i_(j+1)) Є E, (i_1,i_n) Є E}
	3SZÍN = {G: X(G)<=3} → L_p={(G,c_1..c_n): 1<=c_i<=3 egy jó színezés} Є P (felismerő algo. ellenőrzi, h tényleg <= 3 szín van-e, és hogy minden élre a végpontok nem egyszínűek). y=(c_1..c_n) → |y|<G mérete
	SÍKGRÁF={G: síkbarajzolható}, y: síkbarajzolás, ahol az élek szakaszok, koordináták racionálisak
	NEMSÍKGRÁF={G: nem síkbarajzolható}, y: K_(3,3)-mal, vagy K_5-tel top. izomorf részgráf + topologikus izomorfia
co NP	co NP = {L nyelv: L komplementere Є NP}
	P része co NP → P része NP ∩ co NP
	nem ismert, hogy P=?NP ∩ co NP
Karp-redukció	
Karp-redukció	(polinomiális visszavezetés)
	L_1,L_2 része Σ* nyelvek, L_1 Karp-redukciója L_2-re egy f:Σ* → Σ*, polinom időben számolható fv, melyre:
	x Є L_1 <-> f(x) Є L_2
	Jelölés: L_1 < L_2 (L_2 legalább olyan nehéz, mint L_1)
Állítások (5)	L1<L2 → L1 kompl. < L2 kompl (def-ból)
	L1<L2, L2 Є P → L1 Є P
	L1<L2, L2 Є NP → L1 Є NP
	L1<L2, L2 Є co NP → L1 Є co NP
	L1<L2, L2<L3 → L1<L3
példa	IH={G irányított, van H-köre}
	IH<H
	Kell: G irányított → (f) G' ir.tlan
	G Є IH → G' Є H
	v → v_be-v-v_ki, (u,v) → {u_ki,v_be} → f: G → G' pol. időben megy

A-12 NP-teljesség

P, NP fogalma (9)	l. A-11
Karp-redukció (3)	l. A-11
NP-teljesség	
def.	L nyelv NP-teljes, ha
	1. L Є NP
	2. minden L' Є NP-re L'<L
megj.	ha L NP-teljes, és tudnánk, hogy P-beli, akkor P=NP
bizonyítás	1. L Є NP

	2. L1 NP-teljes, megmutatjuk, hogy L1<L
Példák (13)	3SZÍN = {G: X(G)<=3} MAXFGTL = {(G,k), ha alfa(G)>=k} – alfa(G): max. fgtl. ponthalmaz (biz: 3SZÍN < MAXFGTL) MAXKLIKK = {(G,k): G-ben van k pontú teljes részgráf} (mert: MAXFGTL < MAXKLIKK)
	H-kör H-út s-t végpontú H-út
	3DH (3 dim. házasítás) (de: 2DH Є P <- ps gráfban max. psítás) X3C (pontos fedés hármasokkal) (mert: 3DH<X3C), de X2C Є P
	RH (részhalmazösszeg) előáll-e b s_i-k összegeként PARTÍCIÓ (s_i >0, ∑(s_i)_(i Є I) = ∑(s_i)_(i nem Є I)), mert RH<PARTÍCIÓ L (hátizsák probléma s_i súlyok, v_i értékek, b súlykorlát, ∑(v_i) → max), mert RH<L
	GRÁFIZO = {(G_1,G_2): gráfok izomorfak} NP-beli, de nem ismert, hogy NP-teljes-e RÉSZGRÁFIZO = {(G_1,G_2): G_1-nek van G_2-vel izomorf részgráfja}, mert H<RÉSZGRÁFIZO

A-13 Algoritmus-tervezési módszerek

Alapok	
algoritmuskészítés folyamata	1. valós probléma 2. matematikai modell 3. algoritmus 4. programozás
cél:	1. eljárás leírása 2. helyesség bizonyítása 3. hatékonyság (lépésszám + tényleges idő)
nagyságrendek	f(n) = O(g(n)), ha van c>0, n0>0, hogy $\lvert f(n)\rvert$<=c$\lvert g(n)\rvert$ minden n>=n0 f(n) = Ω(g(n)), ha van c>0, n0>0, hogy $\lvert f(n)\rvert$>=c$\lvert g(n)\rvert$ minden n>=n0 f(n) = Θ(g(n)), ha f(n) = O(g(n)), és f(n) = Ω(g(n))
példa: szuperforrás	G=(V,E) irányított gráf, nincs hurokél, n csúcs s szuperforrás, ha minden y Є V, y!=s → (s,y) Є E, (y,s) nem Є E max. 1 van mátrixszal adott G 1. algo: minden csúcsra ellenőrizzük, hogy szuperforrás-e, lépésszám: 2(n-1)·n=Theta(n^2) 2. algo: i=1, j=n, A[i,j]=0 → i nem szuperforrás → i++, A[i,j]=1 → j nem szuperforrás → j- - , amíg i!=j, i-t ellenőrizzük. Lépésszám: n-1 + (ellenőrzés →)2(n-1) = 3n – 3 T(n): legkevesebb lépés >= 2n-2 (ellenőrzéshez kell ennyi) A[i,j] megnézése <= 1 csúcsot zár ki. n-2 lépés után még 2 csúcs hátravan, legyen s az, amelyikre kevesebbet kérdeztünk – ez lesz a szuperforrás. Lépésszám: n-2 + (2n-2 – (legfeljebb ennyi kérdés eshetett s-re →)(n-2)/2)=2.5n-3 igazság: T(n)>=3n-3-logn
Elágazás és korlátozás	

példa: max. méretű fgtl ponthz	1. algo: minden A része V-re ellenőrizzük, h fgtlen-e → 2^n ellenőrzés
	MF(G): ha van x Є V: d(x) >= 3, akkor
	S1=MF(G-x) (x nincs benne), S2={x}UMF(G-x-N(x)) (x benne van), S=S_i, ha |S_i|>=|S_j|
	ha nincs ilyen x → G komponensei utak és körök → ptlan sorszámú pontok az utak és körök mentén
	T(n)=O(c^n), c az x^4-x^3-1=0 egyetlen poz. mo-a, c~1,38
	Branch & Bound (B&B): összes lehetséges eset fával ábrázolható – RAJZ!
	ha vmelyik ág nem vezet mo-ra → levágjuk
példa: színezés	G=(V,E) egyszerű gráf 3 színnel színezése
	0. algo: minden pontot kiszínezünk, ellenőrizzük, h jó-e → 3^n
	1. algo: kiválasztjuk, h mi legyen piros, többi könnyen színezhető → 2^n lehetőség

Dinamikus programozás

példa (n alatt a k) [jel: (n*k)]	(n*k)=(n-1*k)+(n-1*k-1)
	(n-a*k-b) (a*b)-szer jön elő
	ilyen esetekben din. prog: a többször előforduló részfeladatokat egyszer oldjuk meg, az eredményt egy táblázatban tároljuk
max/min. érték keresése	(optimalizálási feladat)
	akkor alkalmazható, ha részfeladatok opt. mo-ból megkaphatjuk az igazi mo-t. Egyes részfeladatok többször előjöhetnek
példa: hátizsák probléma	n tárgy, s_i>0 súlyokkal, v_i>0 értékekkel, b>0 súlykorláttal
	cél: adott súlykorláton belül lehető legtöbb értéket elpakolni
	algo (DP): T[i,a]={1..i}-ből súlykorlát = a max. érték
	cél: T[n,b]
	T[1,a]={0, ha a<s_1 | v_1, ha a>=s_1}
	T[i,a]={T[i-1,a], a<s_i | max{T[i-1,a], v_i+T[i-1,a-s_i]}}
	sorok egymás után kitölthetők → lépésszám: O(nb)
	nem polinom idejű (b logb-nek nem polinomja), de kis b-re jól használható

Lineáris programozás

feladat	Ax<=b, x>=0, cx → max, a_ij, c_j, b_j Є Z
módszerek	szimplex-módszer (gyakorlatban jó, de nem pol.)
	ellipszoid-módszer (pol, de gyak.-ban lassú)
	belső pontos módszer (pol. gyorsabb)
egészértékű programozás	(EP/IP) LP feladat, de kikötés: x_j Є Z
	megfelelő nyelv NP-teljes
	ezzel sok korábbi feladat leírható
példa	MAXFGTL: n pontú gráf → minden csúcshoz x_i változó
	0<=x_i<=1 egészek, minden {i,j} élre: x_i+x_j<=1, max(∑(x_j)), fgtl hz <-> {j: x_j=1}

Közelítő algoritmusok

def.	eredeti fa: maximalizálás, max. érték: OPT
	közelítő algo: adott 0<c<1 paraméterhez talál >= c·OPT értékű mo-t
	eredeti fa: minimalizálás, min. érték: OPT
	közelítő algo: adott c>=1 paraméterhez talál <= c·OPT értékű mo-t
példa	G=(V,E) egyszerű gráfban max. fgtlen élhz.
	közelítő algo: mohón fgtl éleket választunk >= tau(G)/2 >= nu(G)/2 = OPT/2 → c=1/2-re van közelítő algo

ládapakolási fa	tárgyak mérete: 0<s_i<=1, ládák mérete 1, cél: minél kevesebb ládába rakjuk
	L nyelv = {(s_i,...,s_n,k): ha k ládába berakhatók} <- NP-teljes, mert PARTÍCIÓ < L
First Fit	a tárgyakat sorban berakjuk az első ládába, ahova elférnek
	használt ládák száma: FF
	FF<=2OPT
	minden bemenetre: FF<=[17/10·OPT] (fölsőegészrész), és van olyan bemenet, amire FF>=17/10(OPT-1)
First Fit Decreasing	rendezzük a tárgyakat csökkenő sorrendbe, utána FF
	minden bemenetre: FFD<=11/9·OPT+4, és van olyan bemenet, amire FF>=11/9 OPT
t. (Ibarra, Kim)	minden ε>0 létezik pol. algo a ládapakolásra, aminek eredménye <= (1+ε)OPT
Utazóügynök	G irányítatlan gráf, élein poz. súlyok
	cél: min. súlyú Hamilton-kör
	feltehető, hogy G=K_n
t. (utazóügynök)	ha létezik c>1, amire van pol. algo, ami az utazóügynök problémára <= c·OPT súlyú mo-t ad, akkor P=NP
euklideszi utazóügynök	K_n-re: s(u,v) + s(v,w) >= s(u,w)
	nyelv NP-teljes
	közelítő algo: min. feszítőfát keresünk G-ben (F), visszalépéseket levágjuk (preorder szerinti sorrend)
	→ Hamilton-kör: C
	s(C)<=2·s(F)<=2·OPT

Geometria

A-14 A geometria axiomatikus felépítése, az axiómacsoportok szerepe, alapvető példák és érdekes konstrukciók.

I. Illeszkedési axiómák	
alapfogalom	pont, egyenes, sík
1.	két kül. pont egyért. meghat. egy egyenest
2.	három, nem egy egyenesre ill. pont egyért. meghat. egy síkot
3.	ha egy egyenes 2 pontja hozzátartozik egy síkhoz, akkor az összes pontja illeszkedik a síkra
4.	van 4 pont, ami nem illeszkedik egy síkra (dim >= 3)
	ha 2 síknak van egy közös pontja, akkor van egy további közös pontjuk is (dim <= 3)
II. Rendezési axiómák	
alapreláció	ha egy egyenes 3 kül. pontja A,B,C, akkor (ABC) = „B az A és a C között van”
1.	3 pont közül pontosan az egyik van a másik kettő között <-> (ABC),(BCA),(BAC) közül pontosan az egyik igaz
2.	ha A,B egy egyenes két pontja, akkor van C: (ABC)
megj.	5 pontú modell: 1., 2., OK
3.	Pasch-axióma: ha egy egyenes egy háromszög (hsz) egyik oldalát belül metszi, akkor pontosan még egy oldalt metsz belül, ha nem megy keresztül a szemközti csúcson

áll.	minden A,B pontpárhoz van C: (ACB)
köv.	I. és II.-t tudó modelleknek ∞ sok pontjuk van
nyílt/zárt szakasz, töröttvonal, sokszögvonal, egyszerű sokszögvonal (5)	A,B végpontú nyílt szakasz: {C (ACB)}
	-II- zárt szakasz: {C (ACB)}U{A,B}, jel: (AB^¯) (-> fölülvonást elhagyom!)
	A1,...,An töröttvonal = A1A2 U A2A3 U...U A(n-1)An
	sokszögvonal: zárt töröttvonal
	egyszerű sokszögvonal: olyan sokszögvonal, melynek nyílt szakaszai egymást nem metszik, és minden pont 2 szakasznak a közös végpontja
t. (Jordan görbetétel egyszerű sokszögre)	az egyszerű sokszögvonal 2 részre osztja a síkot, az egyik nem tartalmaz a belsejében félegyenest
sokszögtartomány, elválasztja, ekv. rel, 2 ekv. rel van, nyílt félsík, félsík (6)	sokszögtartomány: a J.-tétel szerint létező, félegyenest nem tartalmazó darab.
	adott e egyenes és A,B pontok. e elválasztja A,B-t, ha van C Є e, melyre (ACB)
	A~B, ha e nem választja el őket → ez ekv. rel.
	pontosan 2 ekv. osztály van
	a fenti ekv. osztályokat az e mint határegyenes által meghatározott nyílt félsíkoknak nevezzük.
	Ha a határolóegyenest vmelyik nyílt félsíkhoz hozzávesszük, zárt félsíkot kapunk.
III. Egybevágósági axiómák	
2 alapreláció	szakaszok / szögtartományok egybevágósága (~)
1.	egybevágóság ekv. rel.
2.	Felmérhetőségi ax.: minden a egyenesre, annak minden A pontjához van 2 pont (B,C) az egyenesen, hogy egy előre adott XY szakaszra AB és AC egybevágó XY-nal
megj.	rac. koord. pontok I., II., OK, de III./2 nem: (0,0)-(1,1) szakasz irrac, nem mérhető fel a (0,0)-en áthaladó vízsintes egyenesre
3.	Felbonthatósági axióma: Ha AB~CD, és (AXB), akkor van egyértelműen Y, amire (CYD), és AB~CY és XB~YD.
4.	Felmérhetőségi ax. szögtartományokra: ha a egyenes, A,D Є a (különbözők), alfa egy szögtartomány, akkor létezik B,C nem Є a, hogy AB~AC és DAB=alfa, és DAC=alfa
5.	ABC hsz ~ A'B'C' hsz-gel, ha AB~A'B', BC~B'C' és AC~A'C'
megj.	1-4 alapján definiálható a sík- (ill. tér-)beli egybevágóság, mint olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés saját magára, amely szakaszt vele egybevágó szakaszba visz. 5. azt jelenti,hogy 2 hsz biztosan egybevágó, ha oldalaik páronként egybevágóak.
IV. Folytonossági axiómák	
1.	Arkhimédesz axiómája: ha AB tetsz szakasz, CD egy másik tetsz. szakasz, akkor az AB egyenesen vannak olyan A0=A, A1...An pontok, hogy AiA(i+1)~CD, és U AiA(i+1) tartalmazza AB-t
2.	Cantor-ax.: ha {Ai,Bi} i Є N pontokra AiBi tartalmazza A(i+1)B(i+1) i Є N → ∩ AiBi != üres halmaz

3.	Dedekind-ax.: ha A,B része a nem üres hz, AUB=a, A ∩ B = üres. Tfh semelyik két A-hoz tartozó pontot nem választ el B-hez tartozó pont, és semelyik két B-hez tartozó pontot nem választ el A-hoz tartozó pont. Akkor létezik egyértelműen D az egyenesen, ami tetszőleges A-beli ill. B-beli pontot elválaszt egymástól, de sohasem választ el azonos halmazhoz tartozó pontokat.
megj. (3)	1. ha Cantor-ax. igaz → modell nem megszámlálható
	2. Veblen példája nem Arkhimédeszi egyenesre (egész távolságú vízsz. egyenesek, lexikografikus rendezés a pontok között, (0,0)-(1,0) végessok példánya nem fedi le (0,1)-(1,0)-t pl → A nem teljesül) – részletek I. füzet
	3. Hilbert: nemarkhimédeszi test: rac. törtfv-ek teste Q > 0, ha lim(x → ∞) Q >0, Q1>Q2, ha Q1-Q2>0. Itt n·[0,x]-szel nem mérhető [0,x^3] pl.
Abszolút tételek	
abszolút geometria	olyan, amire I-IV. teljesül
abszolút tételek	az absz. geom-ban érvényes tételek
1.	adott AOB szögtart., e egyenes, ami O-n átmegy és a szögtartományhoz tartozik → e ∩ AB nem üres
2.	külsőszög-lemma: B-nél lévő külső szög > A-nál lévő szög (ABC hsz-ben)
3.	nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van
4.	teljesül a hsz-egyenlőtlenség
következmények (5)	2, következményei:
	1. két belső szög összege < π
	2. egyenlőszárú hsz-ben szög < π/2
	3. P-ből a-ra állított merőleges egyértelmű
	3, köv.: töröttvonal-egyenlőtlenség
	5. Kar-lemma: ha ABC és A'B'C' ponthármasokra |AB|=|A'B'| és |BC|=|B'C'| és ABC szög < A'B'C' szög → |AC| < |A'C'|
t. (Legendre I.)	ha ABC hsz tetsz, akkor belső szögek összege <= π
köv. (2)	külsőszög-tétel: ABC hsz-ben C-hez tartozó külső szög >= A szög + B szög
	ha P nem illeszkedik a-ra, akkor PQT szög = φ akármilyen kicsi lehet
t. (Legendre II.)	ha van ABC hsz, hogy belső szögek összege = π, akkor A'B'C' hsz belső szögeinek összege is π
V. Párhuzamossági axióma. Hiperbolikus geometria	
párh. axióma	adott a síkon egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Ekkor a ponton keresztül egyetlen olyan egyenes van a síkban, ami az adott egyenest nem metszi.
t. (ph. ax <-> …)	ph. ax. igaz <-> a hsz-ek szögösszege π
Projektív / Cayley-Klein modell	sík: egységkör belseje, egyenes: kört metsző egyenes körön belüli darabja
	itt. ph. ax. nem teljesül
félegyenesek	RAJZ!
	F U {nem metszők} = A, G U {metszők} = B → (Dedekind szeletalkotás) → létezik P, amely A, B pontjait elválasztja, de nem választ el egymástól 2 A v. B-beli pontot
félegyenesek párhuzamossága	AK^(→) (nyilat elhagyom!) félegyenes párhuzamos BP-vel. Jel: AK↑↑BP (saját jelölés: AK||BP)
tul. (3)	AK||BL, B' Є BL → AK||B'L

	AK||BL → BL||AK (szimmetria)
	AK||BL, BL||CP → AK||CP (tranzitív)
ultraparallel	ha a,b nem metszők és nem párhuzamosak (egyik irányban sem), akkor ultraparallelek / kitérők
t. (közös merőleges)	2 ultraparallel egyeneshez van olyan egyenes, amely mindkettőt metszi, és mindkettőre merőleges (H^2-ben → hiperharmonikus síkban)
áll. (merőleges / ultraparallel szerk. Cayley-Klein-ban)	RAJZ!
Poincaré körmodell	pontok: egységkör belső pontjai
	egyenesek: k körvonalat merőlegesen metsző egyenesek és körök k-n belüli részei
	konformis modell (a,b) szöge (hiperbolikus síkban) = a metszéspontban meghúzott érintők haljásszöge
Poincaré–Cayley-Klein egyesített modell	RAJZ!
sugársorok:	3 típus
	a, közönséges tartójú ~: adott ponton átmenő egyenesek hz-a
	b, végtelen távoli pont tartójú ~: ph. egyenesek
	c, ideális tartójú ~: adott egyenesre merőleges egyenesek hz-a (sugársora)
ciklus	egy adott pont adott sugársorra vonatkozó tükörképeinek hz-a
	a, → kör
	b, → paraciklus
	c, → hiperciklus

A-15 3-dimenziós abszolút geometria

Térelemek kölcsönös helyzete

egyenes-egyenes	van 4 nem egysíkú pont
	nem egysíkú egyenesek: kitérők
	egysíkúak: 1 közös pont (metsző) v. 0 közös pont, ekkor
	párhuzamosak (E^2) vagy (H^2-ben):
	→ 1 ∞ távoli pont: párhuzamosak
	→ 0 ∞ távoli pont: ultraparallelek
egyenes-sík	2 közös pont → illeszkedik a síkra
	1 közös pont → egyenes metszi v. döfi a síkot
	0 közös pont → (E^3) az egyenes a síkkal ph.
	→ (H^3)-ban:
	a, 2 közös ∞ távoli pont → illeszkedik a síkra
	b, 1 közös ∞ távoli pont → párhuzamos
	c, 0 közös ∞ távoli pont → kitérő v. ultraparallel
sík-sík	1 közös pont → további közös pont is van → a 2 pont egyenese közös egyenese a síknak
	síkok metszik egymást → metszésvonal
	ha a két sík kül, ilyenkor nincs további közös pont
	0 közös pont → (E^3) a 2 sík ph. egymással
	→ (H^3)-ban:
	a, 1 közös ∞ távoli pont → ph.
	b, 0 közös ∞ távoli pont → kitérők v. ultraparallelek

Merőlegesség

áll. (P – a)
P pont nem illeszkedik a egyenesre → létezik egyértelműen n: P Є n, n merőleges a-ra

a merőleges alfa
az a egyenes és az alfa sík metsző: azt mondjuk, hogy a merőleges alfa-síkra, ha valamennyi, a metszésponton keresztülhaladó alfa-síkbeli egyenesre merőleges a (E^3 és H^3)

t. (a merőleges alfa <-> …)
a merőleges alfára <-> van b,c különböző, a metszésponton áthaladó egyenes, hogy b,c merőleges a-ra (E^3 és H^3).

t. (merőleges állítható)
adott síkhoz rajta kívül fekvő pontból egyértelműen állítható merőleges (E^3 és H^3)

merőleges vetítés
P pont nem illeszkedik a egyenesre → létezik egyértelműen n: P Є n, n merőleges a-ra → n ∩ a = P'. A merőleges vetítés a tér P pontját képezze P'-be az alfa síkban pedig legyen az identitás

t. (egyenestartó)
a merőleges vetítés egyenestartó.

Térelemek hajlásszöge

egyenes-egyenes hajlásszöge
a kitérő egyenesek hajlásszöge szokásos módon E^3-ban igaz:
a,b kitérőek, A Є a, a'||b A-n keresztül. (a,b) szöge = (a,a') szöge

egyenes-sík hajlásszöge
(E^3 és H^3)
a metszi alfát → a' a vetülete alfára. (a,alfa) szöge = (a,a') szöge

sík-sík hajlásszöge
alfa, béta síkok metszők, m: metszésvonal, A Є m
a része alfa, merőleges m-re, A Є a
b része béta, merőleges m-ra, A Є b
(alfa,béta) szöge = (a,b) szöge
def. fgtlen A választásától.

Térelemek távolsága

egyenes-egyenes távolsága
ha nem metszők, a legrövidebb összekötő szakasz hossza
ha van legrövidebb transzverzális, az a,b-re merőleges

t. (normáltranszverzális)
(E^3 és H^3) a,b kitérők → van n egyenes, ami mindkettőt metszi, és mindkettőre merőleges
biz: kar-lemmán, ill. középvonalról szóló abszolút tételen múlik (többek között...)
a normáltranszverzális egyértelmű

Síkbeli egybevágóságok

egybevágóság
E^2/H^2 → E^2/H^2 bijekció, amely a szakasz hosszát őrzi

áll. (tükrözés)
az egyenesre vonatkozó tükrözés egybevágóság (H^3 és E^3)

t. (bmely egybevágóság...)
bármely egybevágóság legfeljebb 3 egyenesre való tükrözés szorzata (abszolút, E^3 és H^3)

spec. egybevágóságok
1. identitás
2. t_e: e egyenesre tükrözés
3. …
 - 2 metsző egyenesre tükrözés (E^2,H^2): forgatás, φ = t_f ○ t_e csak (e,f) szögétől és az O ponttól függ → reprezentálható tetsz. e',f' O-n áthaladó alfa szöget bezáró egyenespárra von. tükrözéssel
 - 2 ph. egyenesre von. tükr. (E^2): eltolás, fi csak az egyenes irányától és a d távolságtól függ → repr.ható tetsz. e',f' az adott iránnyal ||, d távolságú egyenespárra von. tükrözés szorzataként
 - 2 ultraparallelre tükrözés (H^2): eltolás. e,f olyan egyenespárra cserélhető, ami e,f sugársorához tartozik, és távolsága = e,f távolsága
 - 2 ph.ra tükrözés (H^2): ph. áthelyezés. A sugársor 2 e',f' egyenesére cserélhető e és f, ha egy fix paracikluson mért távolságuk megegyezik
4. csúsztatva tükrözés (E^2): e||f merőleges g.

t. (minden egybevágóság...)
(E^2) minden egybevágóság vmelyik fenti típusba tartozik.

Térbeli egybevágóság

t. (síktükrözés)	(E^3,H^3) minden egybevágóság legfeljebb 4 síktükrözés szorzata
áll. (síktükr.)	a síktükrözés egybevágóság
spec. egybevágóságok	1. identitás 2. síktükrözés 3. … - alfa, béta metszők: egyenes körüli forgatás, repr-ható tetsz. két, egymást m-ben metsző alfa', béta' síkra von. tükrözés szorzataként, ha (alfa,béta) szöge = (alfa',béta') szöge (előjelesen) - alfa || béta: eltolás: repr-ható tetsz. 2 velük ||, d (előjeles) távolságú síkra von. tükr. szorzataként 4. … - alfa, béta merőleges gamma, alfa, béta metszők: forgatva tükrözés - alfa, béta merőleges gamma, alfa || béta: csúsztatva tükrözés 5. alfa, béta merőleges (gamma || delta), alfa, béta metszők: csavarmozgás
t. (minden egybevágóság...)	tetszőleges egybevágóság a fenti 7 típus vmelyikéhez tartozik
t. (komm. rcsop.)	az eltolások az egybevágóságok komm. részcsoportját adják

A-16 n-dimenziós euklideszi tér

n-dimenziós euklideszi tér

def.	E^n: (R^n,<·|·>) n-dim. euklideszi vektortér. rögzítsünk egy O kezdőpontot ekkor P Є E^n <-> OP vektor Є R^n
hipersík	n-normálvektorú, P ponton keresztülmenő hipersík azon Q Є E^n pontok hza, melyekre <OQ-OP|n>=0. A P=0 esetben a hipersík R^n egy (n-1)-dimenziós altere, melynek a fenti hz egy eltoltja, így szintén (n-1)-dimenziós (másik elnevezés: affin: (n-1)-dim. altér)
féltér	a P ponton keresztülhaladó n normálvektorú hipersík két félteret határoz meg E^n-ben, aminek ő a közös határa {Q|<OQ-OP|n><0}, {Q|<OQ-OP|n>>0}
nyílt/zárt féltér	féltér nyílt, uniója a hipersíkkal: zárt féltér
konvex poliéder	tfh. a P hz véges sok zárt féltér metszete. Ekkor P konvex poliéder, ha korlátos és a belseje nem üres (n-dimenziósoknak van belső pontja).
konvex hz	H része E^n konvex, ha tetsz. 2 pontjával együtt tartalmazza az őket összekötő szakaszt (x1,x2 Є H → ax1+(1-a)x2 Є H minden 0<=a<=1). mivel zárt féltér konvex hz, metszetük szintén az → konvex poliéder konvex hz.
poliéder	véges sok konvex poliéder uniója

Topologikus terek

def.	X hz, G az X bizonyos rhz-ainak egy hzmetszete, ami teljesíti az alábbi tulajdonságokat: 1. ø, X Є G (teljes és üres hz. benne van) 2. G_i Є G → U G_i Є G (unió is benne van) 3. G_1,...,G_n Є G → ∩ G_i Є G (véges metszet is benne van)

	ekkor az (X,G) párt topologikus térnek nevezzük, alaphza az X hz, nyílt hzainak rendszere G (G része P(X) hatványhz).
zárt, belső-/külső-/határpont	Z része X zárt, ha egy nyílt hz. komplementere.
	Ha P Є X egy pont, A része X egy hz, akkor P belső pontja A-nak, ha van olyan G része A nyílt hz, hogy P Є G. P külső pont, ha belső pontja A komplementerének. P határpont, ha se nem külső, se nem belső pont.
öf. részhz	az A hz az (X,G) top. tér öf. részhza, ha nem állítható elő 2 diszjunkt nyílt hz. uniójaként.
f folytonos	Az f: (X1,G1) → (X2,G2) legyen olyan leképezés, amely mellett minden G Є G2: f^(-1)(G) Є G1 (= {x Є X1, f(x) Є G}), azaz nyílt hz. teljes inverz képe nyílt. Ekkor f-et folytonosnak nevezzük.
homeomorfizmus	Az f: (X1,G1) → (X2,G2) homeomorfizmus (vagy: topologikus leképezés), ha bijekció, folytonos és az inverze is folytonos
példa	X tetsz. hz, G1=P(X), G2={ø,X} → id: (X,G1) → (X,G2), x Є X képe x
	1. id. kölcsönösen egyértelmű
	2. id folytonos
	3. DE id^(-1) nem folytonos!
megj. (2 top. tér ekv.)	2 top. tér ekvivalens, ha van közöttük homeomorfizmus
elemi ív	az (X,G) top. tér Y része X rhz-a elemi ív, ha homeomorf képe egy közönséges szakasznak (pl. a [0,1] intervallumnak).
ívvel összeköthető	Két x,y Є X pont ívvel összeköthető, ha van véges sok elemi ív, ha van olyan Y1...Yk (Yi:[0,1] → X) úgy, hogy Y_i(1)=Y_(i+1)(0), i=1..k-1, x=Y1(0), y=Yk(1)
ívszerűen öf	(X,G) ívszerűen öf, ha tetsz. 2 pontja ívvel összeköthető

A-17 Kollineációk és lineáris transzformációk

Vektorok, dimenzió

reprezentáns	a t_b ○ t_a eltolás vigye P-t P'-be. Ekkor a PP' (fölső nyilat elhagyom!!!) párt a t_b ○ t_a eltolás egy reprezentánsának nevezzük. A repr.ok ekv.osztálya az eltoláshoz tartozó vektor (PP'). A vektor hossza (|PP'|) az a,b síkok távolságának kétszerese.
vektorok összeadása	összefűzés szabályával: ha PP', P'P” az 1. ill. 2. eltolás egy repr. párja, akkor PP” a kompozíció egy repr.
vektorok szorzása skalárral	a PP' vektor a>0 számmal való szorzata az a vektor, amelyet a kiindulásival ph. síkpárra való tükrözések szorzata ad, ahol a síkpár távolsága az eredeti a-szorosa
	a<0 esetén a síkokra von. tükr. sorrendjét is megcserélem
	a=0-val való szorzát végeredménye a nullvektor, aminek a hossza 0, iránya nincs
vektortér	a tér vektorai a fenti két műveletre nézve R feletti vektorteret alkotnak
áll. (dim)	a közönséges vektorok tere 3 dimenziós
sk. szorzás	(V,(·|·)), (·|·) poz. def, szimmetrikus bilineáris fv: VxV → R (Euklideszi vektortér)
vektor hossza	gyök((v|v)), |v|=0 <-> v=0
vektorok hajlásszöge	cos(v,w) szög = (v|w)/|(v|w)|
áll. (Cauchy-Schwarz-Buny.)	|(v|w)/|(v|w)|| <= 1, azaz (v,w) jóldefiniált
vektorok sk. szorzata	a, b közönséges vektorok sk. szorzata: |a||b|cos(a,b), ahol az a,b közös kezdőpontú vektorok hajlásszöge a félegyeneseik által meghatározott π-nél nem nagyobb szög

<table>
<tr><td>áll. (ez sk. szorzat)</td><td>vektorok sk. szorzata sk. szorzat (azaz poz. def, szimm., bilineáris fv)</td></tr>
<tr><td>Koordinátázás</td><td></td></tr>
<tr><td>egységvektor</td><td>c_0 egységvektor c irányában, ha egységnyi hosszú, és c vel ||</td></tr>
<tr><td>merőlegesség</td><td>a merőleges b-re, ha a sk. szorzatuk 0</td></tr>
<tr><td>Descartes-féle koord. rendszer</td><td>olyan koord. rendszer, amely ortonormált bázisra épített (i,j,k)</td></tr>
<tr><td>ortonormált</td><td>(e_i|e_j) = delta_ij (Kronecker-delta)</td></tr>
<tr><td>koordináták</td><td>ha {e1,e2,e3} bázis E^3-ben, akkor minden v-hez létezik egyértelműen a1,a2,a3 valósak, hogy v=∏(ei ai). kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van v és (a1,a2,a3) között → koordináták.</td></tr>
<tr><td>műveletek</td><td>összeadás + a-val szorzás: koordinátánként
(a|b)=a1b1+a2b2+a3b3</td></tr>
<tr><td>merőleges felbontás</td><td>tetsz v vektor adott a vektorral || a_p és rá merőleges a_m vektorok összegére bontható: a_p=(a|v)/|a|^2·a, a_m=a-a_p</td></tr>
<tr><td>Vektoriális szorzás, terület, térfogat, többtényezős szorzatok</td><td></td></tr>
<tr><td>vektoriális szorzás</td><td>x: VxV → V; a,b Є V vektorok vektoriális szorzata axb-vel jelölt vektor, amelyre
1. hossza: |a||b|sin(a,b)
2. merőleges a,b-re
3. {a,b,axb} jobbrendszert alkot (ha axb-vel szemben a-t b-be poz. irányú <= π szögű forgatás viszi)</td></tr>
<tr><td>tulajdonságok (5)</td><td>1. axb=-bxa
2. axa=0; axb=0 → b=αa
3. ha a0 egységvektor, akkor a0xb = a0-ra merőleges síkra vetítem b-t, majd a kapott vektort poz. irányban 90 fokkal elforgatom
4. bilineáris (αaxb=α(axb)=ax(αb) minden α Є R + disztibutív)
5. |axb| jelenti az a és b vektorok által kifeszített paralelogramma területét
6. axb = det ([[i,j,k],[a1,a2,a3],[b1,b2,b3]])</td></tr>
<tr><td>terület</td><td>sík pozitív, additív hzfv-e, mely az egyszerű sokszögeken értelmezett, az egybevágóságokra nézve invariáns és az egységnégyzeten az 1 értéket veszi fel
(kiterjesztés: négyzet → téglalap → paralelogramma → háromszög → egyszerű sokszög → síkidom (beírt és körülírt sokszögek))</td></tr>
<tr><td>térfogat</td><td>tér poz, add. hzfv-e, amely egyszerű poliédereken értelmezett, az egybevágóságokra nézve invariáns, teljesíti a Cavalieri-elvet, és az egységkockán az 1 értéket veszi fel
Cavalieri-elv: K1,K2 testeket párhuzamos síkok rendszerével metsztve a keletkező síkidomok területei síkonként megegyeznek, akkor K1,K2-n a térfogatfv. uazt az értéket veszi fel)

megj. a Cav.-elv segítségével látható, hogy a paralelepipedon saroktetraéderének térfogata a par. térfogatának hatodrésze</td></tr>
<tr><td>vegyesszorzat</td><td><(axb)|c>, ez az a,b,c vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, amely poz., ha {a,b,c} jobb.r.-t, és negatív, ha balrendszert alkotnak</td></tr>
<tr><td>felcserélési tétel</td><td><axb|c>=<bxc|a>=<cxa|b>, azaz ha ciklikusan permutálom a,b,c-t, a vegyesszorzat értéke nem változik</td></tr>
<tr><td>kifejtési tétel</td><td>(axb)xc=<a|c>b-<b|c>a</td></tr>
<tr><td>Lagrange-azonosság</td><td><axb|cxd>= (felcs+kif.) = <a|c><b|d> - <b|c><a|d></td></tr>
</table>

Jacobi-azonosság	köv. a=c, b=d egységvektorok → 1=cos^2 α + sin^2 α (axb)xc+(bxc)xa+(cxa)xb = 0
E^3 analitikus geometriája	
helyvektor	O egy fixpont a térben. Tetsz. P ponthoz létezik egyértelműen OP vektor, ami az E^3 közönséges vektora, ezt a P pont helyvektorának nevezzük Ha {i,j,k} o.n. bázis, P pont koordinátái alatt az OP=a1i+a2j+a3k előállításban szereplő (a1,a2,a3) hármast értjük
egyenes megadása	e paraméteres vektoregyenlete: {P:OP=OP_0+t·v}, v az irányvektor, OP_0 az e egy P_0 pontjába mutató vektor, t Є R paraméteres egyenletrendszer: x=x0+v1t y=y0+v2t z=z0+v3t innen t=(x-x0)/v1=... (ha nem 0-k)
sík megadása	a síkot a P0 pontjával és egy rá merőleges vektorral, n-nel adjuk meg, az n a sík egy normálvektora vektoregyenlet {P|<OP-OP0|n>=0} 0=Ax+By+Cz+D (n=(A,B,C))
kollineáció	az E^3 → E^3 egyenestartó leképezéseit kollineációknak nevezzük
lineáris transzformáció egyenestartó	az A: E^3 → E^3 lineáris transzformáció egyenestartó, azaz kollineáris, mert x=x0+tv egy tetsz. egyenes paraméteres vektoregyenlete. A(x)=A(x0+tv)=A(x0)+tA(v). Mivel A(0)=0 (A lineáris), ezért az így leírható kollineációknak van fixpontja (pl. az eltolás így nem reprezentálható)
Lineáris leképezések mátrixa	
alaphelyzet	van egy fix. on. bázis: A lin. leképezés <-> A mátrixa n=(A,B,C) egységvektor V_e=n^T·n (diadikus szorzat)= [[A^2,AB,AC],[BA,B^2,BC],[CA,CB,C^2]] V_n=(n-vel való vektoriális szorzat mxa) = [[0,-C,B],[C,0,-A],[-B,A,0]]
1. O-n áthaladó n egységnormálvektorú síkra von. tükrözés	x'=T_s·x, T_s=(1-2V_e)
2. n egységnormálvektorú síkra von. merőleges vetítés mxa	V_s=(1-V_e)
3. tükrözés O-n áthaladó egyenesre	T_e=(-1)·T_s=2V_e-1
4. vetítés O-n áthaladó egyenesre	V_e
5. n egységvektorú, O-n áthaladó egyenes körüli φ szögű forgatás	cos(φ)(1-V_e)-sin(φ)V_n
O-pont modell	
def.	x*~x, ha van t!=0: x*=tx (x,y) P-pont inhomogén koordinátái (x,y,1) ekv.osztálya a P pont homogén koordinátái térben hasonlóan def-hatjuk a hom. koordinátákat: (x,y,z) → {(x,y,z,1)·t, t!=0}
előnyei (3)	1. a ∞ távoli pontok szintén rendelkeznek hom. koord.kal, ezek a (x,y,0) alakú pontok 2. minden egyenestartó leképezés mxszorzással számolható (eltolás is)

<table>
<tr><td></td><td>3. a pontok és egyenesek „duális kapcsolatba” kerülnek egymással</td></tr>
<tr><td>1. pont</td><td>inhom: x Є R^3
hom: {ax,x Є R^4, a!=0} ekv. osztályok R^4-en (ha a=0 → ∞ távoli pont)</td></tr>
<tr><td>2. párhuzamosságtartó kollineációk</td><td>inhom: x*=Ax+t DE: ezek ||-tartók (pl. centrális vetítés nincs benne)
hom: bizonyos x*=Ax leképezések ekv. osztályainak felelnek meg {bA* | b!=0}, ahol A*=[[A,t],[0^T,1]]</td></tr>
<tr><td>3. egyenes</td><td>inhom: x1,x2 affin komb-ja
(x=ax1+(1-a)x2) <- affin komb
(ha 0<=a<=1, akkor konvex komb.)
(ha 1-a helyett b → lin. komb)
hom: cx=ac1x1+(1-a)c2x2 (ci!=0)
x az x1 és x2 lin. komb-ja
az x1,x2-n keresztülhaladó egyenes az R^4 egy 2-dim. altere
x*=Ax lin. kekepezés egyenest egyenesbe visz (egyenestartó)</td></tr>
<tr><td>4. kollineáció</td><td>hom: x*=Ax alakú kifejezések</td></tr>
<tr><td>dualitás</td><td>e egyenes a z=1 síkban <-> (e,0) sík <-> {normálvektorok} → egyenes <-> {(n1,n2,n3)·b, b!=0}</td></tr>
<tr><td>vonalkoordináták</td><td>az e egyenes vonalkoordinátái a 3-dim. sorvektorok ekv. osztályai a !=0 számmal való szorzásra nézve</td></tr>
<tr><td>megj.</td><td>P Є e <-> OP egyenes illeszkedik (O,e) síkra <-> P homogén koordinátáiból álló oszlopvektor merőleges az e vonalkoordinátáiból álló sorvektorra, azaz, ha a reprezentánsokra teljesül: u·v=0</td></tr>
</table>

A-18 Másodrendű görbék és felületek

<table>
<tr><th>Kúpszeletek</th><th></th></tr>
<tr><td>térbeli def.</td><td>kúpszelet a kettős körkúp csúcson nem átmenő síkkal való metszete
######</td></tr>
<tr><td>kúpszelet def, fajtája</td><td>adott alfa sík F pontja és d egyenese. A kúpszelet azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre |PF|/|Pd|=konstans...
a, <1 → ellipszis (alfa minden kúpalkotót metsz) → 0 ∞ távoli pont

b, =1 → parabola (alfa sík pontosan 1 kúpalkotóval ||) → 1 ∞ távoli pont
c, >1 → hiperbola (alfa sík pontosan 2 kúpalkotóval ||) → 2 ∞ távoli pont</td></tr>
<tr><td>1. ellipszis (Dandelin tételei)</td><td>adott alfa síkon F1,F2 pontpár és 2a távolság. Azon P pontok mértani helye a síkon az ellipszis, amelyekre |PF1| + |PF2| = 2a
######</td></tr>
<tr><td>2. parabola</td><td>adott egy F pont és egy d egyenes. Azon P pontok mértani helye a síkon a parabola, melyekre |PF|=|Pd|
######</td></tr>
<tr><td>3. hiperbola</td><td>adott a síkon F1,F2 pontpár és 2a távolság. A hiperbola azon P pontok mértani helye, melyekre ||PF1| - |PF2||=2a
######</td></tr>
<tr><th>Alapábrák</th><th></th></tr>
<tr><td>1. ellipszis</td><td>######
csúcspontok: A,B,C,D</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>AB: nagytengely, CD: kistengely</td></tr>
<tr><td></td><td>P általános pont (F1P=AQ, F2P=BQ)</td></tr>
<tr><td></td><td>AB és CD szimm. tengelyek, O szimm.centrum</td></tr>
<tr><td>külső/belső pont (3)</td><td>ellipszisnél: K külső pont, ha |KF1|+|KF2|>2a, belső, ha <2a</td></tr>
<tr><td></td><td>parabolánál: K külső, ha |KF|>|Kd|, belső, ha <</td></tr>
<tr><td></td><td>hiperbolánál: K külső, ha ||KF1|-|KF2||<2a, belső, ha >2a</td></tr>
<tr><td>érintő (def, ellipszisnél)</td><td>t a kúpszelet érintője, ha pontosan egy kúpszeletpontot tartalmaz, az összes többi pontja pedig a kúpszelet külső pontja</td></tr>
<tr><td></td><td>ellipszisnél P-beli érintő a PF1, PF2 ún. vezérsugarak külső szögét felező (P-n áthaladó) egyenes</td></tr>
<tr><td></td><td>######</td></tr>
<tr><td>ellenpont/ellenalakzat (def, ellipszisnél)</td><td>E ellenpont, ha az egyik fókusz (pl. F2) egy érintőre vett tükörképe, ellenalakzat (vezéralakzat): az ellenpontok halmaza</td></tr>
<tr><td></td><td>F2 pont tükrözésével adódó ellenalakzat az F1 körüli 2a sugarú kör</td></tr>
<tr><td></td><td>2 ellenkör van</td></tr>
<tr><td>főkör (def, ellipszisnél)</td><td>az F2 fókusz merőleges vetületeinek (az érintőkörön) mértani helye a főkör</td></tr>
<tr><td></td><td>a főkör O kp-ú a-sugarú kör</td></tr>
<tr><td>2. parabola</td><td>######</td></tr>
<tr><td></td><td>C: csúcspont</td></tr>
<tr><td></td><td>tengely (szimm.tengely): CF egyenes</td></tr>
<tr><td></td><td>vezérsugarak: PF, PE (E: P merőleges vetülete d-n)</td></tr>
<tr><td></td><td>érintő: vezérsugarak belső szögét felezik</td></tr>
<tr><td></td><td>ellenalakzat: a d egyenes → d vezéregyenes</td></tr>
<tr><td></td><td>„főkör”: csúcsérintő</td></tr>
<tr><td>3. hiperbola</td><td>######</td></tr>
<tr><td></td><td>új pont szerkesztése</td></tr>
<tr><td>külső pontból érintő szerkesztése</td><td>adottak F1,F2,2a,K (külső pont)</td></tr>
<tr><td></td><td>1. t érintőkörhöz tartozó E ellenpont = (K középpontú kör F1-en át) ∩ (F2 kp-ú 2a sugarú kör)</td></tr>
<tr><td></td><td>2. EF1 szakaszfelező merőlegese a t egyenes</td></tr>
<tr><td></td><td>3. t ∩ F1E = P érintési pont</td></tr>
<tr><td>aszimptota</td><td>O-n áthatadó érintőkör szerkesztése</td></tr>
<tr><td></td><td>######</td></tr>
<tr><td></td><td>a két mo a hiperbola aszimptotája (érintőként viselkednek, mégsem azok)</td></tr>
<tr><td></td><td>a fókuszra mint átmérőre rajzolt kör és az aszimptota metszéspontja rajta van az A-beli érintőn</td></tr>
<tr><td></td><td>######</td></tr>
<tr><td>Affinitások</td><td></td></tr>
<tr><td>def. (affinitás, tengelyes ~, iránya, tengelyes merőleges ~, aránya, mi határozza meg)</td><td>a sík kölcs. egyért. egyenestartó leképezéseit affinitásoknak nev.</td></tr>
<tr><td></td><td>tengelyes az aff, ha fixpontjai egy egyenes pontjai</td></tr>
<tr><td></td><td>ilyenkor PP' egyenesek ||-k, ez az aff. iránya</td></tr>
<tr><td></td><td>tengelyes merőleges az aff, ha iránya merőleges a tengelyre</td></tr>
<tr><td></td><td>arány: || szelők tétele alapján számolható (|PQ'|/|PQ| áll, ha P a QQ' egyenesen van)</td></tr>
<tr><td></td><td>egy affinitás meghatározott a tengelye, iránya, aránya alapján is</td></tr>
<tr><td>áll. (ellipszis)</td><td>az ellipszis a főkörre b/a arányú merőleges tengelyű aff.</td></tr>
<tr><td></td><td>######</td></tr>
<tr><td>konjugált (kapcsolt) átmérőpár</td><td>a főkör merőleges átmérőpárjából a fenti affinitásnál keletkező átmérőpár</td></tr>
</table>

Rytz-szerkesztés	ellipszis szerkesztése konjugált átmérőpárból
t. (hiperbola)	bmely 2 hiperbola affinitással egymásba transzformálható
áll. (mi határozza meg)	egy hiperbolát meghatároz a 2 aszimptotája és a fókuszpont
áll. (par. területe állandó)	a PT10T2 paralelogramma területe állandó
	######
áll. (szelő)	e szelő, P,Q a 2 metszéspont, R és S e metszete a 2 aszimptotával. Ekkor |PR|=|QS|
	######

A-19 Konvex poliéderek

Euler-tétel

t. (E-t konvex poliéderre)	E^3-ben P egy konvex poliéder, akkor l-e+c=2, ahol l a lapok, c a csúcsok, e az élek száma.
t. (Euler-Poincaré formula)	Legyen P n-dim. konvex poliéder, az i-dim. lapok száma a_i. akkor ∑((-1)^i a_i)=1+(-1)^(n+1)
csillagszerű	P része E^3 csillagszerű, ha van O Є P, hogy minden X Є P-re OX Є P
t. (E-t csillagszerű poliéderre)	Ha P csillagszerű poliéder, akkor l-e+c=2
	biz: gömbi kétszögekkel
Kara Theodorik bizonyítása, feltételei	bolygó+gátrendszer, 1 vizes tartomány, gátat robbantok, de feleslegesen nem. Cél: az egész bolygót, minden száraz tartományt elárasztani. Feltételek
	1. minden él pontosan 2 laphoz tartozzon
	2. lapösszefüggő (azaz, ha F és G lap, létezik lapok F-fel kezdődő, G-vel végződő sorozata úgy, hogy a szomszédos lapok metszete az él)
	3. élösszefüggő (azaz ha C1,C2 két csúcs, van olyan C1-gyel kezdődő, C2-vel végződő csúcssorozat, hogy a szomszédos csúcsok a poliéder élei)
	4. egyszeresen öf. (azaz tetsz. zárt éllánc bontsa legalább 2 részre)
közönséges sokszög	ha az élek ciklusokat alkotnak (azaz felsorolhatók úgy, hogy az egymást követők metszetei csúcsok, és minden csúcsból pontosan 2 él megy)
egyszerű sokszög	ha közönséges és egyszeresen öf (azaz tetsz határtól határig terjedő töröttvonal pontosan 2 részre osztja)
közönséges poliéder	ha lapjai közönséges sokszögek, öf., és az egy csúcsban találkozó lapok élei ciklust alkotnak (azaz felsorolhatók úgy, hogy az egymást követő élek mindig a csúcsot tartalmazó egyik lapot határozzák meg, és minden, a csúcsot tartalmazó lap a felsorolás egyik ilyen lapja)
egyszerű poliéder	ha közönséges, a lapok egyszerű sokszögek és a felülete egyszeresen öf (azaz tetsz. zárt éllánc legalább 2 részre bontja)
t. (E-t egyszerű poliéderre)	Ha P egyszerű poliéder, akkor l-e+c=2

Szabályos poliéderek

def. (affin fgtlen, n-dim szimplex, konvex burok, n-dim. konvex pol., ez konv. burok) – 5	R^n {v1,...,vk} pontrendszere affin fgtlen, ha ∑(ai vi)=0, ∑(ai)=0 feltételből → ai=0
	n-dim. szimplex: affin fgtlen (n+1)-elemű pontrendszer konvex burka
	R^n-ben conv H={x Є R^n | van h1,...,h(n+1) Є H és ai>=0, ∑(ai)=1, hogy x=∑(ai hi)}

	R^n-ben legfeljebb (n+1)-elemű affin pontrendszer található, így legfeljebb n-dimenziós szimplex, ha a szimplex dimenziója a pontrendszerben szereplő pontok száma -1
	n-dim. konvex poliéder: véges sok n-dim. zárt féltér metszete (amely korlátos és nem üres belsejű)
	ha P n-dim. konvex poliéder, akkor csúcsainak konvex burka
def. (meghatározó féltér, (n-1)-dim. lap, zászló, Gamma_P, szabályos) – 5	P meghatározó féltere egy olyan féltér, amelynek elhagyása esetén a maradék félterek metszetében P valódi részhz (P határozottan nő)
	A P (n-1)-dim. lapja a P metszete egy meghatározó féltér határoló síkjával
	Z a P zászlója, ha {F_0,...,F_(n-1),P} alakú laphalmaz, ahol dim F_i=i, és F_(i+1) tartalmazza F_i-t minden i-re
	A P konvex poliéder egybevágóság (izometria) csoportja Gamma_P={φ R^n-beli egybevágóságok $\mid$ φ(P)=P}
	A P konv. pol. szabályos, ha Gamma_P tranzitívan hat P zászlóinak Z* halmazán (Z',Z" Є Z* → van φ Є Gamma_P, hogy φ(Z')=Z")
	köv. a P azonos dim. lapjai páronként egybevágóak → minden éle egyenlő hosszú + szab. pol. köré írható gömb, azaz van olyan pont a térben, amely minden csúcsától = távolságra van
def. (csúcsalakzat)	P csúcsalakzata a c csúcsban: a c csúccsal szomszédos csúcspontok konvex burka
áll. (P szabályos → …)	P szabályos poliéder → azonos dimenziós lapjai egybevágó szabályos poliéderek és a csúcsalakzatai úgyszintén
	biz: (n-1)-dimenziós lapnak van olyan zászlója, P zászlójának első (n-1) elemével egyezik meg + φ tranzitív + dimenzióra vonatkozó indukció
feltétel (Euler-tételből)	n=3 esetén szabályos pol. lapjai azonos oldalszámú szab. sokszögek, és csúcsalakzatai azonos típusú szab. sokszögek → minden lapnak uannyi (n) oldala van, és minden csúcsban uannyi (m) él találkozik
	c=2e/m, l=2e/n → 1/n+1/m > ½
realizáció (5):	m, n értékei:
	3, 3 → tetraéder
	3, 4 → kocka
	4, 3 → oktaéder
	3, 5 → dodekaéder
	5, 3 → ikozaéder
n-dimenziós poliéderek	
szimbólum	A P szabályos poliéder szimbóluma indukcióval definiálható: n=2 esetben legyen az oldalszám. Ha definiálva van n-1 dimenziós szabályos poliéderekre, legyen P n-dim. szab. poliéder szimbóluma az az (n-1) hosszú természetes számokból álló sorozat, melynek első eleme a P kétdimenziós lapjainak oldalszáma, a többi n-2 elem pedig a csúcsalakzathoz rendelt szimbólum. Jel: σ(P)
ρ(P)	legyen ρ(P)=l^2/(4r^2), ahol l a P szab. pol. élhossza, r a P köré írt gömb sugarának hossza
áll. (ρ(P)=...)	ha P n-dim. szab. pol., P' csúcsalakzattal, p oldalszámú 2-dim. lapokkal, akkor ρ(P)=1-(cos^2(π/p))/ρ(P')
áll. (határ ρ(P)-re)	ρ(P')<=1/4, kül. ρ(P)<0 → ellentmondás
n-dim. szab. poliéderek	{3,...,3} → szimplex (ρ(P)=(d+1)/2d)
	{4,3,...,3} → kocka (ρ(P)=1/d) → d<=5!!!
	{3,...,3,4} → keresztpolitóp (+/-1-ek a csúcsai, ρ(P)=1/2)

t. (Cauchy)	Ha P,P' konvex testek, melyek laphálói izomorfak, és a megfelelő lapok egybevágóak, akkor P és P' egybevágó. biz: 3 eset: 1. egy lapszög sem változik meg 2. lapszögek különbözők 3. vannak kül. és megegyező lapszögpárok 2.-nél ötlet: +/- jelek az élekre (lapszög >/< eredeti)jel-lemma + kar-lemma, jelváltozások száma...)

A-20 Projektív geometria

Projektív sík	
def. (pont, egyenes, illeszkedés)	P(R^2) valós projektív sík
	pontjai/egyenesei a homogén hármasok osztályai
	O-pont modell, illeszkedés: x pont, u egyenes: <u|x>=0 <-> illeszkednek → dualitás
Desargues-i sík (3 áll + 1 tétel)	1. bmely 2 pont egyértelműen meghatároz egy egyenest
	2. bmely 2 egyenes egyértelműen meghatároz egy pontot
	3. van 4 általános helyzetű pont (<-> semelyik 3 sem illeszkedik 1 egyenesre)
	Dargues-tétel (önduális tétel): 2 háromszög pontra nézve perspektív <-> ha egyenesre nézve az
	######
Koordinátázás	E_i referenciapontok
	P<->(P1,P2,P3) koordináták, ahol Pj Є K test
	egy K test feletti koordinátázás létrehozható
	a szorzás def. alapján látszik, hogy K komm. <-> teljesül a síkon a Papposz-Pascal tétel
t. (Papposz-Pascal)	######
ált. def.	P(K^n): K test feletti n-dim. projektív tér, ha
	1. homogén (n+1)-esek osztályai a pontok (a koordináták K-beliek)
	2. homogén (n+1)-esek osztályai az egyenesek is
	3. u,x illeszkednek <-> <x|u>=0
Leképezések	
egybevágóság	P(R^2) egybevágóság: olyan leképezés, amely
	1. egyenestartó
	2. bijektív
	3. szakasz hosszát őrzi (P → P', Q → Q', akkor |PQ|=|P'Q'|)
affinitás	1. egyenestartó
	2. bijektív
	3. osztóviszonytartó (P,Q,R 1 egyenesen vannak, képük P',Q',R' → |PQ|/|QR|=|P'Q'|/|Q'P'|; (PQR)=PR/RQ irányított szakaszok az egyenesen)
	P(R^2) → P(R^2)
	- közönséges → ideális
	- ideális → közönséges
projektivitás	1. egyenestartó
	2. bijektív
	3. kettősviszonytartó ((PQRS)=(PQR)/(PQS)=(P'Q'R')/(P'Q'S'))
perspektivitás	spec. projektivitás: a pontsor síkbeli pontból vetítése egy másik pontsorra
t. (Papposz-Steiner)	a perspektivitás projektivitás (definiálható sugárnégyes kettősviszonya: (a,b,c,d)=(A,B,C,D))

	######
kúpszelet	A kúpszelet projektív, de nem perspektív kapcsolatban lévő egyenesnek megfelelő elemek metszetének halmaza
t. (Pascal)	kúpszeletbe írt hatszög szemközti oldalpárjainak metszéspontjai kollineárisak (1 egyenesen vannak) – Pascal-egyenes
	######
t. (Brianchon)	Kúpszelet köré írt hatszög szemközti csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át. (B: Brianchon-pont)
	######

(B) ANALÍZIS, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA, OPERÁCIÓKUTATÁS, FOLYTONOS MATEMATIKA TÉTELSOR

Analízis

B-1 Határérték, folytonosság, differenciálhatóság egy- és többváltozós valós függvényekre. Abszolút folytonos függvények.

Egyváltozós függvények határértéke, folytonossága	
torlódási pont	b pont az A hz. torl. pontja, ha minden ε>0 K_(b,ε)\{b} ∩ A nem üres
lim_(x → x0) f(x)=A	1. x0 torl. pontja D_f-nek (ért. tart.) 2. minden ε>0 van δ>0, hogy |f(x)-A|<ε, ha 0<|x-x0|<δ(ε)
f folytonos x0-ban	1. x0 Є D_f 2. x0 torl. pontja D_f-nek 3. lim_(x → x0) f(x)=f(x0)
def. (egyoldali határérték,véges ugrás, megszüntethető szakadás, lényeges szakadás)	… (l. füzet)
átviteli elv	legyen x0 torl. pontja D_f-nek 1. ha lim_(x → x0) f(x)=A, akkor minden x0-hoz tartó {xn} sorozatra, amire {xn} Є D_f, és xn!=x0 esetén lim_(n → ∞) f(xn) = A 2. ha minden x0-hoz tartó {xn}, xn!=0, xn Є D_f és lim_(n → inf) f(xn)=A → lim_(x → x0) f(x)=A köv. sorozatokra tanult tételek átviteli elvvel átvihetők fv-ekre
példák	x^n, sin(x), cos(x) → lin. komb-jai, P_k(x)/P_n(x) rac. törtfvek folytonosak (ahol P_n(x)!=0)
nevezetes határértékek	lim_(x → 0) sin(x)/x = 1, lim_(x → 1) (cos(x)-1)/x = 0
ötett fvek folytonossága	folyt. fv-ekből ötett fv. is folyt (feltéve, hogy ott értelmezve van)

t. (f poz. x0-ban → …)	ha f folyt. x0-ban, és $f(x_0)>0$, akkor van $K_{(x_0,\delta)}$: $f(x)>0$ minden $x \in K_{(x_0,\delta)}$ (azaz egy kis környezetében is poz.)
nyílt	G halmazt nyíltnak nevezzük, ha minden $x \in G$-re van $K_{(x,\delta)}$ része G (azaz minden pontja belső pont)
t. (Bolzano)	Ha f folyt. [a,b]-on, és $f(a)<c<f(b)$, akkor van $d \in (a,b)$: $f(d)=c$ köv: ha f folyt. [a,b]-on, $f(a)<0<f(b) \rightarrow f(x)=0$ egyenletnek legalább 1 gyöke van (a,b)-ben köv. minden ptlan fokszámú polinomnak van gyöke
kompakt	korlátos (környezetbe foglalható) és zárt (komplementere nyílt)
megj.	Bolzano-tételben folytonosságot nem elég kompakt halmazon megkövetelni
t. (Weierstrass-I)	ha f folyt. [a,b] (kpt)-on, akkor korlátos is.
t. (Weierstrass-II)	ha f folyt. [a,b] (kpt)-on, akkor f értékkészletének van maximális és minimális eleme. (azaz fölveszi a szuprémumát és infimumát.)
egyenletes folytonosság	f egyenletesen folytonos a H hzon, ha minden $\varepsilon>0$-ra van $\delta(\varepsilon)>0$ (független x0-tól!!!), amire $\lvert f(x)-f(x_0)\rvert<\varepsilon$, ha $\lvert x-x_0\rvert<\delta(\varepsilon)$ minden $x,x_0 \in H$ esetén
t. (egy. folyt.)	kpt hz-on folyt. fvek egyenletesen folytonosak az adott halmazon

Egyváltozós függvények deriválása

differencia/differenciálhányados	$(f(x+h)-f(x))/h$: differenciahányados $\lim_{h \to 0} (f(x+h)-f(x))/h$: differenciálhányados
derivált	$x_0 \in D_f$, x0 torl. pontja D_f-nek f differenciálható x0-ban, ha létezik $\lim_{h \to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$ és ezt a határértéket az f x0-beli deriváltjának (diff. hányadosának) nev. Jel: $f'(x_0)$, $df/dx \mid x_0$
egyoldali der.	ha csak h>/<0-t tekintünk → jo/bo der.
deriválási szabályok	$(x^n)'=nx^{n-1}$ $(x^a)'=ax^{a-1}$ a valós, $x>0$ ha f és g dhatók x0-ban, akkor 1. $(f+g)'=f' + g'$ 2. $(cf)'=cf'$ 3. $(f\cdot g)'=f'\cdot g+g'\cdot f$ 4. $(f/g)'=(f'\cdot g - g'\cdot f)/g^2$ (ha $g(x_0)\neq 0$)
példák	polinomok mindenütt dhatók $\sin x'=\cos x$, $\cos x'=-\sin x$ trig. polinomok dhatók
t. (dhatóság szüks. és elégs felt.)	f dható x0-ban <-> $(f(x_0+h)-f(x_0))/h=f'(x_0) + \varepsilon$, ahol $\varepsilon \to 0$, ha $h \to 0$ <-> $f(x_0+h)-f(x_0) = h\cdot f'(x_0) + h\cdot\varepsilon(h)$, ahol $\varepsilon(h) \to 0$, ha $h \to 0$
megj.	a diff. hányadosnak nincs értelme, ha h egy vektor. a diff. hányadosnak nincs értelme többvált. fv esetén
t. (dható → folyt)	ha f dható x0-ban, akkor folytonos is x0-ban
ötett fvek differenciálása	$(f\circ g)(x)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
inverz fv. deriválása	ha f dható a-ban, és $f'(a)\neq 0$, $f(a)=b$ létezik f^{-1}, $f^{-1}(b)=a$, akkor $(f^{-1}(x))'\|_b=1/(f'(x))\|_a$
megj.	kölcs. egyért. fv-nek van inverze. Az ért. tart. és az értékkészlet szerepe fölcserélődik. ha f szig. mon. nő, akkor van inverze (elégséges feltétel)
t. (implicit fv.-tétel)	$f(x,y)=0$, ha $\partial f/\partial y\neq 0$, és $f(x_0,y_0)=0$, akkor x egy környezetében $y=y(x)$, amely kielégíti az impl. fv-kapcsolatot, $f(x,y(x))=0$ a környezet minden pontjában, és $y(x_0)=x_0$

	implicit fv. kapcsolatot úgy deriválunk x szerint, hogy a benne lévő másik változót x fv-eként értelmezzük
példa	x^2+y^2=1 → 2x+2y(x)y'(x)=0 → y'(x)=...
lokális szélsőérték	D_f x0 belső pontjában az f-nek lok. max/min-a van, ha van x0-nak olyan környezete, amelyben minden x-re f(x0)>=/<=f(x)
t. (Rolle)	Ha f folyt. a-ban (jobbról), b-ben (balról) (azaz f folyt [a,b]-n), és f dható (a,b)-on, és f(a)=f(b), akkor van legalább 1 c Є (a,b), amire f '(c)=0
t. (Lagrange)	ha f folyt [a,b]-n, dható (a,b)-ben, akkor van c Є (a,b), amire f '(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)
t. (Cauchy)	ha f,g folyt [a,b]-ben, dható (a,b)-ben, és g'(x)!=0 (x Є (a,b)), akkor van c Є (a,b), hogy f '(c)/g'(c)=(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))
L'Hospital szabály	(0/0, ∞/∞ stb. típusú határértékeknél) ha lim_(x → x0) f(x)=0 és lim_(x → x0) g(x)=0, és f,g dható K_(x0,δ)-ban, és g'(x)!=0 és létezik lim_(x → x0) f '(x)/g'(x), akkor lim_(x → x0) f(x)/g(x) = lim_(x → x0) f '(x)/g'(x)
paraméteres megadású görbék	ha dx/dt>0 (jel: x*), akkor az x=a(t), y=b(t) t Є I paraméteresen megadott görbe tekinthető y=f(x) grafikonjának és f '(x)=y*/x*=b*/a* ha a,b 2x dható, akkor y''=(y**x*-x**y*)/(x*)^3
derivált szerepe fv. vizsgálatban	1. ha f dható és x0-ban lok. szé-e van, akkor f(x0)=0 (x0 belső pontja D_f-nek) 2. ha f dható x0 egy környezetében és f '(x0)=0, és f '(x) előjelet vált x0-ban, akkor f-nek lok. szé-e van x0-ban 3. ha f 2x dható x0-ban, f '(x0) = 0, és f ''(x0) >/< 0, akkor f-nek lok. min. / max-a van 4. ha f-nek x0-ban inflexiója van és 2x dható x0-ban, akkor f ''(x0)=0 5. ha f ''(x0)=0, és 2x dható x0 környezetében és f '' előjelet vált x0-ban, akkor f-nek inflexiója van x0-ban
Többváltozós függvények határértéke, folytonossága	
többváltozós fv. def.	f(x1,...,xm), f(x), x Є R^m D_f = {x Є R^m: f(x) értelmezett} R_f = {f(x): x Є D_f}
megj. (korlátos)	f korlátos, ha R_f része R korlátos hz
határérték	lim_(x → a) f(x) = L, ha 1. a torlódási pontja D_f-nek 2. minden ε>0 van δ>0, hogy |f(x)-L|<ε, ha 0<|x-a|<δ(ε), x Є D_f
megj. (parc. határérték)	lim_(x → a, x Є X) f(x) = L, ha minden ε>0 van δ>0, hogy |f(x)-L|<ε, ha 0<|x-a|<δ(ε), x Є D_f ∩ X ha lim_(x → a) f(x)=L, akkor lim_(x → a, x Є X) f(x)=L minden X
átviteli elv	lim_(x → a) f(x) = L <-> minden xn → a, xn=a, xn Є D_f sorozatra f(xn) → L
köv.	köv. lim_(x → a) f=L, lim_(x → a) g=K, a torl. pontja D_f ∩ D_g, akkor lim f+/-g=L+/-K, lim fg=LK, lim f/g=L/K (ha K!=0) rendőrelv is működik
megj.	lim_(x → a) f(x) = ∞ <-> minden K>0-ra van δ>0, hogy 0<|x-a|<δ, x Є D_f esetén f(x)>K
f folytonos	f(x) folytonos az a Є D_f pontban, ha minden ε>0 van δ>0, hogy |x-a|<δ, x Є D_f esetén |f(x)-f(a)|<ε f(x) folytonos X része D_f-en, ha minden x Є X-ben folyt.

<table>
<tr><td></td><td>f(x) folytonos a-ban <-> a iz. pont D_f-ben, vagy a torl. pont és lim_(x → a) f(x)=f(a)</td></tr>
<tr><td></td><td>f,g folyt → f+/-g, fg és g(a)!=0 esetén f/g is folyt. a-ban</td></tr>
<tr><td></td><td>ha g1(x),...,gr(x) folyt a-ban és f(u1,...,ur) folyt. (g1(a),...,gr(a))-ban, akkor f(g1(x),...,gr(x)) is folyt. a-ban</td></tr>
<tr><td>t. (Bolzano-Weierstrass)</td><td>bármely x_n Є R^m korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata</td></tr>
<tr><td>t. (kpt.)</td><td>kpt hz-on folytonos fv f:K → R, K része R^m, akkor</td></tr>
<tr><td></td><td>1. f korlátos K-n</td></tr>
<tr><td></td><td>2. f felveszi K-n a maximumát és a minimumát</td></tr>
<tr><td></td><td>3. f egyenletesen folytonos K-n, azaz minden ε>0-ra van δ, hogy ha x,y Є K, |x-y|<δ → |f(x)-f(y)|<ε (közeli pontok közeli értékeket vesznek fel)</td></tr>
<tr><td><h2>Többváltozós függvények deriválása</h2></td><td></td></tr>
<tr><td>parciális der.</td><td>x Є R^m, f(x) m-változós, a Є R^m</td></tr>
<tr><td></td><td>df/dxi(a)=lim_(xi → ai) (f(a1,...xi...am)-f(a))/(xi-ai), jel: f '|xi</td></tr>
<tr><td>megj. (magasabb rendű deriváltak)</td><td>d^2f/dxidxj...</td></tr>
<tr><td>t. (Young)</td><td>ha f ''_xy és f ''_yx közül legalább az egyik folytonos (x0,y0)-ban, akkor f ''_xy=f ''_yx(x0,y0)</td></tr>
<tr><td>totális diffhatóság</td><td>f(x) dható a-ban, ha értelmezett a egy kis környezetében és</td></tr>
<tr><td></td><td>f(x)=f(a)+∑(Ai(xi-ai))+ε(x), ahol lim_(x → a) ε(x)/|x-a|=0</td></tr>
<tr><td></td><td>ha f dható a-ban, akkor Ai=f '_xi(a) (feltesszük h léteznek)</td></tr>
<tr><td>gradiens</td><td>az f fv a-beli gradiens (deriváltvektora)</td></tr>
<tr><td></td><td>grad f(a) = ∆f(a)=(f '_x1(a),...,f '_xm(a))=f '(a)</td></tr>
<tr><td>közvetett fv. deriválása (láncszabály)</td><td>(f○g)(x)'=f '(g(x))·g '(x)</td></tr>
<tr><td>vektorfv-ek (def, dható, láncszabály)</td><td>f: R^m → R^k, f=(f1,...,fk), fi(x1,...,xm)</td></tr>
<tr><td></td><td>f tot. dható a Є R^m-ben, ha minden f_i tot. dható a-ban</td></tr>
<tr><td></td><td>ha f dható a-ban, akkor f(x)=f(a)+f '(a)(x-a)+o(x), ahol f '(a)=(grad f1(a),...,grad fk(a)) deriváltmátrix</td></tr>
<tr><td></td><td>láncszabály ált. alakja: f: R^n → R^k, g: R^m → R^n, g dható a Є R^m-ben, f dható g(a) Є R^n-ben, akkor (f○g) is dható a-ban és der.mátrixa: (f○g)'(x)=f '(g(x))g'(x)</td></tr>
<tr><td>t. (dhatóság elégs. felt.)</td><td>ha f '_xi-k folytonosak a-ban, akkor f dható a-ban</td></tr>
<tr><td>iránymenti derivált</td><td>e Є R^m, |e|=1, akkor f(x)-nek az e irány mentén vett iránymenti deriváltja a-ban:</td></tr>
<tr><td></td><td>D_e f(a) = lim_(t → 0+) (f(a+te)-f(a))/t</td></tr>
<tr><td>megj.</td><td>ha f dható a-ban, akkor minden irány mentén is dható, és D_e f(a)=grad f(a)·e</td></tr>
<tr><td>t. (implicit fv.-tétel)</td><td>F(x,y) m+1 változós fv, x Є R^m, y Є R</td></tr>
<tr><td></td><td>Legyen F(a,b)=0. Ha F folytonos (a,b) egy környezetében és F'_y létezik és !=0 az (a,b) egy környezetében, akkor van a-nak olyan (R^m-beli) környezete, ahol létezik egyértelműen y(x) folytonos fv, hogy y(a)=b és F(x,y(x))=0 ebben a környezetben.</td></tr>
<tr><td></td><td>Ha ezt is feltesszük, hogy F dható (a,b)-ben, akkor y(x) is dható a-ban, és y'_xi(a)= - F'_xi(a,b)/F'_y(a,b)</td></tr>
<tr><td>t. (Lagrange-középérték tétel)</td><td>Legyen f folytonos az [a,x]-on, dható (a,x)-en, akkor van c Є (a,x), hogy</td></tr>
<tr><td></td><td>f(x)-f(a)=∑(f '_xi(c)(xi-ai))</td></tr>
<tr><td>lokális szélsőérték</td><td>1. ha f dható a-ban és a-ban lok. szé. van, akkor grad f(a)=0</td></tr>
<tr><td></td><td>2. ha f 2x is dható és a-ban lok. min → grad f(a)=0, és f ''(a) poz. definit mx.</td></tr>
<tr><td></td><td>3. ha f 2x dható a-ban és grad f(a)=0, és f ''(a) poz. def → a-ban lok. min. van</td></tr>
<tr><td>megj.</td><td>f '' definit <-> det f '' >0</td></tr>
</table>

	f " poz. def <-> f "_xx >0 (<-> minden főminor >0) f " neg. def <-> f "_xx<0 (<-> főminorok sorozata -+-+...)
t. (Lagrange multiplikátoros módszer)	feltételes szélsőérték feladat mo-ára Legyen x Є R^m, keressük f(x) szélsőértékeit a g1(x)=0,...,gk(x)=0 feltételek mellett akkor grad f = ∑ (λ_k grad g_k) [m egyenlet] g_i (x)=0 [k egyenlet] nem lin. egy.rendszer az x1,...,xm,λ1,...,λk változóra. A mo-ként kapott x feltételes szé-e f-nek
Abszolút folytonos függvények	
definíció	(X,d) metrikus tér, I része R. f:I → X abszolút folytonos, ha minden epszilon>0-ra van delta>0, hogy I bármely páronként diszjunkt [xk,yk] részintervallumára sum(|yk-xk|)<delta, akkor sum(d(f(yk),f(xk)))<epszilon
tulajdonságok	1. két a.f. összege és különbsége is a.f., ha a fv.-ek értelmezési tartománya korlátos és zárt, akkor a szorzatuk is a.f. 2. korlátos zárt int-on értelmezett a.f. fv. reciproka is a.f., ha sehol nincs gyöke 3. minden a.f. fv. egyenletesen folytonos és így folytonos is. Minden Lipschitz-folytonos fv. absz. folytonos. 4. f:I → R a.f. → majdnem mindenütt deriválható, a derivált Lebesgue-integrálható és f növekményével egyezik meg

B-2 Metrikus terek topológiája.

Metrikus tér	
def.	(X,d) metrikus tér, ha X nemüres hz, ill d:X x X → R+ (metrika): 1. d(x,y)>=0 és =0 <-> x=y 2. d(x,y)=d(y,x) 3. d(x,y)<=d(x,z)+d(z,y)
def. (gömb, környezet)	x középpontú r sugarú gömb: {y: d(x,y)<r} x Є X pont környezete a G része X halmaz, ha G tartalmaz egy x kpú gömböt
def. (külső/belső/határpont)	a Є A (A része X) belső pontja A-nak, ha A környezete a-nak ~ határpontja A-nak, ha x bmely környezete belemetsz A-ba és X\A-ba is ~ külső pontja A-nak, ha belső pontja X\A-nak
def. (nyílt, zárt, áll.)	A része X hz nyílt, ha minden pontja belső pont (<-> egyik határpontját sem tartalmazza) ~ zárt, ha minden határpontját tartalmazza (<-> komplementere nyílt)
t. (unió, metszet)	nyílt hz-ok tetsz. uniója és véges metszete is nyílt hz. zárt hz-ok véges uniója és tetsz. metszete is zárt
def. (x_n → x, áll.)	X metrikus térben x_n → x vagy lim x_n = x, ha d(x,x_n) → 0 áll. a határérték egyértelmű részsorozatnak uaz a limesze
t. (F zárt)	metrikus térben F zárt <-> bmely x_n Є F konv. sorozat határértéke is F-ben van
Cauchy-sorozat	x_n Є X Cauchy-sorozat, ha minden ε>0 van N, hogy d(x_n,x_m)<ε, ha n,m>N
teljes	az X metrikus tér teljes, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens

áll.	∑(ai bi)^2 <= (∑ ai^2)(∑ bi^2) (∫fg)^2<=(∫f^2)(∫g^2)
példa metrikára (4 teljes +2 nem teljes)	X = R, d(x,y) = |x-y| ez teljes metrikus tér X = Q, d(x,y) = |x-y| ez nem teljes metrikus tér R^n-ben d(x,y) = gyök(∑(xi-yi)^2) metrika C[a,b]-ben d(f,g) = gyök(∫(f-g)^2) metrika C[a,b]-n metrika d(f,g) = ||f-g||. Ezen metrika szerinti konv <-> egyenletes konv C[a,b]-n d(f,g) = ∫|f-g| nem teljes
Kompaktság	
def.	K része X halmaz kpt, ha bármely nyílt halmazokkal való lefedéséből kiválasztható véges részfedés
áll. (5)	1. metrikus térben minden kpt halmaz zárt 2. kpt hz részhza kpt, sőt kpt és zárt metszete is kpt 3. Kn nem üres kpt, és Kn tartalmazza K(n+1)-et minden n-re, akkor ∩ Kn nem üres (egymásba ágyazott kpt-ok metszete nem üres) 4. minden kpt halmaz korlátos 5. K kpt, akkor bmely xn Є K sorozatnak van konv. részsorozata
tégla	R^k-ban tégla [a1,b1]x...x[ak,bk]
áll. (2)	1. egymásba ágyazott R^k-beli téglák metszete nem üres 2. minden R^k-beli tégla kompakt
t. (Heine-Borel)	Egy E része R^k halmazra ekvivalensek 1. E korlátos és zárt 2. E kompakt 3. bmely xn Є E sorozatnak van E-beli limeszhez konvergens részsorozata
def. (torlódási/izolált pont)	metrikus térben x Є X az A hz torlódási pontja, ha x minden környezete >=2 A-beli pontot tartalmaz x Є A az A halmaz izolált pontja, ha x-nek van olyan környezete, melyben nincs több A-beli pont
áll. (5)	1. torl. pont bmely környezete ∞ sok A-beli pontot tartalmaz 2. A={A izolált pontjai}U{A tol. pontjainak egy részhalmaza} 3. belső pont mindig torl. pont vagy izolált pont 4. x Є X torl. pontja A-nak <-> van xn Є A, xn!=x, xn → x 5. A zárt <-> minden torlódási pontját tartalmazza.
Norma	
def. (normált tér)	(X,||·||) normált tér, ha X vektortér, ||·||: X → R norma 1. ||x||>=0, =0 <-> x=0 2. ||cx||=|c||x|| 3. ||x+y||<=||x||+||y||
metrika	ha X normált tér, akkor d(x,y)=||x-y|| metrika
Banach-tér	teljes normált tér
euklideszi tér	(X,(·,·)) euklideszi tér (·,·): X x X → R/C skaláris szorzás, ha X vektortér R/C felett, és 1. (cx,y)=c(x,y) 2. (x,y)=(y,x) R-ben, =(y,x)* (= (y,x) konjugáltja) C-ben 3. (x+y,z)=(x,z)+(y,z) 4. (x,x)>=0, =0 <-> x=0 megj.: 1. vált. lineáris, 2. változóban konjugált lineáris
Norma	euklideszi térben norma: ||x|| = gyök((x,x))
Hilbert-tér	teljes euklideszi tér

<table>
<tr><td>példa</td><td>L_2(0,2π) = {f: f intható (0,2π)-n}, (f,g)=∫fg* euklideszi tér lesz, ha azonosítjuk f-et és g-t, ha ∫(f-g)=0 minden [a-b]-on → de nem lesz Hilbert-tér
Ha viszont Lebesgue-int, és L_2={f: ∫f^2<∞} → ez már Hilbert-tér</td></tr>
<tr><td>t. (Fourier-részletösszeg min. tul.)</td><td>ha f Є R(0,2π), akkor ∫|f-T_n|^2 minimális <-> T_n=S_n f, és ilyenkor ∫|f – S_n f|^2 = ||f||^2 – 2π ∑(c_k)^2</td></tr>
<tr><td>t. (Parseval-egyenlőség)</td><td>2π ∑(|c_k|^2)=∫|f|^2</td></tr>
</table>

B-3 Felcserélési tételek az analízisben (deriválás-integrálás-konvergencia, minden párosításban).

Függvénysorok, egyenletes konvergencia

<table>
<tr><td>def. (fv.sorozat, konv. tart, határfv)</td><td>Az {f_n(x)} fv. sorozat konv. tartománya KT={x:{f_n(x)} konvergens}. Határfv-e: f(x) = lim_(n → inf) f_n(x) minden x Є KT</td></tr>
<tr><td>def. (fv.sor, konv. tart, összegfv.)</td><td>A ∑(f_n(x)) fvsor konv.tart. KT={x:∑(f_n(x)) konv. num. sor}, összegfv-e: S(x)=∑(f_n(x)) minden x Є KT</td></tr>
<tr><td>egyenletes konvergencia</td><td>az {f_n(x)} fv. sorozat a H része KT halmazon egyenletesen tart az f(x) határfv-hez, ha minden ε>0 van N, hogy n>=N esetén |f_n(x)-f(x)|<ε minden x Є H. Jelölés f_n => f H-n (dupla nyíl)</td></tr>
<tr><td>def. (uniform norma, K(H)-n)</td><td>C[a,b]-ben uniform norma: ||f|| = max_(x Є [a,b]) |f(x)|
K(H) a H-n értelmezett korlátos fv-ek vektortere. Ezen az uniform norma: ||f||=sup_(x Є H) |f(x)|</td></tr>
<tr><td>t. (korl. fv egy. konv)</td><td>ha f_n(x) korlátos H-n, és f(x) is korlátos H-n, akkor
f_n => f H-n <-> ||f_n – f|| → 0</td></tr>
<tr><td>fv. sor egy. konv</td><td>∑(f_n (x)) fvsor egyenletesen tart az S(x) összegfv-hez a H hzon, ha S_n => S H-n</td></tr>
<tr><td>t. (Weierstrass-kritérium)</td><td>(elégs. felt. sorok egyenletes konvergenciájára)
Ha ||f_n||<c_n, és ∑(c_n) konv. num. sor, akkor ∑(f_n)=>S H-n</td></tr>
<tr><td>t. (egyenletes Leibniz-kritérium)</td><td>ha ∑(f_n(x)) Leibniz-típ. num. sor minden x Є H (azaz a sor váltakozó előjelű, és az ált. tag abszolútértéke mon. csökkenve tart a 0-hoz) és ||f_n|| → 0, akkor ∑(f_n) => H-n</td></tr>
</table>

Felcserélési tételek

<table>
<tr><td>t. (folytonosság)</td><td>1. Ha minden f_n(x) folytonos x0 Є [a,b]-ben, és f_n => f [a,b]-n, akkor f is folyt. x0-ban
2. ha minden f_n(x) folyt. x0 Є [a,b]-ben és ∑(f_n) => S [a,b]-n, akkor S is folyt x0-ban
spec. minden f_n Є C[a,b], ∑(f_n) => S → S Є C[a,b]</td></tr>
<tr><td>t. (integrál)</td><td>1. ha minden f_n(x) Є R[a,b], és f_n => f [a,b]-n, akkor f Є R[a,b] és ∫f=lim_(n → ∞) ∫f_n
2. ha minden f_n(x) Є R[a,b] és ∑(f_n) => S [a,b]-n, akkor S Є R[a,b], és ∫S=∑(∫f_n)</td></tr>
<tr><td>t. (Lebesgue-féle dom. konv.-tétel)</td><td>ha ||f_n||<K minden n, minden f_n Є R[a,b], f_n → f és ha f Є R[a,b], akkor ∫f_n → ∫f</td></tr>
<tr><td>t. (Beppo-Levi)</td><td>ha minden f_n, f Є R[a,b] és f_n → f (mon. növően) minden x, akkor ∫f_n → ∫f</td></tr>
<tr><td>t. (dhatóság)</td><td>1. ha f '_n => g [a,b]-n, és van x0 Є [a,b], hogy {f_n(x0)} konv. sorozat, akkor {f_n(x)} konvergens minden x Є [a,b]-re, f_n => f [a,b]-n, f dható és f ' =g, azaz (lim f_n)' = lim(f '_n)
2. ha ∑(f '_n) => g, és van x0 Є [a,b], hogy ∑(f_n(x0)) konv. num sor, akkor ∑(f_n(x))=S(x) létezik minden x Є [a,b]-re, ∑(f_n) => S, S dható és S' =g, azaz (∑(f_n))' = ∑(f '_n)</td></tr>
<tr><td>példa</td><td>f(x) = ∑(1/n^x) tagonként akárhányszor dható (1,∞)-on</td></tr>
</table>

Mérték és integrál

σ-algebra	X halmaz, A része P(X) (hatványhalmaz), az A hzrendszer σ-algebra, ha 1. X Є A 2. B Є A → X\B Є A 3. Bi Є A → U Bi Є A (végtelen unió is lehet)
mértéktér, mérték	az (X,A,μ) mértéktér és μ mérték X-en, ha A része P(X) σ-algebra, μ: A → [0,∞], és 1. μ(üres) = 0 2. μ(U*Ai) = ∑(μ(Ai)), Ai Є A diszjunktak <- σ-additivitás
külső mérték, mérhető halmazok	μ külső mérték, μ: P(X) → [0,∞], μ(üres)=0, A része U Ai → μ(A)<=∑(μ(Ai)) A része X mérhető, ha minden T része X-re μ(T)=μ(T ∩ A) + μ(T\A) (azaz minden hz-t jól vág ketté)
külső mérték szerint generált mérték	a mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak és ezen a σ-algebrán μ mérték
mérték teljes	egy μ mérték teljes, ha 0-mértékű halmaz minden részhalmaza is mérhető a külső mérték által generált mérték teljes
külső mérték halmazfv-ből	H része P(X), v: H → [0,∞] tetszőleges, v(üres)=0, akkor B része X esetén legyen μ(B) = inf {∑(v(Ai)) : B része U Ai, Ai Є H} ha nem létezik B része U Ai, akkor μ(B) = ∞, μ(üres)=0 az így definiált μ külső mérték X-en
Lebesgue-mérték R-en, Leb-mérhető hz-ok	H={[(a,b)]:a<b}, v([(a,b)])=b-a → μ külső mérték R-en → mérték R-en λ([(a,b)])=b-a, és [(a,b)] mérhető
fn → f majdnem mindenütt	ha {x: fn(x) nem tart f(x)} nullmértékű
fn → f mértékben	ha μ(|fn-f|>δ) → 0 (n → ∞) minden δ>0
lépcsősfv	f:X → R lépcsősfv, ha értékkészlete véges
áll. (közelítés lépcsősfv-nyel)	(X,A) mérhető tér, f:X → [0,∞] mérhető fv. Akkor van φ_1 <=...<= φ_n lépcsős fv-ek (ezek lépcsőfokai mérhető hzok), hogy φ_n → f minden x Є X
mérték szerinti integrál	(X,A,μ) mértéktér, f:X → [0,∞] esetén f-nek a μ szerinti integrálja ∫fdμ=∫f(x)dμ(x)=sup{∑(yi μ(Ai)): n Є N, Ai része X} (azaz a beleírt lépcsősfv-ek integráljának szuprémuma)

Felcserélési tételek

Fatou-lemma	(X,A,μ) mértéktér, f_n:X → [0,∞] mérhető → liminf ∫fn dμ >= ∫ (liminf fn) dμ
t. (Beppo-Levi)	(X,A,μ) mértéktér, f_n:X → [0,∞] mérhető, f1<=f2<=... minden x → lim ∫ fn dμ = ∫ (lim fn) dμ (azaz monoton konv. fölcserélhető az integrálhatósággal)
előjeles fv integrálása	f+ = max(f,0), f- = max(-f,0) (X,A,μ) mértéktér, f:X → RU{∞} mérhető, akkor f-nek van integrálja, ha ∫f dμ = ∫f+ dμ - ∫f- dμ, ha nem mindkettő +∞. f integrálható, ha egyik sem +∞.
t. (Lebesgue-féle dom. konv.-tétel)	(X,A,μ) mértéktér, f_n, f: X → RU{∞} mérhető, f_n → f mm. ha létezik g integrálható, hogy |f_n|<=g minden n, minden x, akkor ∫f_n dμ → ∫f dμ, sőt ∫|f_n-f| d μ → 0

mértékek szorzata	(X,A*,μ), (Y,B*,ν) mértékterek. Legyen AxB → μ(A)ν(B) [konvenció: 0∞=∞0=0] minden A Є A*, B Є B* → ez a halmazfv. generál egy külső mértéket XxY-on → mérték XxY-on. Jele: μ „tenzor" ν (jobb híján jel: μ☺ν)
t. (Fubini)	(X,A*,μ) és (Y,B*,ν) teljes mértékterek. akkor 1. AxB mérhető és (μ☺ν)(AxB)=μ(A)ν(B) minden A Є A*, B Є B* ha f: XxY → R lezárt μ☺ν szerinti integrálja létezik és f=0 egy σ-véges halmazon kívül (azaz vannak C_n része XxY mérhető halmazok, hogy (μ☺ν)C_n <∞, és f=0 XxY\UC_n-en], akkor 2. ∫fdμ(x) létezik ν-mm. y-ra 3. ∫fdμ(y) létezik μ-mm x-re 4. y → ∫fdμ(x)-nek van ν-integrálja 5. x → ∫fdμ(y)-nak van μ-integrálja 6. ∫fd(μ☺ν)=∫(∫fdν(y))dμ(x)=∫(∫fdμ(x))dν(y) határokra figyelni! → dμ – X, dν – Y

idáig van kicserélve kb az eleme, sum, stb.

B-4 Fourier-sorok egyenletes és négyzetes konvergenciája, Parseval formula.

Fourier-sorfejtés

trigonometrikus sor	a0/2 + ∑(an cosnx + bn sin nx) (n=1..inf)
Fourier-sor	Legyen F Є R[0,2π], 2π-periodikus. Az f(x) fv Fourier-sora: f(x) ~ a0/2 + ∑(an cosnx + bn sin nx) (n=1..inf), ahol an = 1/π ∫f(x) cosnx dx (0..2π-ig integrálunk) bn = 1/π ∫f(x) sin nx dx (-II-)
trigonometrikus rendszer	{1,cosx,sinx,cos2x,sin2x...} ha f , g Є R[0,2π] skaláris szorzatát (f,g):=∫fg definiálja, akkor a trig. rendszer fv-ei páronként merőlegesek
áll. (trig. sor egy. konv)	ha egy trig. sor egy. konv, akkor ő az összegfv-ének Fourier-sora
C_2π	2π-per. folytonos fv-ek
t. (C_2π beliek)	f Є C_2π → meghatározza a Fourier-sora. (Azaz, ha f1 és f2 Fourier-sora ugyanaz, akkor f1=f2. Vagyis: ha f-nek minden F-eh-ja 0, akkor f=0. Másképp: ha f merőleges a trig. rendszerre, akkor f=0)
t. (f Є R[0,2π])	ha f Є R[0,2π], f összes F-eh-ja 0, akkor ∫f=0 minden 0<=a<b<=2π határ között

Elégséges feltételek a konvergenciára

t. (pontonkénti konv.)	ha van f(x0+0), f(x0-0), f '+(x0), f '-(x0) (azaz van jo/bo határérték és derivált), akkor S(f,x0) → (f(x0+0)+f(x0-0))/2 spec. ha f dható x0-ban, akkor S(f,x0) → f(x0)

t. (pontonkénti konv. II)	ha van r>0, hogy [x0-r,x0)-on és (x0,x0+r]-en f monoton, akkor S_n(f,x0) → (f(x0+0)+f(x0-0))/2
t. (egy. konv.)	ha f dható [a,b]-n, akkor S_n f => f [c,d]-n, ha a<c<d<b.
	spec: ha f Є C_2π dható [0,2π]-n (de esetleg f '(0) != f '(2π)], akkor S_n f => R-en
t. (egy. konv. II)	ha f Є C[a,b], és felbontható véges sok monoton vagy dható darabra, akkor S_n f => f [c,d] része (a,b)-n
	spec. ha f Є C_2π és [0,2π]-n f felbontható véges sok monoton/dható szakaszra, akkor S_n f => f R-en
megj.	van f Є C_2π, melynek a F-sora bizonyos x-ekben divergens
	ha [a,b] része (0,2π)-n kell f-et F-sorba fejteni, az ∞-sokféleképp lehetséges
áll. (f ps/ptl)	ha f ptlan → minden an = 0, ha f ps → minden bn = 0
sorfejtés más periódussal	ha f l-periodikus → f(x) ~ a0/2 + ∑(ak cos(2kπ/l)x + bk sin(2kπ/l)x), ahol
	ak = 2/l ∫f(x) cos(2πk/l)x dx (0..l között integrálunk)
	bk = 2/l ∫f(x) sin(2πk/l)x dx

Komplex alak, tagonkénti műveletek, Parseval-formula

Fourier-sor komplex alakja	sum(cn e^(inx)), (i=-∞..∞), ahol cn=1/2π ∫f(x)e^(-inx) dx
	cn = (an-ibn)/2, c-n=(an+ibn)/2
f valós	<-> c-n=cn konjugált
Fejér-féle közép	az f(x) Fourier sorának Fejér-féle közepei:
	σ_n(f,x)=(S_0(f,x)+...+S_n(f,x))/(n+1)
áll. (3)	ha f folyt x0-ban → σ_n(f,x0) → f(x0)
	ha f eleme C_2π, akkor σ_n(f) => f R-en
	ha f folyt x0-ban, és F-sora konv. x0-ban, akkor f(x0)-hoz tart.
t. (tagonkénti dhatóság)	ha f eleme C_2π, f ' eleme R[0,2π] folytonos, akkor ∫f ' = 0 (0..2π) és f F-sorát tagonként deriválva f ' F-sorát kapjuk.
megj. (intható)	ha f korlátos [0,2π]-n, akkor R-intható <-> nullmértékű hzt leszámítva folytonos.
t. (tagonkénti integrálás)	ha f eleme R[0,2π], akkor tetsz [a,b] része [0,2π] intervallumon ∫f (a..b) a F-sor tagonkénti integrálásával számítható
	∫f = ∫a0/2 + sum(an∫cosnxdx + bn∫sinnxdx)
t. (Fourier-részletösszeg min. tul.)	ha f Є R(0,2π), akkor ∫|f-T_n|^2 minimális <-> T_n=S_n f, és ilyenkor ∫|f – S_n f|^2 = ||f||^2 – 2π ∑(c_k)^2 (-n..n)
t. (Parseval-egyenlőség)	2π ∑(|c_k|^2) (-∞...∞) =∫|f|^2 (0...2π)
megj. (f valós)	ha f eleme R[0,2π] valós, akkor ∫f^2=π((a0^2/2) + sum(ai^2+bi^2))

B-5 Függvények Taylor-sorfejtése valós illetve egy komplex változóban. Laurent-sorok.

Hatványsorok

x0 bázispontú hatványsor	sum(an(x-x0)^n) [0..∞]
konvergenciatartomány	KT = [(x0-R,x0+R)] (vagy R vagy {x0})
t. (Cauchy-Hadamard)	R = 1/(limsup gyök(|an|,n)) (jel: gyök(a,n) = „n-edik gyök a"
megj.	ha létezik lim gyök(|an|,n), akkor R = 1/(lim gyök(|an|,n)
	ha létezik lim |(a(n+1)/an|, akkor R = 1/(lim |a(n+1)/an|)
t. (egyenletes konv.)	hatványsor konvergenciája egyenletes a KT bármely kompakt részhalmazán

t. (Abel)	a hatványsor összegfv-e a teljes konv. tartományon folytonos
t. (deriválás)	hatványsor összegfv-e (x0-R,x0+R)-en akárhányszor dható, és a deriválás tagonként végezhető
t. (integrálás)	hatványsor tagonként integrálható a KT kpt. részintervallumain
nevezetes hatványsorok	1/(1+x), ln(1+x), arctgx, (1+x)^a a valós stb.
Taylor-sor	
def.	f eleme C^∞-hez tartozó x0 bázispontú Taylor-sor: sum(f^(n)(x0)/n!)(x-x0)^n [0..∞]
Taylor-polinom	T_n(f,x)= sum(f^(k)(x)/k!(x-x0)^k) [0..n] → n-edfokú Taylor-polinom
áll.	ha f n-szer dható x0-ban, akkor T_n(f,x) az egyetlen legfeljebb n-edfokú polinom, ami f-et legalább n-edrendben érinti (azaz, az első n deriváltjuk egyenlő)
Lagrange-maradéktag	ha f eleme C^(n+1) [x0-r,x0+r]-en, és x eleme [x0-r,x0+r], akkor
	f(x) – T_n(f,x) = f^(n+1)(c)/(n+1)!(x-x0)^(n+1) vmely c eleme [x0,x]-re
	köv. ha a deriváltak korlátosak, akkor f-et előállítja a Taylor-sora
példák	e^x = sum(x^n/n!)
	shx = sum(x^(2n+1)/(2n+1)!)
	chx = sum(x^(2n)/(2n)!)
	sinx = sum((-1)^n x^(2n+1)/(2n+1)!)
	cosx = sum((-1)^n x^(2n)/(2n)!)
megj. (közelítés)	a közelítés nagyon jó x0 közelében, de rohamosan romlik x0-tól távolodva
Cauchy-szorzat	sum(an(x-x0)^n) és sum(bn(x-x0)^n)) Cauchy-szorzata sum(cn(x-x0)^n), ahol cn=sum(ai b(n-i)
t. (Cauchy-szorzat)	ha sum(an(x-x0)^n) konv. sugara R1, és sum(bn(x-x0)^n) konv. sugara R2, akkor R=min(R1,R2) esetén
	sum(cn(x-x0)^n) = sum(an(x-x0)^n) · sum(bn(x-x0)^n)
áll. (ps/ptlan fv.)	ps/ptlan fv. csak ps/ptlan x-hatványokat tartalmaz
analitikus	f(x) analitikus x0-ban, ha x0 egy környezetében hatványsorba fejthető
	f(x) analitikus (a,b)-n, ha minden pontjában analitikus
t. (Weierstrass-féle approximációs tétel I)	f eleme C[a,b]-re minden ε>0-hoz van p polinom, hogy ||f-p||<ε
t. (Weierstrass-féle approximációs tétel II)	f eleme C[a,b]-re minden ε>0-hoz van T trigonometrikus polinom, hogy ||f-T||<ε
Többváltozós Taylor-polinomok	
többváltozós fv. (a,b) bázispontú deriváltja	d^2f((a,b),(x,y) = f "xx(a,b)(x-a)^2 + 2f "xy(a,b)(x-a)(y-b) + f "yy(a,b)(y-b)^2 stb.
többváltozós Taylor-polinomok maradéktaggal	ha f eleme C^(k+1), akkor adott a,x esetén van c eleme (a,x), hogy
	f(x)-f(a) = sum(d^i f(a,x)/i!)[i=1..k] + d^(k+1) f(c,x-a+c)/(k+1)!
	itt T_k(x) = f(a) + sum(d^i f(a,x)/i!) [i=1..k] a k-adfokú a bp-ú Taylor-polinom
Komplex hatványsor	
def.	sum(an(z-z0)^n) [n=0..∞]
t. (Cauchy-Hadamard)	R = 1/(limsup gyök(|an|,n))
	|z-z0|<R-en a hatványsor (abszolút) konvergens
	|z-z0|>R-en a hatványsor divergens
	|z-z0|=R-en nem egyértelmű (átmegy trigonometrikus sorba)
t. (reguláris)	|z-z0|<R-en a hatványsor összege reguláris és tagonként akárhányszor deriválható

t. (f(z)=...)
köv. minden hatványsor Taylor-sor
ha f(z) reg a T tartományon, és z0 eleme T, akkor
f(z) = sum(f^(n)(z0)/n!)(z-z0)^n minden olyan z0 körüli körlapon, amely teljes egészében T-ben van

Laurent-sor

z0 bázispontú Laurent-sor
sum(an(z-z0)^n) [n= - ∞.. + ∞]

konvergenciatartomány
sum(an(z-z0)^n) [n= - ∞.. + ∞] egy R1<|z-z0|<R2 gyűrűn konvergens

egyenletes konvergencia
a L-sor egy. konvergál bmely R1<r1<=|z-z0|<=r2<R2 körgyűrűn

t. (együtthatók)
ha f(z) = sum(an(z-z0)^n) [-∞...∞] R1<|z-z0|<R2-re, akkor
an = 1/2πi ∫f(z)/(z-z0)^(n+1)dz (körintegrál L-re, ahol L a körgyűrűben halad, és poz. módon 1x megkerüli z0-t)

t. (L-sorba fejthető)
ha f(z) reg. az R1<|z-z0|<R2 körgyűrűben, akkor ott L-sorba fejthető, azaz
f(z) = sum(an(z-z0)^n) [-∞...∞], ahol
an = 1/2πi ∫f(z)/(z-z0)^(n+1)dz

izolált szingularitás
z0 iz. szing. f(z)-nek, ha f(z) reg 0<|z-z0|<δ körlapon, de z0-ban nem

fajtái
1. megszüntethető, ha létezik lim_(z → z0) f(z) = A
2. pólus, ha lim_(z → z0) f(z) = ∞ (irány mindegy)
3. lényeges szakadás, ha lim_(z → z0) nem létezik

megsz. szing
a z0-beli iz. szing.-ra ekvivalensek:
1. definiálható f(z0) úgy, hogy f reg. z0-ban
2. f(z) folytonos z0-ban
3. f(z) korlátos z0 egy környezetében
4. f(z)=o(1/(z-z0)), azaz lim_(z → z0) f(z)(z-z0) = 0

pólus
z0-beli pólus k-adrendű, ha létezik lim_(z → z0) f(z)(z-z0)^k = A != 0 véges
z0 k-adrendű pólusa f-nek <-> k-szoros gyöke 1/f-nek

lényeges szakadás (Picard-tétel)
Ha z0 lényeges szingularitás, akkor bármely ε>0 esetén a 0<|z-z0|<ε-on az f(z) értékkészlete C, leszámítva legfeljebb egy pontot

t. (iz. szing. jellemzése L-sorral)
legyen f(z) = sum(an(z-z0)^n)[-∞...∞] egy 0<|z-z0|<r körgyűrűben. akkor a z0-beli szing.:
1. megszüntethető <-> a(-1) = a(-2) = … = 0
2. k-adrendű pólus <-> a(-k)!=0, de a(-k-1)=a(-k-2)=...=0
3. lényeges szakadás <-> a(-k)!=0 végtelen sok k-ra

residuum
a z0 izolált szingularitásban Res_z0 f = a(-1)

t. (residuum-tétel)
ha f(z) reg a zárt L görbén és az általa határolt tartományon – leszámítva az a1,...,an pontokat, akkor
1/2πi ∫f(z)dz = sum(Res_ai f)

B-6 Gradiens, divergencia, rotáció, Jacobi-determináns és a vonatkozó integráltranszformációs tételek.

Gradiens, többváltozós fv-ek integrálása, Jacobi-determináns

parciális der.
x Є R^m, f(x) m-változós, a Є R^m
df/dxi(a)=lim_(xi → ai) (f(a1,...xi...am)-f(a))/(xi-ai), jel: f '|xi

gradiens
az f fv a-beli gradiens (deriváltvektora)
grad f(a) = Δf(a)=(f '_x1(a),...,f '_xm(a))=f '(a)

<table>
<tr><td>többváltozós fv-ek integrálása</td><td>A része R^2 korlátos tartomány
f: A → R korlátos fv.
legyen m = sum(inf f ·|Δi|), M = sum(sup f ·|Δi|) (Δi felületegységekre bontjuk A-t, ezeken nézzük f infimumát/szuprémumát)</td></tr>
<tr><td>f(x,y) Riemann-integrálható A-n</td><td>f(x,y) Riemann-integrálható A-n, ha sup m = inf M, ilyenkor = ∫∫f(x,y)dxdy</td></tr>
<tr><td>normáltartomány</td><td>A = {(x,y): a<=x<=b, g1(x)<=y<=g2(x)}, akkor ∫∫f(x,y)dxdy = ∫[a..b] (∫[g1(x)..g2(x)] f(x,y)dy) dx</td></tr>
<tr><td>t. (síkbeli alakzat területe)</td><td>|T| = ∫∫_T 1 dxdy</td></tr>
<tr><td>integrálok sorrendjének a cseréje</td><td>… (példák)</td></tr>
<tr><td>helyettesítéses integrálás</td><td>B,A része R^2, fi:B → A kölcs. egyért eleme C^1, akkor
∫∫_A f(x,y)dxdy = ∫∫_B f(fi1(u,v),fi2(u,v))|det J|dudv, ahol
J = ∂(x,y)/∂(u,v)=[[∂fi1/∂u,∂fi1/∂v],...] → Jacobi mátrix</td></tr>
<tr><td>polárkoordinátás helyettesítés</td><td>x=rcos fi, y=rsin fi → det J = det [[cos fi, rsin fi],[sin fi,rcos fi]]=1</td></tr>
<tr><td>helyettesítés hármasintegrálban</td><td>A,B része R^3, fi:B → A kölcs. egyért eleme C^1, akkor
∫∫∫_A f(x,y,z)dxdydz = ∫∫∫_B f(fi1(u,v,w),fi2(u,v,w),fi3(u,v,w))|detJ| dudvdw, ahol
J = ∂(x,y,z)/∂(u,v,w) → Jacobi mátrix</td></tr>
<tr><td>gömbi koordinátázás helyettesítése</td><td>x=rcos fi sin teta
y=rsin fi sin teta
z=rcos teta
det J = r^2sin teta, teta eleme [0,pi]</td></tr>
<tr><td>hengerkoordináták</td><td>x=rcos fi
y=rsin fi
z=z
det J = r</td></tr>
<tr><td>improprius integrálás</td><td>(nem korlátos halmazt korlátos halmazokkal merítünk(?) ki, melyek minden A-beli, origótól <=1 távolságra lévő pontot tartalmaznak)</td></tr>
<tr><td>t. (Cauchy-féle szüks. és elégs. krit)</td><td>∫∫_A f konv <-> minden epszilon>0 van R, hogy ha B része A korlátos, B metszet (x^2+y^2<=R^2) = üres (távoli), akkor |∫∫_B f|< epszilon
köv. majoráns krit.: ha |f|<=g A-n, és ∫∫_A g konv, akkor ∫∫_A f is konv, és |∫∫_A f|<=∫∫_A g. Ilyenkor f abszolút konv.</td></tr>
<tr><td>elégs. krit. f>=0 impr. int. konvergenciájára</td><td>ha van olyan Ai része A, Ai része A(i+1), U Ai = A korl. halmazsorozat, melyre ∫∫_Ai f konv, akkor ∫∫_A f konv és = lim_(i → infty) ∫∫_Ai f</td></tr>
<tr><td>Vektormező, rotáció, divergencia</td><td></td></tr>
<tr><td>Vektormező</td><td>v: R^3 → R^3</td></tr>
<tr><td>vonalmenti integrál vektormezőben</td><td>Legyen L része R^3 egy görbe a térben, L = {r(t), a<=t<=b, r(t)=(x(t),y(t),z(t))}
A v: R^3 → R^3 vektormező vonalmenti integrálja az L görbe mentén:
legyen r0,...,rn a görbe befutás mentén vett felosztása. legyen ri* az r(i-1) és ri közti görbeív egy pontja. Ekkor az integrálközelítő-összeg: szigma = sum(v(ri*)(ri-r(i-1) [i=1..n].
Ha az ri felbontás finomításával (azaz max|ri-r(i-1)| → 0) a szigma közelítőösszegek mindig uahhoz az I véges értékhez tartanak, akkor
∫_L v dr = I</td></tr>
<tr><td>t. (paraméterezett görbe)</td><td>ha r(t)=(x(t),y(t),z(t)) az L görbe befutási irányának megfelelő paraméterezése és r eleme C^1, akkor
∫_L v dr = ∫[a..b] v(r(t)) r*(t), ahol r*(t) = (x*(t),y*(t),z*(t))</td></tr>
</table>

t. (potenciális)	ha a v vektormező potenciális (konzervatív), tehát v = grad fi, akkor ∫[a..b] v dr = fi(b)-fi(a) (azaz mindegy, milyen úton megyek a-ból b-be.)
ívszerűen egyszeresen öf.	a V része R^3 térfogat ívszerűen egyszeresen öf, ha minden V-ben haladó zárt görbe V-ben maradva folytonosan pontra húzható
t. (ívsz. egysz. öf. tartományban)	ha egy ívszerűen egyszeresen öf. tartományban ∫vdr csak a kezdő és végponttól függ, akkor v potenciális: van fi: v = grad fi (ez a fi additív állandó erejéig egyértelmű)
rotáció	rot v = det([[i,j,k],[∂x,∂y,∂z],[v1,v2,v3]]) rotációvektor
t. (ívsz. egysz. öf. tartományban II)	ívszerűen egyszeresen öf. tartományban v konzervatív (<-> van potenciálja) <-> örvénymentes, azaz rot v = 0
	köv. rot grad fi = 0
vektormező fluxusa irányított felületen	df a felület normálvektora, iránya a felület irányításának megfelelő (felület irányítása: folytonos normálvektorcsalád), nagysága |df|. Átáramló folyadék mennyisége: sum(v(ri)dfi) → ∬_F v df
felület szerinti integrál	F = {r(u,v), (u,v) eleme A része R^2} felület, r(u,v): felület paraméterezése ∬_F v df = +/- ∬_A v(r(u,v)) r'_u x r'_v dudv (előjel a felület irányításától függ, ami egy folytonos normálvektorcsalád)
vektormező fluxusa irányított felületen	
ívhossz szerinti integrálás görbén	
felszín szerinti integrál	
divergencia	vektormező divergenciája az r0 pontban:
	div v(r0) = lim_(r0 eleme V, diam V → 0) 1/|V| ∬_F v df (F zárt)
	r forrás, ha div v(r0)>0
	r nyelő, ha div v(r0)<0
t. (formálisan)	nabla = (∂x,∂y,∂z)
	grad u = nabla · u
	rot v = nabla x v
	div v = nabla · v
áll. (2)	rot grad u = 0
	div rot v = 0
t. (ívsz. egysz. öf.)	ha V része R^3 ívszerűen egyszeresen öf és v eleme C^1(V), akkor ekvivalensek
	1. v potenciális: van fi: v = grad fi
	2. v örvénymentes: rot v = 0
	3. v konzervatív: ∫_L v dr = 0, ha L zárt
forrásmentes vektormező	div v = 0
vektorpotenciál	a v vektormezőnek w vektorpotenciálja, ha v = rot w
megj.	ha van vektorpotenciál, akkor nincs divergencia
egyszeresen öf	V része R^3 egyszeresen öf, ha bmely V-beli zárt felület által határolt tartomány is V-ben van
példa	Gömb\{pont} ívsz egysz öf, de nem egysz öf
	Gömb\{átló} egysz öf, de ívsz nem egysz öf
t. (egysz. öf)	V része R^3 egyszeresen öf, v eleme C^1(V). akkor ekvivalensek:
	1. v forrásmentes: div v = 0
	2. v-nek van vektorpotenciálja: v = rot w
	3. v-nek zárt felületen vett fluxusa 0: ∬_F v df = 0 (F zárt)
Integráltranszformációs tételek	
Newton-Leibniz több változóban	V része R^3 tartomány, F a határa, n=(n1,n2,n3) a külső normális egységvektor. akkor df=n|df|, u eleme C^1 →

	∫∫∫_V u'_x dV = ∫∫_F u n1|df|
	∫∫∫_V u'_y dV = ∫∫_F u n2|df|
	∫∫∫_V u'_z dV = ∫∫_F u n3|df|
Parciális int.	∫∫∫_V u1'_x u2 dV = ∫∫_F u1 u2 n1|df| - ∫∫∫_V u1 u2'_x dV
Gauss-Osztrogradszkij-t.	v eleme C^1(V)
	∫∫∫_V div v = ∫∫_F v df (térfogat belsejében összesen mennyi víz = felületen mennyi megy ki/be?)
Síkbeli G-O	v eleme C^1(T)
	∫∫_T (v1'_x + v2'_y) dT = ∫_L (v1 dy -v2 dx)
Green-formulák	Laplace op: Δu = u''_xx + u''_yy + u''_zz (Δ=nabla·nabla)
	1. ∫∫∫_V u1 Δu2 = ∫∫_F (u1 grad u2 – u2 grad u1)df + ∫∫∫_V u2 Δu1
	2. ∫∫∫_V u1 Δu2 = ∫∫_F (u1 grad u2)df - ∫∫∫_V(grad u1· grad u2)
Stokes-tétel	F irányított felület, L a határgörbéje (nem zárt, mint G-O-nál)
	görbe irányítása: egy görbéhez közeli pontban normális vektor úgy, hogy jobbsodrásba haladjon el n mellett
	F irányításának megfelelő irányítással, v eleme C^1
	akkor ∫∫_F rot v df = ∫_L v dr

B-7 Komplex függvények deriválása és vonalintegrálja, kapcsolatok a valós kétváltozós analízissel.

Komplex fv-ek deriválása

komplex fv	f: C → C fv, f(x+iy)=u+iv
határérték	lim_(z → z0) f(z) mint a valós kétváltozós határértéknél
	lim_(x → x0, y → y0) f(x,y)
folytonosság	f(z) folyt z0-ban <-> u(x,y) folyt (x0,y0)-ban
derivált	f '(z0) = lim_(z → z0) (f(z)-f(z0))/(z-z0)
	f komplex értelemben dható z0-ban <-> valós diffható (x0,y0)-ban, és f '_x(x0,y0) = 1/i f '_y(x0,y0)
Cauchy-Riemann egyenletek	f = u + iv
	u'_x(x0,y0) = v'_y(x0,y0)
	u'_y(x0,y0) = -v'_x(x0,y0)
reguláris	f(z) reg. z0-ban, ha dható z0 egy környezetében
	f(z) reg. T tartományon, ha T minden pontjában reg.
harmonikus	u eleme C^2(T) harmonikus T-n, ha Δu=0 T-n
t. (f reg.)	f reg. T-n → u,v harmonikus T-n
t. (harmonikus társ)	legyen T része R^2 ívszerűen egyszeresen öf tart., u harmonikus T-n. Akkor létezik v harmonikus T-n, hogy f=u+iv reg. T-n. Ilyenkor v az u harmonikus társa. ez konstans összeadandó erejéig egyértelmű.
példák	e^z reguláris az egész síkon, 2πi-per.
	sh z, ch z, th z …
	sin z, cos z 2π-periodikusak

Komplex vonalintegrál

görbe	L része C az L pontjai között rendezéssel, ha van olyan z=z(t): [0,1] → C folytonos, szakaszonként eleme C^1, z([0,1])=L, és t növekedésével z(t) az irányítás szerint futja be L-et. Egy ilyen z(t) függvény az L görbe paraméterezése
	L zárt, ha kezdő és végpontja uaz.
	L egyszerű, ha nem önátmetsző (z(t1)=z(t2) t1!=t2 → t1=0,t2=1)

def.	$f(z)$ értelmezett az L görbén. Vegyünk L-en egy $z_0,\dots,z_n$ felosztást a befutás sorrendjében, és legyen z_i^* eleme L a $z_{(i-1)}$ és z_i közötti görbeíven, $i=1\dots n$. ha a $\mathrm{sum}(f(z_i^*)(z_i-z_{(i-1)}))$ összegek a $\{z_i\}$ felosztás finomításával mindig ugyanahhoz az I-hez tartanak, akkor $\int_L f(z)dz = I$
másik def.	$\int_L f(z)dz = \int_L (udx - vdy) + i\int_L (udy + vdx)$
köv.	$\int_L f(z)dz = \int_{[a..b]} f(z(t))z^*(t)\, dt$
tulajdonságok	1. $\int_L cf(z)dz = c\int_L f(z)dz$, $\int_L (f+g)dz = \int_L fdz + \int_L gdz$ 2. $\int_{L_1 \cup L_2} f\, dz = \int_{L_1} f\, dz + \int_{L_2} f\, dz$, ha L_1 vpontja = L_2 kezdőpontja 3. $\lvert\int_L f(z)dz\rvert \le \int_L \lvert f(z)\rvert\lvert dz\rvert$ spec. ha L mentén $\lvert f\rvert \le M$, akkor $\lvert\int_L fdz\rvert \le M\lvert L\rvert$ 4. ha L^* az L irányításának megfordításával keletkezik, akkor $\int_{L^*} f\, dz = -\int_L f\, dz$
t. (Newton-Leibniz formula)	ha $f(z)$ folytonos az L görbe pontjaiban és $F'(z) = f(z)$ egy F-re, amely reguláris L pontjaiban, akkor $\int_{L[a..b]} f(z)\, dz = F(b) - F(a)$
t. (Cauchy-integráltétel)	ha $f(z)$ reg. az egyszeresen öf. T része C tartományon, akkor bármely L része T zárt görbére $\int_L f(z)dz = 0$ biz: Goursat-lemma: ha $f(z)$ reg. a poz. irányítású A háromszögön és annak belsejében akkor $\int_{\partial A} f\, dz = 0$ (∂A: A határgörbéje)
t. (Cauchy-integráltétel többszörösen öf. tartományra)	ha $f(z)$ reguláris a satírozott tartományon és a határgörbéken, akkor $\int_{L_0} fdz = \mathrm{sum}(\int_{L_j} fdz)$ ######
index	$n(L,z_0) = 1/2\pi i \int_L 1/(z-z_0)\, dz$ a z_0 pont indexe az L görbére nézve. Azt mondja meg, hogy L poz. irányban hányszor kerüli meg z_0-t
t. (Cauchy-integrálformula)	Ha L zárt görbe, amely poz. módon egyszer megkerüli a z_0 pontot (azaz $n(L,z_0) = 1$) és $f(z)$ reguláris L-en és az L által körbezárt tartományon, akkor $f(z_0) = 1/2\pi i \int_L f(z)/(z-z_0)\, dz$
t. (Cauchy-integrálformula többszörösen öf. tartomány esetén)	Ha $f(z)$ reg. a satírozott tartományon és a határgörbéken, akkor $f(z_0) = 1/2\pi i\, (\int_{L_0} f(z)/(z-z_0)\, dz - \mathrm{sum}(\int_{L_i} f(z)/(z-z_0)\, dz)$ ######
Reguláris függvények	
t. (Liouville)	legyen $f(z)$ egész fv (azaz egész C-r reg.), és $\lvert f(z)\rvert \le c(1+\lvert z\rvert^n)$ minden z, akkor $f(z)$ egy <= n-edfokú polinom. spec. ha $f(z)$ egész és korlátos → konstans
t. (algebra alaptétele)	n-edfokú polinom n db elsőfokú polinom szorzata biz: elég: p nem konstans → van gyöke. Liouville-t.
t. (unicitási tétel)	ha $f(z)$ reg. egy T tartományon, $z_n \to z^*$, z_n, z^* eleme T, $f(z_n)=0$ minden n-re → f=0 T-n (azaz reg. fv. gyökei nem torlódhatnak belső ponthoz)
t. (középértéktétel)	Ha $f(z)$ reg. $\lvert z-z_0\rvert \le R$-en, akkor $f(z_0) = 1/2\pi \int_{[0..2\pi]} f(z_0 + Re^{it})\, dt$ (azaz a z_0-ban felvett érték = körvonalon felvett értékek átlaga)
t. (maximum-tétel)	ha $f(z)$ reg és nem konstans T-n, akkor $\lvert f(z)\rvert$-nek nincs lok. max. T-ben
t. (minimum-tétel)	ha $f(z)$ reg. T-n, nem konstans és nincs gyöke T-ben, akkor $\lvert f(z)\rvert$-nek nincs lok. min. T-ben
t. (középértéktétel harm. fv-re)	u harm $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le R^2$-en, akkor $u(x_0,y_0) = 1/2\pi \int_{[0..2\pi]} u(x_0+R\cos t, y_0+R\sin t)\, dt$
t. (maximum-tétel harm. fv-re)	ha u harm. a T tartományon és nem konstans, akkor T-ben u-nak sem lok. max. sem lok. min. nem lehet

Numerikus módszerek és differenciálegyenletek

B-8 Mátrixok felbontásai szorzat alakban (LU, Cholesky, QR) és felhasználásuk a numerikus lineáris algebrában.

Gauss-módszer

alapfeladat	[A|b] = [aij]_nx(n+1) matrixszal adott LER
algoritmus	elimináció (főátlóban lévő elemekkel alattuk lévőket kinullázzuk → I. jegyzet!)
	visszahelyettesítés (főátlóban lévő elemekket fölöttük lévőket kinullázzuk → I. jegyzet!)
megoldhatóság	A Gauss-modszer pontosan akkor hajthato végre az
	előző algoritmussal, ha az A mátrix olyan, hogy egyik főminorja
	sem zérus, azaz det(A(1:k;1:k)) != 0 (k = 1,..., n).
példa	Gauss-módszer végrehajtható az előző algo-val, ha A mátrix pl.
	1. szig. domináns főátlójú (|aii|> i. sorban lévő elemek | |-e)
	2. szimm. poz. def. mx
	3. M-mx (főátlón kívül nempoz. elemek, inverze poz.)
műveletigény	elimináció: 2/3 n^3 + O(n^2) flop (+,-,*,/)
	vhelyettesítés: n^2 flop
	összesen: 2/3 n^3 + O(n^2) flop
	nagy méretű mx-oknál vhelyettesítés műv. igénye << elimináció
	háromszögmx. esetén: n^2 (csak vhelyettesítés)

LU-felbontás, Cholesky-felbontás, alkalmazásuk

t. (LU-felbontás)	tfh A egyik főminorja sem zérus (→ Gauss-elimináció végrehajtható). ekkor létezik egy olyan L normált (főátlóban egyesek szerepelnek) alsó (lower) háromszögmx, és egy U felső (upper) hszmx, melyekkel A=LU. Ha egy reg. mx-nak létezik LU-felbontása, akkor az LU-felbontás egyértelmű, és det(A)=prod(u_ii)
alkalmazás	1. ha már kiszámoltuk egy mx LU-felbontását, akkor L és U tárolható A helyén a memóriában. Ekkor az Ax=b egyenletrendszert már két hszmxú egyenletrendszer megoldásával nem tudjuk oldani. Műveletszám: 2n^2 << 2/3 n^3
	2. mxok inverzét általában nem állítjuk elő explicit módon. Inverz előállítása egy LU-felbontást (2/3 n^3) és n db Lux=ei egyenletrendszer megoldását igényli. Ez összesen 8/3 n^3 művelet
t. (LU-felbontás ált. mx-okra)	Legyen A eleme R^(nxn) egy tetsz. mx. Ekkor létezik egy olyan L alsó normált háromszögmx, melynek elemei egynél nem nagyobb abszolút értékűek, egy U felső hszmx, és egy P permutációs mx, melyekkel PA=LU
t. (LDM^T felbontás)	Tfh A egyik főminorja sem zérus. Ekkor egyértelműen léteznek olyan L és M normált alsó hszmxok és egy D diag. mx, melyekkel A=LDM^T.
t. (LDL^T felbontás)	Szimm. A mx esetén egyértelműen létezik egy L alsó normált hszmx és egy D diag. mx, melyekkel A=LDL^T
t. (Cholesky-felb.)	Tfh A szimm. poz. def. mx. Ekkor van pontosan egy olyan poz. diagonálisú G alsó hszmx, mellyel A=GG^T

QR-felbontás, túlhatározott rendszerek	
Householder-tükrözés	x vektor v-re merőleges tengelyre való tükörképe x' = (E – (2vv^T)/(v^Tv))x H = (E – (2vv^T)/(v^Tv)) mátrix: Householder-tükrözés
QR-felbontás	Legyen A eleme R^(mxn) (m>=n) egy teljes rangú mátrix. Ekkor létezik egy olyan Q eleme R^(mxm) ortogonális és egy R eleme R^(mxn) felső hszmx, melyekkel A=QR biz: Hn...H1A=R (Hi: A i. oszlopához tartozó Householder-tükrözés mátrixa)
Givens-forgatás	(i,j) hipersíkban theta-val forgatás felső Hessenberg-mx. QR-felbontása gyorsan megy Givens-forgatásokkal
túlhatározott rendszerek	Ax=b, A eleme R^(mxn), m>=n, r(a)=n a fenti LER-nek ált. nincs megoldása (vagy csak 1). Ekkor kereshetjük azt az x_LS vektort, mellyel ||Ax-b||^2 a lehető legkisebb. → ekkor x_LS az A^TAx=A^Tb normálegyenlet mo-a
megoldás Cholesky-val	A^TAx=A^Tb normálegyenletben A^TA szimm. poz. def. mx 1. határozzuk meg LL^T Cholesky-felbontását 2. oldjuk meg az Ly=A^Tb egyenletrendszert 3. x_LS az L^Tx=y egyenletrendszer megoldásaként adódik műveletigény: (m+n/3)n^2 flop
megoldás QR-rel	||Ax-b||^2=||QRx-b||^2=||Q^T(QRx-b)||^2=||Rx-Q^Tb||^2=||R1x-c||^2 + ||d||^2, ahol R1=R(1:n,1:n), c=(Q^Tb)(1:n,:), d=(Q^Tb)(n+1:m,:) 1. képezzük A QR-felbontását 2. határozzuk meg az R1=R(1:n,1:n) mx-ot 3. határozzuk meg a c=(Q^Tb)(1:n,:) vektort. 4. x_LS az R1x=c egyenletrendszer megoldásaként adódik műveletigény: 2(m-n/3)n^2 flop (m>>n → QR-felbontásos mo. műveletszáma kb. kétszerese a másikénak)
Sajátértékfeladat, QR-iteráció	
alapfeladat	cél: A mx sajátértékeinek meghatározása egyszerre ha találnánk olyan V mx-ot, mellyet az A mx. V^(-1)AV = felső háromszögmx, akkor a felső hszmx diagonálisa tartalmazná a sajátértékeket. sajnos ilyen V mxot direkt módon nem tudunk előállítani → közelítsük a QR-felbontás ortogonális mx-ával!

iteráció	A szimm. mx, A(0) = A
	for k=1..max do
	  A(k-1)=Q(k-1)R(k-1)
	  A(k)=(Q(k-1))^TA(k-1)Q(k-1)
	end for
	A(k) = Q_k^TAQ_k, és így A(k) sajátértékei megegyeznek A sajátértékeivel.

t. (konvergencia)	1. ha az A mx minden sajátértéke valós és abszolút értelemben kül. akkor az {A(k)} mátrixsorozat tart egy fölső hszmxhoz. 2. ha az A szimm. mxnak minden sajátértéke absz. értékben kül, akkor {A(k)} mxsorozat tart egy diag. mxhoz mindkét esetben a sajátértékek a határértékmx. főátlójában fognak szerepelni

megj.	minden QR-felbontás 4n^3/3 művelet, így nagyon lassan konvergál a módszer. megoldás lehet, ha először a mxot Hessenberg alakra transzformáljuk (pl. Householder tükrözésekkel – 4n^3/3 flop. sajátértékek nem változnak). Hessenberg mxra a QR felbontás gyorsan megy (A(k) Hessenberg volt → A(k+1) is az).

B-9 Interpoláció polinommal, trigonometrikus polinommal, spline függvénnyel.

Interpolációs polinom Lagrange- és Newton-féle alakja

alapfeladat	tfh f fv-nek csak n+1 pontban (alappontok) ismerjük az értékét ((xi,fi) pontpárok) Feladat: határozzuk meg 1. a többi pontban is az értékeket, 2. a deriváltját, 3. a szélsőértékeit 4. az integrálját! Megoldás: megadunk olyan fi függvényeket, melyekre fi(xi)=fi és ezekkel végezzük el a kijelölt műveleteket. A fi függvényeket általában polinomnak, trig. fv-nek vagy szakaszonként polinomnak szokás választani
t. (interpoláció polinommal)	minden rögzített n+1 db alapponthoz pontosan egy olyan legfeljebb n-edfokú pn polinom van, melyre pn(xi)=fi
Lagrange-alak	pn(x) = sum(fk lk(x)) [k=0..n], ahol lk(x) = w(n+1)(x)/((x-xk)w”(n+1)(x)), ahol w(n+1)(x)=(x-x0)...(x-xn)
Newton-alak	pn(x) = c0 + c1(x-x0) + c2(x-x0)(x-x1) + … + cn(x-x0)...(x-x(n-1))
osztott differenciák	kerüljenek ki a kül. j1,...,js indexek a {0,...,n} halmazból. ekkor a [x_j1,...,x_js]f = sum(f_ji / ((x_ji-x_j1)...(x_ji-x_j(i-1))(x_ji-x_j(i+1))...(x_ji-x_js))) [i=1..s] számokat (s-1)-edrendű osztott differenciáknak nevezzük
t. (osztott differenciák)	1. [x_j1,...,x_js]f nem függ az alappontok sorrendjétől 2. [x0,...,xk]f=ck 3. [x0,...,xk]f=([x1...xk]f-[x0...x(k-1)]f) / (xk-x0)
ck kiszámítása	osztott differenciatáblázattal [xi]f=fi (i=0..n) 3. szerint [x0,x1]f=([x1]f-[x0]f)/(x1-x0), [x1,x2]f=([x2]f-[x1]f)/(x2-x1) stb.
összehasonlítás	Lagrange: 1. kevésbé pontos 2. pn(x) kiszámítása adott x-re kb. 4n^2 flop 3. új osztópont felvétele bonyolult 4. lk(x) polinomok fgtlenek fk-tól, így ha a fvértékek változnak, akkor könnyen megkapható az új polinom Newton: 1. pontosabb 2. új osztópont felvétele könnyű 3. 3/2n^2 flop az osztott differenciák számolása + 3n a fvértékeké

4. fvérték változásakor újra kell számolni

Interpolációs hiba, Csebisev polinomok

t. (Cauchy)

Legyen adott egy f eleme C^(n+1) fv az x0,...,xn alappontokat és az x pontot tartalmazó Ix intervallumon. Jelölje p_n f azt a legfeljebb n-edfokú interpolációs polinomot, amely az x0,...,xn alappontokhoz és az f fv. ezen pontokban felvett fvértékeihez tartozik. Ekkor

E_n(x):=f(x)-(p_n f)(x) = (f^(n+1)(cx))/(n+1)! w_(n+1)(x)

t. (interpolációs hiba)

ha f eleme C^∞[a,b], és az x0^(n),...,xn^(n) alappontok mindi az [a,b] intervallumból kerülnek ki (n=1,2...), továbbá, ha van M>0 úgy, hogy max_(x eleme [a,b]){ |f^(n)| }<=M^n, akkor max_(x eleme [a,b]{ |f(x) – (p_n f)(x)| } → 0, ha n → ∞

Runge példája

[-5,5] intervallum egyenlő részekre osztása, f(x) = 1/(1+x^2) fv → láthatóan a polinom értékei nem tartanak az f fv. értékeihez. Különösen hangsúlyos az eltérés az intervallum szélein.

t. (w_(n+1)(x))

|w_(n+1)(x)| <= n!/4 h^(n+1), ahol h a legnagyobb távolság a szomszédos osztópontok között.

t. (interpolációs hiba)

|E_n(x)|<=M_(n+1)/4(n+1) h^(n+1), x értékétől fgtlenül

Csebisev-polinomok

rekurzív képlet, [-1,1]-on

T_0 (x)=1, T_1 (x) = x, T_(n+1) (x)=2xT_(n) (x) – T_(n-1) (x)

T_n (x) = cos(n arccos x)

legyen T*_n(x) = T_n(x)/(2^(n-1)), azaz normáljuk a Csebisev-polinomokat 1 főegyütthatóra. Ekkor

||T*_n||_C[-1,1] <= ||p_n(1)||_C[-1,1], ahol p_n(1) tetsz. 1 főegyütthatós n-edfokú polinom.

áll. (interpolációs hiba Csebisev-polinomokkal)

válasszuk alappontnak a T_(n+1)(x) polinom zérushelyeit, azaz

z_k = cos ((2k+1)π/(2(n+1))), k=0..n értékeket! Ilyenkor x-től fgtlenül:

|E_n(x)|<=M_(n+1)/(n+1)! 1/2^n

Hermite- és Spline-interpoláció

Hermite-interpoláció

az x0...xn kül. alappontokban adottak rendre az f0^(0),f0^(1),...,f0^(m0); … fn^(0),fn^(1),...,fn^(mn) értékek. Keressük azt a p(x) polinomot, amelyre p^(i)(xk) = fk^(i) [k=0..n; i=0..mk]

összesen m0+1+..+mn+1=N adat van, várható, hogy egy N-1-edfokú polinom fog interpolálni

t. (H_(N-1))

Egyértelműen létezik egy olyan H_(N-1) legfeljebb N-1-edfokú polinom, amely teljesíti a H^(i) (xk) = fk^(i) feltételeket.

Hermite-Fejér interpoláció

minden pontban csak a fv-értékek és az első derivált van megadva (mk=1,k=0..n). ekkor egy (2n+1)-edfokú polinom fog interpolálni.

előállítás Lagrange alappolinomokkal

H_(2n+1) (x) = sum[k=0..n](fk^(0)(1-2(x-xk)lk'(xk)lk^2(x)) + sum[k=0..n](fk^(1)(x-xk)lk^2(x)

előállítás osztott differenciákkal

l. JEGYZET!!!

(táblázatban minden pontot kétszer veszünk fel, mikor 0-val kéne osztani, oda a deriváltat írjuk)

Spline-interpoláció

ha alappontok adottak, Csebisev alappontok nem használhatók → szakaszonként alacsonyabbrendű polinomokkal interpolálunk

keressünk egy olyan g(x) fv-t, melyre g(xi) = fi (i=0..n), továbbá:

1. g és g' folytonos fv-ek

2. g többi deriváltja is folytonos minden részintervallumon és van bo/jo határértéke minden szakaszvégpontban

	3. ∫[a..b] (g''(x))^2 dx → min.
t. (g(x) létezik)	egyértelműen létezik egy a fenti feltételeknek megfelelő fv, ez minden szakaszon egy legfeljebb harmadfokú polinom, továbbá g''(x0)=g''(xn)=0 és g''(xk+)=g''(xk-) (i=0..n) (azaz a 2. derivált is folytonos)
megoldás	(ekvidisztáns felosztás, azaz xk – x(k-1) = h minden k-ra)
	sk: k-adik intervallumot interpoláló legfeljebb harmadfokú polinom. fk = sk xk-beli értéke, dk = sk xk-beli deriváltja. egyenletrendszer dk-ra → JEGYZET!!!
	példa: (0,1),(1,2),(2,0) pontokban:
	1/3[[2,1,0],[1,4,1],[0,1,2]]·[d0,d1,d2]^T = [1,-1,-2]^T → dk meghatározható → sk is

Trigonometrikus interpoláció

trigonometrikus polinom	tfh egy 2π-periódusú fvnek ismerjük az értékeit (fk) az xk=2πk/(n+1) eleme [0,2π) pontokban (k=0..n), ahol n pozitív egész.
	keressük az interpolálófv-t t_m(x) = a0 + sum[j=1..m](ajcos(jx) + bjsin(jx)) alakban, ahol t_m(xk)=fk. t_m-et trig. pol-nak nevezzük
kiegyensúlyozott trig. pol	2m+1 együttható, n+1 egyenlet
	ha n ps, akkor m=n/2 fokú egy.
	ha n ptl, akkor legyen m=(n+1)/2 → rendszer alulhatározott (n+2) együttható, (n+1) egyenlet, de b_m=0 → kiegyensúlyozott trig. pol.
t. (t_m létezik)	tfh n ptlan. ekkor egyértelműen létezik egy olyan m = (n+1)/2-edfokú kiegyensúlyozott t_m trigonometrikus polinom, melyre t_m(xk)=fk (k=0..n)
Fourier-analízis	t_m(x) = sum[j= -m..m](cj e^(ijx)), ahol
	cs = 1/(n+1) sum[k=0..n](fk w^(-ks)), s = -(m-1)...m, ahol
	w (n+1)-edik egységgyök.
	ha f valós, akkor
	a0=1/(n+1)sum[k=0..n]fk, am=1/(n+1)sum[k=0..n]fkcos(mxk)
	aj=2/(n+1)sum[k=0..n]fkcos(jxk) [j=1..m-1]
	bj=2/(n+1)sum[k=0..n]fksin(jkx) [j=1..m-1]
megj.	együtthatók a Fourier-sor együtthatóinak közelítései
gyors Fourier-trafó	cs = 1/(n+1) sum[k=0..n](fk w^(-ks)), s = -(m-1)...m
	kb (n+1)^2 szorzás → hogy lehetne kevesebb művelettel kiszámítani a szorzást?
	sum[k=0..n]fk w^(-ks) összeg számolásához két kisebb méretű (fele annyi tagból álló) hasonló összeget kell kiszámítani:
	p(w^(-s))=p_ps(w*^(-s) + w^(-s)p_ptl(w*^(-s))
	ahol w* (n+1)/2-edik egységgyök.
algoritmus	kiszámoljuk az s = -(m-1)..0 értékekre a cs együtthatókat eltárolva a ps(w*^(-s)) és w^(-s)p_ptl(w*^(-s)) értékeket
	az s=0..m értékekhez tartozó együtthatók ezekből szorzás nélkül számíthatók (előbb összegük, itt különbségük)
	műveletigény: O(n^2) helyett O(nlogn)

B-10 Közönséges differenciálegyenlet kezdetiérték-feladatának korrekt kitűzöttsége, diszkretizációs közelítő módszerei (explicit Euler, implicit Euler, negyedrendű explicit Runge-Kutta).

Kezdetiérték feladatok

korrekt kitűzésű feladatok	$F(x,d)=0$ feladat: d ismeretében határozzuk meg x értékét. d és x vmilyen normált terek elemeni. F adott fv. korrekt kitűzésű a feladat, ha a megoldás folytonosan függ d-től, azaz van a>0 úgy, hogy a feladatnak egyértelmű megoldása van ($x_{(d+cd)}$) minden olyan d+cd esetén, melyre $\lVert cd\rVert <= a$, és van $K(a,d)>0$ úgy, hogy $\lVert x_{(d+cd)}-x_d\rVert <= K(a,d)\lVert cd\rVert$.
kezdetiérték feladat	$y'=f(x,y)$, $y(x0)$ adott ahol $y:[a,b] \rightarrow R^n$ az ismeretlen fv, $f:[a,b]xR^n \rightarrow R^n$, továbbá x0 eleme [a,b] más alak: $y'(x)=f(x,y(x))$ vagy komponensenként rend: az ismeretlen fv. előforduló legmagasabb deriváltjának rendje megoldás: az az y fv, amely kellően sokszor deriválható, kielégíti a kezdeti feltételt és az egyenletbe helyettesítve azonosságot kapunk.
Lipschitz-folyt	egy $f:[a,b]xR^n \rightarrow R^n$ fv Lipschitz-folytonos a második változójában, ha van L>=0 úgy, hogy minden x eleme [a,b] és z1,z2 eleme R^n esetén $\lVert f(x,z1)-f(x,z2)\rVert < L\lVert z1-z2\rVert$
t. (egyért. mo.)	ha az $y'=f(x,y)$, $y(a)$ adott egyenlet f fv-e az első változóban folytonos, a másodikban pedig Lipschitz-folytonos, akkor az egyenletnek pontosan egy megoldása van és az folytonosan differenciálható
Euler-módszer, Θ-módszer, konvergencia	
explicit Euler-módszer	definiálunk egy rácshálót, és csak ezekben a pontokban közelítjük a megoldást. A rácsháló xk=x0+hk, ahol h egy tetsz. poz. lépéstávolság. közelítések: yk képlet: y(k+1) = yk + h f(xk,yk), y0 adott y(x0)-ból
numerikus séma	az az iterációs formula, amely megadja, hogy az egyes rácspontokban hogy kell a közelítést számolni a korábbi közelítésekből
explicit/implicit	numerikus séma explicit, ha y(k+1) meghatározásához nem kell egyenletet megoldani, különben implicit
egy-/többlépéses	egy numerikus séma egylépéses, ha y(k+1) csak az az y(k) közelítéstől függ a korábbi közelítések közül. ha többtől függ, akkor többlépéses
köv.	az explicit Euler-módszer egy explicit, egylépéses módszer
implicit Euler-módszer	yk = y(k+1) – h f(x(k+1),y(k+1)) minden lépésben egy nem lin. egyenletet kell megoldani → pl. fixpont iterációval korábbi yk értékről indítva.
Crank-Nicolson (trapéz)-módszer	y(k+1) = yk + h/2 (f(xk,yk)+f(x(k+1),y(k+1))). implicit, egylépéses módszer
Θ-módszer	y(k+1) = yk + h (Θ f(x(k+1),y(k+1)) + (1-Θ)f(xk,yk)) spec: Θ=0 → EE, Θ=1 → IE, Θ=1/2 → CN
konzisztencia	lokális hiba: helyettesítsük a num. sémába az yk, y(k+1) értékek helyett a megoldás y(xk), y(x(k+1)) értékeit, majd a bo-ból vonjuk ki a jobb oldalt → az így kapott megoldás kül. a lok. hiba. képlethiba: a lok. hiba h-val osztva, jel: $t_{(k+1)}$ ha a képlethibák mindegyike (legalább) $o(h^r)$ nagyságrendű (r>=1), akkor a num. séma konzisztens, és konz. rendje r. spec. EE konz. és konz. rendje 1.
konvergencia	ek = yk – y(xk) hiba

stabil	num. módszer stabil, ha van olyan K h-tól fgtl konstans, hogy max ||ek|| <= K (||e0|| + h sum||t_k||)
	num. módszer konvergens, ha max ||ek|| = o(h^r)
	ilyenkor a konv. rendje (legalább) r.
t. (konvergencia)	ha egy num. módszer stabil, konz. rendje r>=1, továbbá ||e0|| =o(h^r), akkor a módszer konvergens és a konv. rendje is r.
példa	EE,IE konv. rendje 1, CN-é 2.

Runge-Kutta módszer

Runge-Kutta módszer	tfh f kellően sima fv, így y is kellően sokszor dható lesz. írjuk fel a Taylor-polinomot az x0 pontban:
	y(x0+h)=y(x0) + h y'(x0) + h^2/2 y''(x0) + …
	y''(x0), de ehhez f fv deriváltjaire van szükségünk... stb.
általános alak	y(k+1) = yk + h Φ(xk,yk,h), ahol
	Φ(x,y,h) = sum[r=1..R] c_r k_r, ahol
	k_1 = f(x,y)
	k_r = f(x+ha_r, y+h sum[s=1..r-1](b_rs ks)), r=2..R
	a_r = sum[s=1..r-1]b_rs, r=2..R
Butcher-tábla	az együtthatók áttekinthetően összefoglalhatók táblázatos alakban.
	1. oszlop: 0,a2,...aR, utolsó sor: c1,c2,..,cR, ai és cj metszetében bij
példák	pl. negyedrendű RK, módosított Euler, Heun-módszer → I. JEGYZET!!!

B-11 Síkbeli autonóm közönséges differenciálegyenletek fázisportréja az egyensúlyi helyzetek környezetében.

Autonóm diffegyenletek

diffegyenletrendszer	x eleme R^n (függő), t eleme R^1 (független), f: D része R^(n+1) (nyílt, összefüggő) → R^n, f eleme C^0(D), x*=dx/dt, (t0,x0) eleme D
	1. x*=f(x,t)
	2. x(t0)=x0 → kezdetiérték-feladat (Cauchy-probléma)
megoldás	fi:(alfa,omega) része R^1 → R^n megoldása az 1. rendszernek, ha
	1. fi dható az (alfa,omega)-n
	2. (t,fi(t)) eleme D, t eleme (alfa, omega)
	3. fi*(t) = f(t,fi(t)
	és fi megoldása a 2. kezdetiérték-feladatnak, ha fi(t0)=x0
def.	x*=f(x) („x pont”, x*=dx/dt), nem függ t-től
	t eleme R, x eleme R^n, f:D(nyílt) része R^n → R^n, f eleme C^1(D) → létezik egyértelműen megoldás minden (t0,x0) t0 eleme R, x0 eleme D esetén
áll.	a pályák nem metszik egymást
	pálya: L_(x0,t0) = {x=x(t,x0,t0), t eleme (alfa, omega)}
n=1	x*=f(x), ha f(x)=0 → x=konst, kül. szétválasztható: int(dx/f(x))=int(dt) + c
	f(x) ábrázolása, zérushelyekben egyensúlyi pont, f>0 → x nő, f<0 → x csökken → I. JEGYZET!!!
n=2	Poincaré-Bendixson elmélet
	x*=X(x,y)
	y*=Y(x,y), X,Y eleme C^2

lineáris alak	x*=ax+by y*=cx+dy → (x,y)*=A(x,y) → (x,y) = x0 e^(A(t-t0)), azaz (x,y)=c1e^(lambda1 t)s1+c2e^(lambda2 t)s2
valós eset	1. lambda1<0<lambda2 → nyeregpont (instabil) 2. lambda1<lambda2<0 → csomópont (asz. stabil) 3. 0<lambda1<lambda2 → csomópont (instabil) → I. JEGYZET!!!
komplex eset	x*=alfa x + béta y y*= -béta x + alfa y polárkoordináták: x=rcosfi y=rsinfi r = gyök(x^2+y^2) → r*=alfa r → fi* = -béta
rajzok	(béta > 0 eset) 1. alfa<0 → stabil fókusz 2. alfa=0 → centrum 3. alfa>0 → instabil fókusz
n=3	lambda1<0, lambda2=lambda3* (konjugált) stabil henger, rátekeredik → JEGYZET!
nemlineáris alak	x*=X(x,y) y*=Y(x,y) 1. egyensúlyi helyzetek(stac. pontok) kiszámítása: X=0, Y=0 2. linearizálás egy. helyzetek közelében → (x,y)* = A(x,y) 3. Poincaré-tétel: ha Re lambdai !=0 semmilyen i, akkor a lin. és nemlin. rendszerek lok. fázisképe az egyensúlyai helyzetek közelében ekvivalensek
Határhalmaz	
def.	x*=f(x), tfh az x0-ból induló megoldás Fi(t,x0) korlátos, ha t>=0 ekkor (omega) w(x0) = {y eleme R^n | van tn → inf sorozat : Fi(tn,x0) → y}
áll.	w(x0) nem üres, kompakt, ívszerűen összefüggő, invariáns, d(Fi(t,x0),w(x0)) → 0 biz. Bolzano-Weierstrass-féle érveléssel
invariáns	M része R^n invariáns az x*=f(x) de-re, ha minden m eleme M, minden t eleme R-re Fi(t,m) eleme M → azaz, ha M teljes pályákból áll
t. (autonóm rendszerek határhalmaza)	x*=f(x), f : R^2 → R^2, f eleme C^1(R^2), és tfh. csak véges sok egyensúlyi helyzet van. Akkor w(x0) a következő lehet 1. 1db egyensúlyi pont 2. periodikus pálya 3. pont-vonal ciklus

B-12 Stabilitás, aszimptotikus stabilitás, Ljapunov-függvények.

Stabilitás, aszimptotikus stabilitás	
alapfeladat	1. x*=f(x,t) 2. x(t0)=x0

	t eleme R, x eleme R^n, f: D része R^(n+1)→ R^n, D=R^1xOmega(eleme R^n), f eleme C^1(D)
	0 eleme Omega → f(0,t)=0 → x=0 megoldás
	ezt vizsgáljuk t → +inf esetén
példa	x*=lambda x, x(t0)=x0 → x=x0 e^(lambda(t-t0))
	1. ha lambda<0 → asz. stab.
	2. ha lambda=0 → stab.
	3. ha lambda>0 → instab.
Ljapunov-stabilitás	az alapfeladat x=0 megoldását Ljapunov-stabilisnak nevezzük, ha minden epszilon>0, minden t0>0 esetén van delta>0, hogy minden ||x0||<delta , minden t>t0 esetén ||x(t,x0,t0)||<epszilon (nem megy el a 0-ból)
Ljapunov-instabilitás	ennek ellentéte, azaz van epszilon>0, t>0, hogy minden delta>0,t0>0 esetén van ||x0||<delta, t>t0, hogy ||x(t,x0,t0)|| >epszilon
Ljapunov aszimptotikus stabilitás	x=0 Lj-asz. stab, ha
	1. stab.
	2. x(t,x0,t0) → 0, ha t → inf
linearizált Lj-stabilitása	x*=A(x) + x(t,x), x(t,x) = o(||x||)
	ha az A mx. sajátértékeire Re lambda i <0 minden i, akkor a fenti de x=0 mo-a asz. Lj-stab. Továbbá, ha Re lambda j >0 vmely j-re, akkor az x=0 mo. instabilis
Ruth-Hurwitz-krit.	karakterisztikus polinom: sum(ai x^i) = 0
	H = Ruth-Hurwitz mx: (főátlóban ai, többi csökkenő sorrendbe ai-khez igazítva)
	ha H minden főminorja >0, akkor x=0 asz. stab. (ha legalább 1 neg. → instab.)
	ai >0 minden i: szükséges felt. (de nem elégs.)

Ljapunov-függvény

def.	V:U → R^n , L eleme C^1(U), U nyílt része R^n, (erős) Ljapunov-fv az x*=f(x) de-re (f:U → R^n C^1 fv.), ha <grad V(x),f(x)><0 minden x eleme U
	(azaz a megoldások V(x) szintfelületeit döfik, befelé mennek)
	Ha V(x) szintvonalai egymásba skatulyázott szintfelületek (pl. ellipszisek), akkor ez elégséges feltétel az asz. stab-ra
Lj-fv. keresése	nehéz
	V = a x^2 + b (y-c)^2 → úgy kell optimalizálni a,b,c-ben, hogy U minél nagyobb legyen
t. (Lj-fv. létezése)	ha x*=Ax de-ben Re lambdai<0 minden i, akkor létezik V(x) = x^TVx kvadratikus Ljapunov-fv.
t. (asz. stab.)	ha x*=Ax + a(x), és a(0)=0, a'(0)=0, Re lambda i <0, akkor a nemlin. egy x=0 mo asz. stab.

Operációkutatás

B-13 A lineáris programozás szimplex módszere.

A lineáris programozás alapfeladata

alaphelyzet	Minden előforduló szám racionális, A,b,c adottak, az A mátrix sorainak száma m>=2, oszlopainak száma n>m. a b,c vektorok m illetve n dimenziósak. keresünk olyan x eleme R^m vektort, amire:
bázis-almátrix	Az A mátrixnak létezik legalább egy invertálható mxm-es almátrixa → az ilyeneket bázis-almátrixnak nev.
feladat	Keresünk egy n-dim. vektort: x, amire:
	1. nemnegativitási feltétel: x>=0
	2. egyenletrendszer-feltétel: Ax=b,
	3. célfüggvény, amelyet maximalizálunk: c^T x → max a fenti feltételek mellett.
válaszok	1. nem létezik >= megoldás
	2. nem korlátos a célfüggvény
	3. létezik optimális >= megoldás
eltérésváltozók	Ax<=b esetén megfelelő egyenleteket eltérés (stack-)változókkal bővítjük
geometriai megoldás	nemnegatív ortánsban (R^2-ben síknegyed, R^3-ban térnyolcad stb.) hipersíkokat mozgatunk, szélsőértéket keressük
	pl. síkban (x kétdimenziós), egyenletek: félsíkok, megengedett megoldások ezek metszetében
	egyenlőtlenségeket félsíkokkal reprezentáljuk,
	célfv. maximalizálása: cfv=0 egyenest párhuzamosan eltoljuk (frontvonalak)
	előnye: áttekinthető
	hátránya: pontatlan, sok ismeretlenre nem jó
jelölés	aj: A j indexű oszlopa, cj/xj: c/x vektorok j-edik eleme
fízibilis (megengedett) megoldás	x megengedett (fízibilis) megoldás, ha Ax=b, és x>=0
bázismegoldás	x bázismegoldás, ha Ax=b, és azok az aj vektorok fgtlenek, melyekre xj!=0.
x_B felfújása	Ha adott B bázis-almátrix (azaz A mxm-es invertálható almátrixa), akkor a c_B és x_B vektorok azok az m-dimenziós vektorok, melyek komponenseit – j növekedési sorrendjében – azok a cj és xj elemek alkotják, melyekre aj része a B mátrixnak. az x_B felfújásán azt az n-dim. vektort értjük, melynek j-edik eleme 0, ha aj nem része a B mátrixnak, a többi elem pedig sorban megegyezik x_B elemeivel
t. (bázismegoldás – 3 áll.)	minden B bázis-almátrix egyértelműen meghatároz egy x bázismegoldást az x_B=B^(-1)b felfújása révén. Minden x bázismegoldáshoz tartozik legalább egy B bázis-almátrix, melyből x származtatható a fenti módon. Ha egy x bázismegoldásnak pontosan m darab komponense nem nulla, akkor a fenti B bázis-almátrix egyértelmű.
t. (nemneg. mo. létezése – 2 áll.)	az y>=0, Ay=b feltételrendszer akkor és csak akkor elégíthető ki, ha van legalább egy x nemnegatív bázismegoldás. egy B bázis-almátrixból akkor és csak akkor származik nemnegatív bázismegoldás, ha B^(-1)b>=0.
vizsgálósor	egy B bázis-almátrixhoz elkészítünk egy (1+n)-dimenziós sorvektort, az úgynevezett vizsgálósort, melynek az elemeit a j=0..n számokkal indexeljük. a 0 indexű elem ez lesz: c_B B^(-1)b. Továbbá j=1..n esetén a vizsgálósor j indexű eleme a c_B^T B^(-1)aj – cj különbség lesz

t. (vizsgálósor – 3 áll.)	Egy B bázis-almátrixhoz tartozó x bázismegoldásra c^T x értéke megegyezik a B-hez tartozó vizsgálósor 0 indexű elemével. Ha aj része B-nek, akkor a B-hez tartozó vizsgálósor j indexű eleme 0. Ha van olyan B bázis-almátrix, melyre B^(-1)b>=0, és valamely j eleme {1..n} esetén B^(-1)aj <=0, továbbá, ha a B-hez tartozó vizsgálósor j indexű eleme negatív, akkor tetszőleges gamma >=c_B^T B^(-1)b számra előállítható olyan y>=0 vektor, melyre Ay=b, és c^T y=gamma
lexikografikus rendezés (2 def.)	a [b,A] mátrixot úgy kapjuk, hogy az A mátrix elé írjuk a b vektort. Ha adott A-ban két különböző bázis-almátrix, B és D, akkor azt mondjuk, hogy D vizsgálósora lexikografikusan nagyobb, mint B vizsgálósora, ha a j=0..n indexek közül a legelsőre, mely indexű helyen különböznek a vizsgálósorok, ott a D vizsgálósora j indexű eleme nagyobb, mint B vizsgálósora j indexű eleme. Azt mondjuk, hogy egy B bázis-almátrixra a B^(-1)[b,A] lexikografikusan pozitív, ha minden sorban a legelső nemnulla elem pozitív.
t.(javítás)	Ha egy B bázis-almátrixra a B^(-1)[b,A] mátrix lexikografikusan pozitív és valamely j eleme {1..n} esetén B vizsgálósorának j indexű eleme negatív továbbáha B^(-1)aj-nek van legalább egy pozitív eleme, akkor B-ből előállítható egy másik D bázis-almátrix, melyre a D^(-1)[b,A] mátrix lexikografikusan pozitív, sőtmitöbb a D-hez tartozó vizsgálósor lexikografikusan nagyobb, mint B vizsgálósora.
Szimplex-módszer	
jellemzője	nemneg. bázismo-ból egy másikat kap → cél: opt. mo. (azaz, >=0, mo, bázismo és célfv. max). Egyesével lépked a bázisokon (1 oszlop ki és 1 oszlop be), először megnézzük, hogy kit vegyünk.
hogy kapok bázismo-t? (konstrukció)	x: bázisszerű mo, y: nemnegatív mo y-ban megnézem, hogy mely komponense >0 (!=0) → A ezen oszlopait megnézem. Ha ezek fgtlenek → kész. Ha nem → legtöbb fgtlen. Ha =m db van → kész. Ha <m → kiegészítjük a többi oszlopból (ott már y komp. 0) → bázist csinálok, ehhez a korábbi módszerrel mo-t csinálok → x bázismo lesz, de lehet negatív is. Ha x>=0 kész. Ha >=1 negatív komponense van → „kikeverem a kettőből”. RAJZ!!! x és y koordinátáit két egyenesen ábrázolom, megfelelő koordinátákat összekötöm. A(cx+(1-c)y) = b, ahol c-t olyan nagyra veszem, ahol alulról indulva először átmetszi a ferde vonal a 0-0-t összekötő szakaszt. Ennél a c*-nál jo-n 1-gyel kevesebb szám van
x opt.	(c_B^T B^(-1)A – c^T)x = c_B^T B^(-1)b – c^Tx, rögzített B esetén c_B^T B^(-1)b konstans → eredeti célfv. akkor a legnagyobb, ha a sk. szorzat a legkisebb. ha a vizsgálósor >=0, x>=0 → sk. szorzat is >=0, lehető legkisebb értéke 0. Ha pill. B-hez tart. bázismo-t írjuk be → opt. mo. Lényeg: eredeti célfv akkor a legnagyobb, ha a vizsgálósor >=0
Pivotálás	ha van <0 érték lent → fölötte pozitívat keresek, ha több is van, azt karikázom be, amire a hányadosa az első (B^(-1)b-t tartalmazó) oszlop megfelelő elemével a legkisebb. → PIVOT-elem. azt a bázist dobjuk ki, ami annak a sorában van.
nem korl. célfv (konstrukció)	ha van olyan <0 elem, ami fölött nincs poz, akkor nem korlátos a célfv. megoldás: x = x* - b v, ahol b tetszőleges, x* a kapott bázismegoldás, v-t pedig annak a <0 elemet tartalmazó oszlopot tartalmazó vektor fölfújásával kapunk. + ha a <0 elem a j. oszlopban volt, akkor a v j. eleme MINDIG -1!!!
megj.	pivotáláskor a célfv. értéke nem biztos, hogy változik. Nagyobb baj, h körbe-körbe jár → ciklizálás. Ennek elkerülése

	1. perturbálás 2. lexikografikusság: ez alapján a legnagyobb sort választja ki (holtverseny esetén megfelelő koordinátapárokat néz, az első különböző értéknél a kisebbet választja ki) 3. Bland-szabály (biztosítja, hogy ugyanaz a bázis ne szerepeljen 2x) → „balra tarts!”, azaz, ha több <0 is van, a legbaloldalibb kell, legkisebb hányados, és a kikerülőre is balra tarts. (legkisebb indexű)
2-fázisú Szimplex-módszer	
1. fázis	1. mesterséges változók 2. b>=0 (ha nem, -1-gyel szorzom a sort) 3. [A] helyett [A,I] (I: identitás) 4. eredeti célfv. helyett új célfv: mesterséges változók összege min.
megj.	nem lehet, hogy nem korlátos a célfv (minden – fölött biztos van +) pivotálás lexikografikusan vizsgálósor 0. eleme <0 is lehet! 1. fázis OK, ha mindegyik mesterséges bázist le tudtuk cserélni (azaz elértük a 0-t)
válaszok	1. nincs nemneg. mo (azaz 1. fázisban bal alsó sarokban <0 szám maradt) 2. 1 fázis OK, de 2. fázis → nem korl. a célfv. 3. van megengedett bázismo.
2. fázis	1. abból indul, amit az 1. fázis eredményül adott 2. eredeti célfv-nyel dolgozik fentihez hasonlóan
Dualitás	
duális pár	My<=b; y>=0, d^Ty → max alakú feladat duális párja -M^Tz<=-d, z>=0, -b^Tz → max (M,b,d-t mind transzponáltuk és szoroztuk -1-gyel) duális pár duálisa az eredeti feladat. legyen y és z egy-egy ilyen feladat megoldása.
áll. (d^Ty<=b^Tz)	(z^T M)y>=d^T y, és z^T (My)>=z^T b. köv. ha az egyiknek nem korlátos a célfv-e, akkor a másiknak nincs nemneg. mo-a
standard alak	tekintsünk egy My<=b, y>=0, d^Ty → max alakú feladatot, készítsünk belőle standard alakú feladatot: Ax=b, x>=0, c^T x → max. A=[M,I], c: d-t kiegészítettük 0-kkal.
t. (dualitás)	tegyük fel, hogy az Ax=b, x>=0, c^T x → max feladatnak van nemneg. megoldása és korlátos a célfv.-e. Ekkor ennek a feladatnak, az eredeti My<=b, y>=0, d^T y → max feladatnak, továbbá annak duális párjának is van egy-egy optimális megoldása, sőt az első két optimális célfv-érték megegyezik, a harmadik pedig ennek az értéknek a (-1)-szerese. Sőtmitöbb, az Ax=b, x>=0, c^T x → max feladat x* optimális megoldása bázismegoldásnak is választható, az My<=b, y>=0, d^T y → max feladat y* optimális megoldása x*-ból egyszerűen csak az utolsó komponensek elhagyásával kapható, továbbá a -M^T z<= -d, z>=0, -b^T z → max feladathoz választható a z*=(c_B^T B^(-1))^T optimális megoldása, ahol B az x* megoldásához tartozó (egyik) bázis. Ennek a z* vektornak és az x* vektorból az y* komponensei elhagyásával keletkezett maradékvektornak a skalárszorzata 0.

B-14 Nemlineáris programozás (az optimalitás szükséges feltétele, konvex programozás).

Általános feladat, konvex programozás

általános nemlineáris optimalizálási feladat (NLO)	min f(x), gi(x)=0, i eleme I, hj(x)<=0, j eleme J, x eleme C
	x eleme R^n, C része R^n adott hz, f,gi,hj fvk ért. tart. C.
megengedett megoldások halmaza	F= {x eleme C, gi(x)=0, hj(x)<=0}
konvex halmaz	C része R^n hz konvex, ha minden x1,x2 eleme C és 0<=a<=1 esetén x=ax1+(1-a)x2 eleme C. x: x1, x2 konvex kombinációja.
	másként: konvex hz tetsz két pontját összekötő szakasz is a hzban van.
konvex fv	konvex C hzon ért. f:C → R fv. konvex, ha x1,x2 eleme C és 0<=a<=1 esetén
	f(ax1+(1-a)x2)<=af(x1)+(1-a)f(x2)
gradiens	f fv gradiense a parciális deriváltak vektora
	(nabla f)j=∂f/∂xj
Hesse-mátrix	másodrendű parc. deriváltakból áll
	(nabla^2 f)ij = ∂^2f/∂xi∂xj
konvex optimalizálás	feladat konv. opt, ha f,gi konvex fv, hj affin fv és C konvex hz.
konvexitás szüks. és elégs. felt.	ha C konvex, nyílt, f eleme C^2(C), akkor ekv:
	f konvex <-> f Hesse-mxa poz.definit
mo. létezésének szüks. és elégs. felt.	ha F nyílt, f eleme C^1(C), akkor x* eleme R^n optimális <-> (nabla f)(x*)=0

Lagrange-féle multiplikátoros módszer

feltételes optimalizálás	ha I, J nem mindkettő üres, kül. feltétel nélküli opt.
feladat	egyelőségfeltételes opt, azaz min f(x), gi(x)=0 x eleme C
	ahol x eleme R^n, C része R^n konvex, f gi konvex fvek Cn
megengedett megoldások halmaza	S={x eleme C : gi(x)=0}
Lagrange-függvény	3. L(x,a)=f(x)+ag(x) = f(x) + sum[i=1..m]ai gi(x)
t. (Lagrange-tétel, szükséges)	f,gi folyt. dhatóak egy S-et tartalmazó nyílt hzon.
	ha x0 eleme R^n és a nabla gj(x0) lin. fgtlenek, akkor van olyan a0 eleme R^n multiplikátorvektor, hogy L(x0,a0)=0
t. (elégs. felt.)	Legyen (x0,a0) a Lagrange-fv stac. pontja. Ha x0 rögzített a0 mellett feltétel nélküli glob. min.pontja a L-fv-nek, akkor x0 glob. min.pontja a feladatnak.

Karush-Kuhn-Tucker optimalitási feltételek

feladat	egyenlőtlenségfeltételes optimalizálás, azaz min f(x), hj(x)<=0, x eleme C
	ahol C része R^n konv, nyílt hz.
megengedett megoldások halmaza	F={x eleme C : hj(x)<=0}
t. (elégs. felt.)	ha f, hj folyt. dhatók C-n, és egy x* eleme F pontra léteznek ai>=0 számok, hogy
	nabla f(x*) = -sum[j=1..m] aj gj(x*), és ajgj(x*)=0
	akkor x* opt. mo-a a konv. opt. feladatnak
Slater-pont	x* eleme F pont Slater-pont, ha hj(x*)<0 minden nemlineáris hj-re.
	A feladat Slater-reguláris, ha van Slater-pontja

t. (Slater-regularitás)	ha a konv. opt. feladat Slater-reguláris, akkor minden opt. mo teljesíti a Kuhn-Tucker feltételeket.

Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

B-15 Együttes és feltételes eloszlás. Várható érték vektor, kovariancia mátrix. A több-dimenziós normális eloszlás.

Diszkrét v.v.	
valószínűségi változó	(Omega, A, P) vsz. mező, kszi: Omega → R
	kszi fv. valószínűségi változó, ha minden x eleme R kszi^(-1)((-inf,x)) eleme A
diszkrét val. változó	ha egy vsz változó megszámlálható sok értéket vesz föl, akkor diszkrét vsz. vált.
eloszlása	xi értékeket pi vszgekkel vesz föl, akkor P(kszi=i)=pi
	sum(pi)=1
várhatóértéke	sum(xipi)=E(kszi), ha sum(|xipi|)<inf (abszolút konvergens)
együttes eloszlás	(Omega, A, P) vsz. mező; kszi, éta diszkrét v.v.
	ekkor kszi és éta együttes eloszlása
	P(kszi=xi,éta=yj)=r_ij >=0 minden i,j-re
	kszi1,...,kszin vsz. változók együttes eloszlása:
	P(kszi1=x_(1,j1),...,kszin=x_(n,jn))=r_(j1,...,jn)
feltételes vsz.	B,C eleme A; P(B|C)=P(BC)/P(C)
fgtlenség	kszi, éta v.v. fgtlenek, ha minden i,j esetén
	P(kszi=xi,éta=yj)=P(kszi=xi)P(éta=yj)
	kszi1,...,kszin vsz. változók függetlenek, ha {kszi1=x_(1,j1)}...{kszin=x_(n,jn)} teljesen fgtlenek
marginális eloszlás	P(kszi=xi)=sum[j]r_ij = Pi
	{kszi=xi}=U{kszi=xi,éta=yj}
Folytonos v.v.	
eloszlásfv	kszi v.v. F(x)=P(kszi<x) kszi eloszlásfve
	F: R → [0,1] eloszlásfv <->
	1. monoton nem csökkenő
	2. balról folytonos
	3. lim F(x) = 0, ha x → -inf, 1, ha x → inf
folytonos v.v.	ha a kszi v.v. F elofv-e folyt., akkor kszi-t folyt. v.v.-nak nevezzük
sűrűségfv	ha van f:R → R+ hogy minden x-re F(x)=int[-inf,x]f(y)dy, akkor F absz. folytonos és f ennek a sűrűségfv-e.
	f sűrűségfv <-> f>=0 és int[-inf,int]f(y)dy=1
együttes eloszlásfv	kszi, éta v.v. együttes elofv-e:
	H(x,y)=P(kszi<x,éta<y)
	1. minden változóban mon, nem csökkenő
	2. lim[x → -inf] H(x,y)=0 minden y
	lim[y → -inf] H(x,y)=0 minden x
	3. lim[x → inf] H(x,y)=P(éta<y)=G(y)
	lim[y → inf] H(x,y)=P(kszi<x)=F(x)
	4. minden változóban balról folytonos
	5. minden a1<b1, a2<b2-re

	P(a1<=kszi<=a2,b1<=éta<=b2)=H(a2,b2)-H(a1,b2)-H(a2,b1)+H(a1,b1)>=0
együttes sűrűségfv.	ha van h(x,y), hogy minden x,y-re H(x,y)=iint[-inf,x][-inf,y]h(u,v)dudv, akkor h az együttes sűrűségfv.
	1. h(x,y)>=0 majdnem mindenütt
	2. iint[-inf,inf][-inf,inf]h(x,y)dxdy=1
	P((kszi,éta) eleme A) = iint[A]h(x,y)dxdy
fgtlenség	kszi,éta v.v. fgtlenek <-> minden A,B része R
	P(kszi eleme A, éta eleme B)=P(kszi eleme A)P(éta eleme B)
	kszi1,...,kszin vsz. változók függetlenek, ha minden A1,....,An része R-re
	P(kszii eleme Ai : 1<=i<=n) = prod[i=1,n]P(kszii eleme Ai)
	ennek szüks. és elégs. feltétele, hogy H(x1,...,xn)=prod Fi(xi), ill. ha létezik h(x1,...,xn), akkor sz.é.e.f: h(x1,...,xn)=prod fi(xi)
feltételes eloszlásfv	ha létezik (∂H(x,y)/∂y)g(y), akkor ez a felt. elofv. (g(y)!=0)
feltételes sűrűségfv	ha létezik H(x,y)/g(y), akkor (∂P(kszi<x,éta=y)/∂x)=h(x,y)/g(y) a kszi felt. sűrűsége az éta=y feltétel mellett
t. (teljes vsz. tétele)	éta absz. folyt v.v., B része A (szigma-alg.)
	P(B)=int[R]P(A|éta=y)g(y)dy
v.v.-k fvének sűrűsége	ha (kszi,éta) együttes sűrűsége h(x,y), és fi:R^2 → R^2 1-1 értelműen, akkor (kszi,éta)=fi(alfa,béta) → (alfa,béta)=fi^(-1)(kszi,éta), és (alfa,béta) sűrűsége: h(fi(alfa,béta))·|∂(kszi,éta)/∂(alfa,béta)| (feléve, hogy ez létezik és folytonos

Több-dimenziós normális eloszlás

def. (2-dim)	(a1,a2)=A(b1,b2), D=detA!=0
	b1,b2~N(0,1) fgtlen → h(x,y)=1/π exp(-(x1^2+x2^2)/2)
sűrűségfv	h(y)=1/2πD exp(-1/2<y,(AA^T)^(-1)y>)
kovariancia	z1,z2 v.v. D^2 z1<inf
	Cov(z1,z2)=E(z1z2)-E(z1)E(z2)
	Szigma: AA^T kov. mátrix,
def. (d-dim norm. eo)	N(mu,Szigma), mu eleme R^d, Szigma eleme R^(dxd)
	Szigma=AA^T, D=detA
sűrűségfv	h(y)=1/((2π)^(d/2)D) exp(-1/2<(y-mu),Szigma^(-1)(y-mu)>)

B-16 Valószínűségszámítási egyenlőtlenségek és alkalmazásaik. Nagy számok gyenge törvénye.

Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség és alkalmazásuk

Markov-egyenlőtlenség	ha kszi >=0 és E kszi véges, akkor P(kszi>=A)<=E(kszi)/A
Csebisev-egyenlőtlenség	ha D^2(kszi)<inf, A>0, akkor
	P(|kszi – E kszi|>=A)=P(|kszi – E kszi|^2>=A^2)<=D^2(kszi)/A^2
példa: közvélemény-kutatás	p: párt preferenciavszge (0,33)
	N: minta elemszáma (1200)
	xi={1, ha támogatja | 0, ha nem}
	Sn=x1+...+xn, Sn/n, D^2(Sn/n)=1/N^2 D^2(Sn)=1/N^2 Np(1-p)
	Csebisev: P(|Sn/n – p|>epszilon)<=D^2(Sn/n)/epszilon^2=p(1-p)/(N epszilon^2)<=1/(4Nepszilon^2)=delta

	delta=0,05 P(|Sn/n – p|<=epszilon)>=1-delta=0,95 → epszilon=gyök(1/4Ndelta) → [p-epszilon,p+epszilon] → konfidenciaintervallum
Nagy számok gyenge törvénye és alkalmazásuk	
gyenge konvergencia	z1,...,zn,... w tetsz. v.v.
	zn => w (gyengén/vszgben/mértékben/szochasztikusan), ha
	ha minden epszilon és minden éta esetén létezik n0 = n0(epszilon, éta), hogy minden n>=n0-ra
	P(|zn-w|>epszilon)<éta
nagy számok gyenge törvénye	x1,...,xn,... FAE v.v., Ex1^2<inf
	minden epszilon>0, minden éta>0 létezik n0(epszilon,éta), hogy n>=n0 esetén P(|Sn/n-Ex1|>epszilon)<éta vagy P(|Sn/n-Ex1|<=epszilon)>1-éta
	ahol Sn=x1+...+xn
jelentősége	kísérletek átlaga sok kísérlet után tetszőlegesen közel van a várhatóértékhez
példa	y1,...,yn,... ~Bernoulli(p), azaz Ey1=p, D^2(y1)=p(1-p)
	P(y1=0|1)=p|1-p
	Sn=y1+...+yn
	P(|Sn/n – p|<=epszilon)>1-éta, ha n>=p(1-p)/(epszilon éta)

B-17 Stirling-formula, DeMoivre-Laplace-tétel és alkalmazásaik.

Stirling-formula és alkalmazása	
Stirling-formula	n! ~ (n/e)^n gyök(2πn), ha n → inf
	(azaz a hányadosuk tart az 1-hez)
	biz: log n! = sum[k=1..n] log k
	ezt becsüljük alulról és felülről int(log x dx) diszkrét közelítéseivel
megj. (Robbins)	(n/e)^n gyök(2πn) e^(1/(12n+1)) <= n! <= (n/e)^n gyök(2πn) e^(1/(12n))
alkalmazás: véletlen bolyongás	Sn=x1+...+xn, P(xi=1)=P(xi= -1)=1/2
	P(Sn=0)=P(S(2n)=0)=(2n alatt n)/2^(2n) ~ (Stirling-f.) ~ 1/gyök(π) 1/gyök(n)
DeMoivre-Laplace-tétel és alkalmazása	
t. (centrális határeloszlás t. - CHT)	kszi1,...,kszin,... FAE v.v. E(kszii)=0, D^2(kszii)=szigma^2 (0<szigma^2<inf)
	Sn=kszi1+...+kszin
	E(Sn)=0, D^2(Sn)=nszigma^2
	P(Sn/gyök(n)szigma < x) → Fi(x)=1/gyök(2π) int[-inf...x] e^(-y^2/2) dy
t. (De Moivre – Laplace-tétel)	epszilon1,...,epszilonn,... FAE v.v., P(epsziloni=1 | 0)=p | 1-p (0<p<1)
	Sn=epszilon1+...+epszilonn
	P(Sn=k)=P((Sn-np)/gyök(npq) = (k-np)/gyök(npq)) ~ 1/gyök(npq) fi(xk), ahol xk=(k-np)/gyök(npq) és fi(x)=1/gyök(2π)e^(-x^2/2)

áll. (eltérés)
ha |xk|<=An (azaz k körül legfeljebb n^(2/3)gyök(npq)-val térhet el és An/(n^(1/6)) → 0, akkor
max_(|xk|<=An) |P(Sn=k)/(hfi(xk)) – 1| = O(An^3/gyök(n))
ahol h=1/gyök(npq) (rácsállandó)

megj.
P((Sn-np)/gyök(npq)=xk)/(hfi(xk)-1 egyenletesen közel vannak egymáshoz

biz: P(Sn=k)=(n alatt a k)p^k(1-p)^(n-k) → Stirling-formulával átalakítjuk, ezt becsüljük

t. (De Moivre – Laplace-tétel glob. vált.)
-inf<alfa<béta<inf

P(alfa<(Sn-np)/gyök(npq)<béta)=P(np+alfagyök(npq)<Sn<np+bétagyök(npq)) = int[alfa..béta]fi_n(x), ahol
fi_n(x)=gyök(npq)P(Sn=[np+xgyök(npq)]) → lépcsős fv.

alkalmazás
statisztikában, konfidenciaintervallum készítésekor

B-18 Karakterisztikus függvények, tulajdonságaik és alkalmazásaik.

Karakterisztikus fv-ek, általános tul.

def.
X tetsz. v.v., pszi(t)=Ee^(itX)=int[-inf..inf]e^(itX)dF(X)
spec. 1. ha X diszkrét és eloszlása x1..xn, p1..pn vszgekkel, akkor pszi(t)=sum[i]e^(itxi)pi
2. ha X absz. folyt és sűrűsége f(x), akkor pszi(t)=int[-inf..inf]e^(itx)f(x)dx

megj.
|Ee^(itX)|<=E|e^(itX)|=1 → pszi(t) létezik minden t eleme R-re

tul. (8 db)
1. pszi(t) létezik minden t eleme R-re
2. |pszi(t)|<=1 minden t eleme R-re
3. pszi(0)=1
4. pszi(-t)=konjugált(pszi(t))
5. pszi_(aX+b)(t)=Ee^(it(aX+b))=e^(itb)pszi_X(ta)
6. ha X és Y fgtlenek, akkor pszi_(X+Y)(t)=pszi_X(t)pszi_Y(t)
7. pszi(t) egyenletesen folytonos R-en
8. pszi(t) pozitív szemidefinit, azaz 0<=E|sum(zj e^(i tj x))|^2 = E(sum(zj e^(i tj x))E(sum(konj(zj) e^(-itj x))=sum(zk konj(zj) pszi_x(tk-tj))

t. (Hincsin-Bochner)
pszi(t):R → C karakterisztikus fv <-> teljesül 2,3,7 és 8

megj.
Ee^(itx)=Ee^((it)x), tehát formálisan pszi_X(t)=M_X(it), ahol M_X(it), ahol M_X(t)=Ee^(Xt) momentumgenerálófv.

áll.
ha 1<=alfa<=béta, akkor EX^béta létezése → EX^alfa létezése

biz: Hölder-egyenlőtlenség

Sorbafejthetőség, folytonosság, inverziós formula

t. (Taylor-sor)
1. ha létezik E|X|^k minden k>=1-re és lim |t|^nE|x|^n/n! → 0, vmely t eleme R-re, akkor pszi(t)=sum((it)^k/k! EX^k)
2. ha sum(|t0|^k/k! E|X|^k)<inf, akkor 1. állítás minden |t|<=t0-ra igaz (Taylor sor konv. sugara)
3. ha létezik EX^n, akkor pszi(t)=sum[k=0..n]((it)^k/k! EX^k) + o(t^n), ha t → 0

t. (teleszkópos egyenlőtlenség)
zi, wi eleme {z | |z|<=1}, akkor
|prod(zi)-prod(wi)|<=sum(zi-wi)

t. (folytonosság)	Fn => F (gyenge konv*) <-> pszi_n(t) → pszi(t)
	*: azaz 1. Fn(x) → F(x) minden x eleme C_F (folyt. pontok)
	vagy 2. minden h folyt, korl fv-re int(hdFn) → int(hdF)
t. (unicitás)	pszi_F(t)=pszi_G(t) minden t-re → F=G
inverziós formula spec. esetben	ha pszi(t) eleme C1(R), akkor F-nek van f sűrűségfve és f(x)=1/2π int[-inf..inf](e^(-itx)pszi(t)dt
	ugyanakkor, ha van f(x) sűrűségfv, akkor pszi(t)=1/2π int[-inf..inf]e^(itx)f(x)dx → Fourier-transzformált

Alkalmazás

megj.	nem közvetlenül karakterisztikus fv-é!, de nem baj, mert mom. gen. fv, generátor fv és kar. fv. egymásba átírhatók
1. Galton-Watson (elágazó) folyamat:	pl. nemesi családok
	X1=Z(1,1), X2=Z(2,1)+...+Z(2,X1) stb.
	Ez^(Xn) = G(...G(G(z))...) n-szer
2. 1-dim. véletlen bolyongás	P(Xi=+1 | -1)= p | 1-p, Sn=X1+...+Xn
	T_k = min{n | Sn=k}
	T_1 → G(z)
	E z^(T_k)=(G(z))^k
	eredmény: ha G(1)<1 (azaz p<1/2) → véges vsz-gel lesz a v.v. végtelen (1-p/q vszgel nem érünk vissza 1-be)

B-19 Statisztikai próbák általános elmélete. Egyenletesen legerősebb próbák, Neyman-Pearson-alaptétel és kiterjesztése összetett hipotézisek vizsgálatára.

Hipotézivizsgálat általánosan

hipotézisek	Theta=Theta0 U* Theta1 (paraméterterek 2 diszjunkt unióra osztjuk)
	H0=theta eleme Theta0 vs. H1=theta eleme Theta1
	ezt az alternatívát vizsgálom az x1,...,xn ~ P_theta fae. minta alapján
döntések	X=Xe U* Xk (X: mintatér) felosztás alapján:
	1. ha x eleme Xe, akkor elfogadom H0-t
	2. ha x eleme Xk, akkor elutasítom H0-t
	Xe U* Xk felbontást epszilon fv-ében készítjük el egy olyan statisztika alapján, amelynek eloszlása H0 esetén ismert
terjedelem	az Xk kritikus tartománnyal definiált próba terjedelme epszilon, ha epszilon=sup[theta eleme Theta0] P(x eleme Xk)
egyszerű/összetett	ha |Theta0|=1, akkor egyszerű 0-hipotézis, kül. összetett
ELEGER	Xk kritikus tartománnyal definiált próba epszilon-terjedelmű, egyenletesen legerősebb, ha terjedelme epszilon és minden más Xk' kritikus tartománnyal definiált legfeljebb epszilon terjedelmű próbára:
	P_theta(x eleme Xk)>=P_theta(x eleme Xk') minden theta eleme Theta1
torzítatlan	(Xk krit. tart.nyal def. próba...) ~ torzítatlan, ha sup_(theta eleme Theta0)P_theta(x eleme Xk)<=inf_(theta eleme Theta1)(x eleme Xk)
konzisztens	~ konzisztens, ha lim[n → inf] P_theta(xn eleme Xk^(n))=1 minden theta eleme Theta1

<table>
<tr><td>próbafv.</td><td>pszi(x)={0, ha x eleme Xe | p, ha x eleme Xr (randomizálási tartomány), | 1, ha x eleme Xk} → H0 elutasításának vsz-ge az x kimenetel esetén</td></tr>
<tr><td>ELEGER-próbafv.</td><td>pszi
epszilon=sup_(theta eleme Theta0) E_theta(pszi(x)) és E_theta(pszi(x))>=E_theta(pszi'(x)) minden theta eleme Theta1
ahol sup_(theta eleme Theta0) E(pszi'(x))<=epszilon</td></tr>
<tr><td>Neyman-Pearson-alaptétel és kiterjesztései</td><td></td></tr>
<tr><td>t. (Neyman-Pearson-alaplemma)</td><td>(Omega,A,P) dominált (vmely szigma-véges mu-mértékkel), identifikálható (azaz P_theta1=P_theta2 → theta1=theta2), paraméteres statisztikai mező.
az x1,...,xn ~ P_theta fae. minta alapján a H0: theta=theta0 vs H1:theta=theta1 alternatíva közti döntésre minden 0<epszilon<1 esetén konstruálható 1-epszilon szintű (epszilon-terjedelmű) randomizált ELEGER-próba, melynek próbafve:
pszi(x)={0, ha L_theta1(x)/L_theta0(x) < c,
p, ha L_theta1(x)/L_theta0(x)=c és
1, ha L_theta1(x)/L_theta0(x)>c}
ahol c=c_epszilon>0 és p=p_epszilon eleme [0,1] megválasztatók úgy, hogy a próba terjedelme epszilon legyen. pszi 1 vszgel egyértelmű</td></tr>
<tr><td>monoton likelihood hányadosú</td><td>a {P_theta | theta eleme Theta} elocsalád m.l.h, ha minden theta<theta' esetén L_theta'(x)/L_theta(x) vmely T(x) statisztika mon. növő fv-e (T elégséges)</td></tr>
<tr><td>t. (m.l.h.)</td><td>m.l.h. eocsaládoknál a H0:theta<theta0 vs. H1:theta>=theta0 alternatívára minden epszilon-hoz létezik pontosan epszilon terjedelmű eleger-próba, melynek próbafve:
pszi(x)={0, ha T(x)<c | p, ha T(x)=c | 1, ha T(x)>c}
c_epszilon, p_epszilon megválaszthatók úgy, hogy epszilon legyen a terjedelem</td></tr>
<tr><td>t. (m.l.h. II)</td><td>m.l.h. eocsaládoknál a H0:theta<=theta1 vagy theta>=theta1 vs. H1:theta1<theta<theta2 alternatívára minden epszilon-hoz létezik pontosan epszilon terjedelmű eleger-próba, melynek próbafve:

pszi(x)={0, ha T(x)<c1 vagy T(x)>c1 | p, ha T(x)=c1 vagy T(x)=c2 | 1, ha c1<T(x)<c2}
c1<c2 és p_epszilon megválaszthatók úgy, hogy epszilon legyen a terjedelem</td></tr>
<tr><td>megj. (erőfv.)</td><td>erőfv. alakja: JEGYZET
spec. pszi(x)={0 <-> x eleme Xe | 1 <-> x eleme Xk}
E_theta(pszi(x))=P_theta(pszi(x)=1)=P_theta(x eleme Xk) = {1.fajú hiba, ha theta eleme Theta0 | 1-2.fajú hiba, ha theta eleme Theta1}
minél nagyobb az erőfv annál jobb lesz a próba, mert a 2.fajú hiba annál kisebb lesz
eleger <-> minden más próba rosszabb
fordítottra nincs tétel! (H0: theta0<=theta<=theta1...)
próbafv. „utánozza” H0-t</td></tr>
<tr><td>megj. (exp.eo)</td><td>expeo családnál L_theta(x)=c(theta)exp(Q(theta)T(x))h(x) m.l.h, ha Q(theta) mon. theta-ban. Ekkor ha mon. nő → T(x) jó lesz, ha mon. csökken → -T(x) → próbafv-nél figyelni kell</td></tr>
<tr><td>t. (Likelihood-hányados próba)</td><td>(dim(Theta)=k, ált. >1)
H0: theta eleme Theta0 vs. H1: theta nem eleme Theta0, ahol Theta0 része Theta alacsony dimenziós részsokaság (nem felt. altér) dim(Theta0)=r<k</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>t. (lambda(x) eloszlása)</td><td>x1,...,xn fae minta alapján minden 0<epszilon<1 létezik epszilon terjedelmű eleger-próba:
pszi(x)={0, ha lambda(x)>c | p, ha ~=c | 1, ha <c}
ahol c=c_epszilon>0 úgy, hogy sup_(theta eleme Theta0) E(pszi(x))=epszilon és
lambda(x) = [sup_(theta eleme Theta0) L_theta(x)] / [sup_(theta eleme Theta) L_theta(x)]
ha p=0, akkor sup_(theta eleme Theta0) P_theta(lambda(x)<c)=epszilon → ismerni kell lambda(x) eloszlását
ha lambda(x) eloszlása nem ismert, akkor használható a köv. tétel:
- 2 ln(lambda(x)) -> Khi^2(k-r), ha n → inf (H0 fennállása esetén)
ekkor Xk={x|-2ln(lambda(x))>Khi^2_epszilon(k-r)}</td></tr>
</table>

B-20 Pontbecslési módszerek (momentumok, maximum likelihood, Bayes). A maximum likelihood becslés aszimptotikus viselkedése, Cramér-Dugué-tétel és következményei.

Likelihood-alapú becslések, elégségesség

<table>
<tr><td>alaphelyzet</td><td>legyen (Omega,A,P) dominált, identifikálható, paraméteres stat. mező. P={P_theta | theta eleme Theta}. Legyen x1,...,xn fae minta ~ P_theta</td></tr>
<tr><td>likelihood-fv</td><td>egy n-elemű minta likelihood-fv-e
L_theta(x)=P_theta(X=x)=prod p_theta(xi), ha P_theta diszkrét
L_theta(x)=prod f_theta(xi), ha P_theta absz. folyt.
L_theta(x): Theta x X → R+</td></tr>
<tr><td>ML-becslés</td><td>a theta paraméter maximum likelihood becslése egy olyan theta*: X → Theta statisztika, melyre L_(theta*(x))(x)>=L_theta(x) minden x eleme X, theta eleme Theta
(theta* = argmax L_theta(x))</td></tr>
<tr><td>megj.</td><td>elég: l_theta(x)=ln L_theta(x) → max. theta-ban. ha ez theta szerint dható, akkor ∂/∂theta l_theta(x)=0 (log-likelihood-fv)</td></tr>
<tr><td>elégséges</td><td>az x1,...,xn ~ P_theta fae. minta T=T(x) statisztikája elégséges a paraméterre, ha (D) P_theta(X=x|T(x)=t) / (AF) f_theta(x|T(x)=t) nem függ theta-tól (azaz T minden-t elárul a paraméterről)</td></tr>
<tr><td>t. (Neyman-Fischer fakt. tétel)</td><td>T elégséges Theta-ra <-> L_theta(x)=g_theta(T(x))h(x), minden theta eleme Theta, x eleme X ahol g és h mérhető valós fvek.</td></tr>
<tr><td>minimális elégséges</td><td>részben rendezés elégséges statisztikák között: T1<=T2, ha van g: T1=g(T2). min. elégs. stat: olyan elégséges stat, amely bmely más elégs. statnak alárendeltje (fve), azaz a fenti rendezés min. eleme.
dom. stat. mezőben mindig létezik min. elégs. stat., és ez ekv. erejéig egyértelmű</td></tr>
<tr><td>áll. (min. elégs)</td><td>T(x) min. elégséges, ha elégséges és minden x,y eleme X: L_theta(x)/L_theta(y) nem függ theta-tól <-> T(x)=T(y)</td></tr>
<tr><td>teljes</td><td>T(x) stat. teljes az elo. theta paraméterére, ha E_theta(g(T))=0, ha minden theta eleme Theta → P_theta^T(g=0)=1 (azaz csak az azonosan 0 fvének lehet 0 a vh. értéke minden theta-ra)</td></tr>
</table>

Exponenciális eloszláscsalád, pontbecslések tulajdonságai	
def.	P_theta eleme exp.eo.családnak, ha p_theta(x)/f_theta(x)=c(theta) exp(sum[1..k](aj(theta)Tj(x))) h(x)
	ahol k a paramétertér dimenziója (dim Theta), c,ai:Theta → R, Tj: X1 → R mérhető fv-ek
t. (elégs. stat.)	exp. eo. családban a T(x)=(sum[1..n]T1(xi),...,sum[1..n]Tk(xi)) elégséges stat.
t. (teljes stat.)	ez teljes is, ha a Theta paramétertér tartalmaz k-dim. téglát.
t. (elégs+teljes → min. elégs)	ha T elégséges és teljes, akkor min. elégs. is.
torzítatlan	T=T(x) torzítatlan becslés pszi(theta) paraméterfv-re, ha E_theta(T)=pszi(theta), theta eleme Theta
asz. torzítatlan	T(xn)=Tn aszimptotikusan torzítatlan pszi(theta)-ra, ha E_theta(Tn) → pszi(theta), ha n → inf minden theta
hatásosság	T1 torzítatlan becslést adó stat. legalább olyan hatásos, mint T2, ha D^2_theta(T1)<=D^2_theta(T2) minden theta eleme Theta
	T1 hatásosabb, mint T2, ha legalább olyan hatásos, és létezik theta0 eleme Theta: D^2_theta0(T1)<D^2_theta0(T2)
	T torzítatlan becslés hatásos pszi(theta)-ra, ha minden más torzítatlan becslésnél hatásosabb.
	hatásos becslés nem mindig létezik, de ha igen, akkor 1 vszgel egyértelmű
konzisztencia	a Tn=T(xn) stat. sorozat (nem felt. torzítatlan):
	1. (gyengén) konzisztens pszi(theta)-ra, ha Tn → pszi(theta) (P_theta), ha n → inf, minden theta eleme Theta (azaz minden epszilon>0 lim_(n → inf) P_theta(|Tn-pszi(theta)|>epszilon)=0
	2. erősen konzisztens, ha Tn → pszi(theta) P_theta-majdnem mindenütt, minden theta eleme Theta (azaz P_theta(lim Tn=pszi(theta))=1)
	3. négyzetes középben konzisztens pszi(theta)-ra, ha E_theta(Tn-pszi(theta))^2 → 0, ha n → inf, minden theta eleme Theta
t. (Rao-Blackwell-Kolmogorov)	legyen S=S(x) torzítatlan becslés pszi(theta)-ra, és T=T(x) elégséges stat. theta-ra. Akkor létezik T-nek olyan U=g(T) fv-e, melyre
	1. U torzítatlan pszi(theta)-ra
	2. U legalább olyan hatásos, mint S
	3. konstrukció: U = E_theta(S|T) (<- blackwellizálás)
köv.	ha T elégséges és teljes (→ min. elégs), akkor U egyértelmű
	ha T elégséges, teljes és torzítatlan pszi(theta)-ra, akkor ő a hatásos becslés
Fischer-információ, Cramér-Dugué-tétel és következményei	
Fischer-információ	Legyen (Omega,A,P) dominált, identifikálható, paraméteres stat. mező. P={P_theta | theta eleme Theta}. Tfh dim(Theta)=1. Legyen x1,...,xn fae minta ~ P_theta. Ekkor az x1,...,xn fae minta Fischer-információja:
	I_n(theta)=E_theta(∂/∂theta ln L_theta(x))^2>=0
1. sz. reg. felt.	ha „bederiválhatunk” theta szerint a sum/int mögé, azaz (D) sum(∂/∂theta p_theta(x))=∂/∂theta sum(p(x)), ill int(∂/∂theta f_theta(x))=∂/∂theta int(f_theta(x)), akkor

	I_1(theta)=D^2_theta(...)
	I_n(theta)=n I_1(theta)
reg. stat. mező	1. 0<I_1(theta)<inf
	2. I_1(theta) folytonos fv-e theta-nak (a tartón)
	3. gyök(p_theta(x)) vagy gyök(f_theta(x)) folytonosan dható theta szerint minden x-re
2. sz. reg. felt.	ha kétszer bederiválhatunk, akkor
	I_n(theta)= - E_theta(∂^2/∂theta^2 ln L_theta(x)).
t. (Cramer-Rao egyenlőtlenség)	legyen (Omega,A,P) dominált, identifikálható, paraméteres stat. mező. P={P_theta | theta eleme Theta}. Legyen x1,...,xn fae minta ~ P_theta
	T(x) legyen torzítatlan becslés a pszi(theta) paraméterfv-re, mely deriválható theta szerint (theta eleme Theta)
	tfh. 1. D^2_theta(T)<inf, 2. regularitási feltételek teljesülnek (bederiválhatunk)
	Ekkor D^2_theta(T)>=[pszi'(theta)]^2/I_n(theta) minden theta eleme Theta
megj.	ha vmi eléri az infohatárt, akkor a hatásos becslés eléri.
t. (Cramer-Dugue)	Legyen (Omega,A,P) dominált, identifikálható, paraméteres stat. mező. P={P_theta | theta eleme Theta}. Legyen x1,...,xn fae minta ~ P_theta*. Tfh a theta* egy nyílt U környezetében:
	1. ∂^i f_theta(x)/∂ theta^i létezik (i=1,2,3) minden theta eleme U, minden x eleme support(f) (<- f tartója)
	2. |∂f_theta(x)/∂theta|<=F1, |∂^2f_theta(x)/∂theta^2|<=F2, |∂^3 lnf_theta(x)/∂theta^3|<=F3(x), ahol F1, F2 integrálható és E_theta*(F3(x)) létezik
	3. I_1(theta)<inf, minden theta eleme U és I_1(theta*)>0
	Akkor teljesülnek a következők: a fenti n-elemű mintához tartozó likelihood-egyenletnek létezik theta"_n gyöke, melyre:
	1. P_theta*(lim_(n → inf) theta"_n = theta*)=1
	2. gyök(n)(theta"_n – theta*) → N(0,1/I_1(theta*)) (mértékben)
	3. a tetszőleges rendű momentumok is tartanak N(...) megfelelő momentumaihoz.
köv.	1. theta"_n erősen konzisztens theta*-ra
	2. theta"_n asz. torzítatlan és hatásos theta*-ra
	3. ML-becslés asz. megközelíti az infohatárt
Momentumbecslés, Bayes-becslés	
momentumbecslés	x1,...,xn ~ P_theta fae, dim(Theta)=k. Becsülendő: theta eleme R^k. Tfh a P_theta eloszlás első k momentuma létezik: mj=E(x^j)=hj(theta1,...,thetak), j=1..k. Tehát (theta1,...,thetak) → (h) → (m1,...,mk), h=(h1,...,hk)
	Tfh. hogy ez invertálható (|J|!=0) → létezik g:R^k → R^k olyan, hogy theta_l = g_l(m1,...,mk).
	theta momentumbecslése theta", ha theta"_l=gl(m1",...,mk"), ahol mj"=1/n sum(xi^j) (empirikus momentumok)
Bayes-becslés alapfeladat	tfh. theta v.v. q(t) sűrűség/súly-/fvnyel, t eleme Theta. Ez eleve adott. (theta a priori eloszlása)
	x1,...,xn ~ P_t fae, x eleme R^n a realizáció
	L_t(x)=X sűrűsége az x helyen a theta = t feltétel mellett.
	theta feltételes eloszlása (sűrűsége) az X=x feltétel mellett:
felt. eloszlás	q(t|x)=L_t(x)q(t)/int[t eleme Theta](L_t(x)q(t)dt) (normálótényező) <- aposteriori eloszlás
felt. vh.érték	theta felt. vh. értéke X=x feltétel mellett: E(theta|X=x)=int(tq(t|x)dx) = int(t L_t(x) q(t) dt)/int(L_t(x) q(t) dt) = T(X)

Bayes-becslés	theta Bayes-becslése az X minta alapján: E(theta|X)=T(x) statisztika (elégséges)
	pszi(theta) Bayes-becslése az X minta alapján: E(pszi(theta)|X)=int(pszi(t)q(t|x)dt)
áll.	E(theta – f(x))^2>=E(theta – E(theta|X))^2, minden f, azaz a Bayes-becslés rizikó értelemben optimális

MATEMATIKUS BSC ZÁRÓVIZSGA TÉTELSOROK -- 2009

(A) ALGEBRA, DISZKRÉT MATEMATIKA, GEOMETRIA TÉTELSOR

Algebra I

A-1 A csoport fogalma (részcsoportok, normálosztók, izomorfizmustételek)

Csoport (7)
Részcsoport (9)
Normálosztó (8) + 7
Kongruencia (10)

A-2 Nevezetes részcsoportok, permutáció-csoportok

Részcsoport (9)
Normállánc (10)
Permutációcsoportok (11)
Centrum, centralizátor, normalizátor (10)

A-3 Abel csoportok és szabad csoportok

Direkt szorzat (4)
Abel-csoport (5)
Szabad csoportok (5)
Csoport megadása definiáló relációval (4)

A-4 p-csoportok, Sylow-tételkör

Sylow-tételek (7)

A-5 Polinomgyűrű, F[x] és Z ideáljai és faktorai

Gyűrűk (3)
Részgyűrű, ideál, faktorgyűrű, karakterisztika (7)
Polinomok (7)
Irreducibilis polinomok (3)
Polinomok felbontása (9)
Többváltozós polinomok (4)
Egyértelmű prímfaktorizáció (8)
Polinomgyűrű ideáljai (8)

A-6 A testelmélet alapjai

Test fogalma (4)
Ideálok testben (4)
Izomorfizmus, homomorfizmus (5)
Karakterisztika (3)
Beágyazási tételek (5)
Véges testek (7)

Diszkrét matematika és algoritmusok

A-7 Adatrendezési módszerek

Rendezés (4)
Buborék-rendezés (4)
Beszúrásos rendezés (4)
Összefésülés (6)
Kupacos rendezés (7)
Gyorsrendezés (2)
Kulcsmanipulációs rendezés (5)

A-8 A keresés alapvető módszerei, adatszerkezetei

Keresés (8)
Bináris keresőfa (8)
Piros-fekete fa (5)
2-3 fa (3)

B-fa (5)
Hash (5)

A-9 Legrövidebb utak gráfokban

Gráfok megadása (5)
Legrövidebb utak gráfokban (6)
Gráfalgoritmusok (3)
Körmentesség, DAG (9)
Erősen összefüggő komponensek (4)

A-10 Minimális súlyú feszítőfák keresése gráfokban, maximális méretű párosítások keresése páros gráfokban

Piros-kék algo (6)
Konkrét alkalmazások (10)
Gráfalgoritmusok (3)

A-11 Az NP fogalma, nevezetes NP-beli feladatok

P, NP fogalma (9)
Karp-redukció (3)

A-12 NP-teljesség

P, NP fogalma (9)
Karp-redukció (3)
NP-teljesség (4)

A-13 Algoritmus-tervezési módszerek

Alapok (2) + 2
Elágazás és korlátozás (2)
Dinamikus programozás (3)
Lineáris programozás (4)
Közelítő algoritmusok (9)

Geometria

A-14 A geometria axiomatikus felépítése, az axiómacsoportok szerepe, alapvető példák és érdekes konstrukciók.

I. Illeszkedési axiómák (5)
II. Rendezési axiómák (10)
III. Egybevágósági axiómák (8)
IV. Folytonossági axiómák (4)
Abszolút tételek (10)
V. Párhuzamossági axióma. Hiperbolikus geometria (13)

A-15 3-dimenziós abszolút geometria

Térelemek kölcsönös helyzete (3)
Merőlegesség (6)
Térelemek hajlásszöge (3)
Térelemek távolsága (2)
Síkbeli egybevágóságok (5)
Térbeli egybevágóság (5)

A-16 n-dimenziós euklideszi tér

n-dimenziós euklideszi tér (7)
Topologikus terek (10)

A-17 Kollineációk és lineáris transzformációk

Vektorok, dimenzió (0) + 11
Koordinátázás (0) + 7
Vektoriális szorzás, terület, térfogat, többtényezős szorzatok (0) + 9
E^3 analitikus geometriája (5)
Lineáris leképezések mátrixa (6)
O-pont modell (9)

A-18 Másodrendű görbék és felületek

Kúpszeletek (5)
Alapábrák (9)
Affinitások (8)

A-19 Konvex poliéderek

Euler-tétel (10)
Szabályos poliéderek (6)
n-dimenziós poliéderek (6)

A-20 Projektív geometria

Projektív sík (5)
Leképezések (8)

(B) ANALÍZIS, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA, OPERÁCIÓKUTATÁS, FOLYTONOS MATEMATIKA TÉTELSOR

Analízis

B-1 Határérték, folytonosság, differenciálhatóság egy- és többváltozós valós függvényekre. Abszolút folytonos függvények.

Egyváltozós függvények határértéke, folytonossága (12)
Egyváltozós függvények deriválása (12)
Többváltozós függvények határértéke, folytonossága (5)
Többváltozós függvények deriválása (9)
Abszolút folytonos függvények (2)

B-2 Metrikus terek topológiája.

Metrikus tér (10)

Kompaktság (7)
Norma (7)

B-3 Felcserélési tételek az analízisben (deriválás-integrálás-konvergencia, minden párosításban).

Függvénysorok, egyenletes konvergencia (8)
Felcserélési tételek (5)
Mérték és integrál (12)
Felcserélési tételek (6)

B-4 Fourier-sorok egyenletes és négyzetes konvergenciája, Parseval formula.

Fourier-sorfejtés (7)
Elégséges feltételek a konvergenciára (7)
Komplex alak, tagonkénti műveletek, Parseval-formula (9)

B-5 Függvények Taylor-sorfejtése valós illetve egy komplex változóban. Laurent-sorok.

Hatványsorok (7)
Taylor-sor (9)
Többváltozós Taylor-polinomok (0) + 2
Komplex hatványsor (4)
Laurent-sor (13)

B-6 Gradiens, divergencia, rotáció, Jacobi-determináns és a vonatkozó integráltranszformációs tételek.

Gradiens, többváltozós fv-ek integrálása (2+7)
Vektormező (7+5+4)
Integráltranszformációs tételek (6)

B-7 Komplex függvények deriválása és vonalintegrálja, kapcsolatok a valós kétváltozós analízissel.

Komplex fv-ek deriválása (9)

Komplex vonalintegrál (8)
Reguláris függvények (6)

Numerikus módszerek és differenciálegyenletek

B-8 Mátrixok felbontásai szorzat alakban (LU, Cholesky, QR) és felhasználásuk a numerikus lineáris algebrában.

Gauss-módszer (5)
LU-felbontás, Cholesky-felbontás, alkalmazásuk (6)
QR-felbontás, túlhatározott rendszerek (4)
Sajátértékfeladat, QR-iteráció (4)

B-9 Interpoláció polinommal, trigonometrikus polinommal, spline függvénnyel.

Interpolációs polinom Lagrange- és Newton-féle alakja (8)
Interpolációs hiba, Csebisev polinomok (7)
Hermite- és Spline-interpoláció (8)
Trigonometrikus interpoláció (7)

B-10 Közönséges differenciálegyenlet kezdetiérték-feladatának korrekt kitűzöttsége, diszkretizációs közelítő módszerei (explicit Euler, implicit Euler, negyedrendű explicit Runge-Kutta).

Kezdetiérték feladatok (4)
Euler-módszer, Θ-módszer, konvergencia (10) + 2
Runge-Kutta módszer (4)

B-11 Síkbeli autonóm közönséges differenciálegyenletek fázisportréja az egyensúlyi helyzetek környezetében.

Autonóm diffegyenletek (10)
Határhalmaz (4)

B-12 Stabilitás, aszimptotikus stabilitás, Ljapunov-függvények.

Stabilitás, aszimptotikus stabilitás (7)
Ljapunov-függvény (4)

Operációkutatás

B-13 A lineáris programozás szimplex módszere.

A lineáris programozás alapfeladata (12)
Szimplex-módszer (6)
2-fázisú Szimplex-módszer (4)
Dualitás (5)

B-14 Nemlineáris programozás (az optimalitás szükséges feltétele, konvex programozás).

Általános feladat, konvex programozás (9)
Lagrange-féle multiplikátoros módszer (7)
Karush-Kuhn-Tucker optimalitási feltételek (6)

Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

B-15 Együttes és feltételes eloszlás. Várható érték vektor, kovariancia mátrix. A több-dimenziós normális eloszlás.

Diszkrét v.v. (7)
Folytonos v.v. (10)
Több-dimenziós normális eloszlás (5)

B-16 Valószínűségszámítási egyenlőtlenségek és alkalmazásaik. Nagy számok gyenge törvénye.

Markov- és Csebisev-egyenlőtlenség és alkalmazásuk (3)
Nagy számok gyenge törvénye és alkalmazásuk (4)

B-17 Stirling-formula, DeMoivre-Laplace-tétel és alkalmazásaik.

Stirling-formula és alkalmazása (3)
DeMoivre-Laplace-tétel és alkalmazása (6)

B-18 Karakterisztikus függvények, tulajdonságaik és alkalmazásaik.

Karakterisztikus fv-ek, általános tul. (5)
Sorbafejthetőség, folytonosság, inverziós formula (4)
Alkalmazás (2)

B-19 Statisztikai próbák általános elmélete. Egyenletesen legerősebb próbák, Neyman-Pearson-alaptétel és kiterjesztése összetett hipotézisek vizsgálatára.

Hipotézivizsgálat általánosan (9)
Neyman-Pearson-alaptétel és kiterjesztései (7)

B-20 Pontbecslési módszerek (momentumok, maximum likelihood, Bayes). A maximum likelihood becslés aszimptotikus viselkedése, Cramér-Dugué-tétel és következményei.

Likelihood-alapú becslések, elégségesség (9)
Exponenciális eloszláscsalád, pontbecslések tulajdonságai (10)
Fischer-információ, Cramér-Dugué-tétel és következményei (8)
Momentumbecslés, Bayes-becslés (6)

MATEMATIKUS BSC ZÁRÓVIZSGA TÉTELSOROK -- 2009

(A) ALGEBRA, DISZKRÉT MATEMATIKA, GEOMETRIA TÉTELSOR

Algebra I

A-1 A csoport fogalma (részcsoportok, normálosztók, izomorfizmustételek) (4)
A-2 Nevezetes részcsoportok, permutáció-csoportok (4)
A-3 Abel csoportok és szabad csoportok (4)
A-4 p-csoportok, Sylow-tételkör (1)
A-5 Polinomgyűrű, F[x] és Z ideáljai és faktorai (8)
A-6 A testelmélet alapjai (6)

Diszkrét matematika és algoritmusok

A-7 Adatrendezési módszerek (7)
A-8 A keresés alapvető módszerei, adatszerkezetei (6)
A-9 Legrövidebb utak gráfokban (5)
A-10 Minimális súlyú feszítőfák keresése gráfokban, maximális méretű párosítások keresése páros gráfokban (3)
A-11 Az NP fogalma, nevezetes NP-beli feladatok (2)
A-12 NP-teljesség (3)
A-13 Algoritmus-tervezési módszerek (5)

Geometria

A-14 A geometria axiomatikus felépítése, az axiómacsoportok szerepe, alapvető példák és érdekes konstrukciók. (6)
A-15 3-dimenziós abszolút geometria (6)
A-16 n-dimenziós euklideszi tér (2)
A-17 Kollineációk és lineáris transzformációk (3) + 3
A-18 Másodrendű görbék és felületek (3)

A-19 Konvex poliéderek (3)
A-20 Projektív geometria (2)

(B) ANALÍZIS, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA, OPERÁCIÓKUTATÁS, FOLYTONOS MATEMATIKA TÉTELSOR

Analízis

B-1 Határérték, folytonosság, differenciálhatóság egy- és többváltozós valós függvényekre. Abszolút folytonos függvények. (5)
B-2 Metrikus terek topológiája. (3)
B-3 Felcserélési tételek az analízisben (deriválás-integrálás-konvergencia, minden párosításban). (4)
B-4 Fourier-sorok egyenletes és négyzetes konvergenciája, Parseval formula. (3)
B-5 Függvények Taylor-sorfejtése valós illetve egy komplex változóban. Laurent-sorok. (4) + 1
B-6 Gradiens, divergencia, rotáció, Jacobi-determináns és a vonatkozó integráltranszformációs tételek. (3)
B-7 Komplex függvények deriválása és vonalintegrálja, kapcsolatok a valós kétváltozós analízissel. (3)

Numerikus módszerek és differenciálegyenletek

B-8 Mátrixok felbontásai szorzat alakban (LU, Cholesky, QR) és felhasználásuk a numerikus lineáris algebrában. (4)
B-9 Interpoláció polinommal, trigonometrikus polinommal, spline függvénnyel. (4)
B-10 Közönséges differenciálegyenlet kezdetiérték-feladatának korrekt kitűzöttsége, diszkretizációs közelítő módszerei (explicit Euler, implicit Euler, negyedrendű explicit Runge-Kutta). (3)
B-11 Síkbeli autonóm közönséges differenciálegyenletek fázisportréja az egyensúlyi helyzetek környezetében. (2)
B-12 Stabilitás, aszimptotikus stabilitás, Ljapunov-függvények. (2)

Operációkutatás

B-13 A lineáris programozás szimplex módszere. (4)
B-14 Nemlineáris programozás (az optimalitás szükséges feltétele, konvex programozás). (3)

Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

B-15 Együttes és feltételes eloszlás. Várható érték vektor, kovariancia mátrix. A több-dimenziós normális eloszlás. (3)
B-17 Stirling-formula, DeMoivre-Laplace-tétel és alkalmazásaik. (2)

B-18 Karakterisztikus függvények, tulajdonságaik és alkalmazásaik. (3)

B-19 Statisztikai próbák általános elmélete. Egyenletesen legerősebb próbák, Neyman-Pearson-alaptétel és kiterjesztése összetett hipotézisek vizsgálatára. (2)
B-20 Pontbecslési módszerek (momentumok, maximum likelihood, Bayes). A maximum likelihood becslés aszimptotikus viselkedése, Cramér-Dugué-tétel és következményei. (4)