Valószínűségszámítás és statisztika - Extra pontért beadható feladatok
2019/2020 tavasz

Minden feladat helyes megoldása 2 pontot ér, részmegoldásért 1 pont kapható. A megszerezhető extra pontok maximális száma 10. Fontos: nem elég csupán a megoldást közölni, a pontszerzéshez részletes levezetés/indoklás és szöveges válasz szükséges!

A megoldásokat papíralapon, kézzel írott formában lehet beadni tantermi gyakorlatokon, a beadási határidőig.

1. a) Van 10 egyforma dobókockánk, melyből kettő hamis. Az egyik hamis kockával 90% eséllyel dobunk 6-ost, és 2-2% eséllyel bármely más számot, míg a másikkal 90% eséllyel dobunk 1-est, és 2-2% eséllyel bármely más számot. Véletlenszerűen kiválasztunk két kockát és egyszerre dobunk velük. Eredményül egy 1-est és egy 6-ost kapunk.

b) Mekkora a valószínűsége ezen feltétel mellett, hogy a két hamis kockával dobtunk?

c) Mekkora a valószínűsége ugyanezen feltétel mellett, hogy mindkét kocka szabályos volt?

2. 32 lapos magyar kártyából *visszatevés nélkül* húzunk 3 lapot. Legyen az X valószínűségi változó értéke a húzott piros lapok száma, ha a húzott lapok között van ász, és 0, ha a húzott lapok között nincs ász. Például ha piros 10-est, piros alsót és zöld 9-est húztunk, akkor $X = 0$, de ha piros 10-est, piros alsót és zöld ászt vagy piros 10-est, piros ászt és zöld 9-est húztunk, akkor $X = 2$. Határozzuk meg X várható értékét és szórását! (A 32 lapos magyar kártyapakliban 8 piros lap, 4 ász és ezek között egy piros ász van.)

3. Egy ipari fúrógép fúrófejének élettartama jól közelíthető egy 10 óra várható értékű és 2 óra szórású valószínűségi változóval. Legalább hány fúrófej kell ahhoz, hogy a gépet legalább 95%-os valószínűséggel 400 óráig működtetni tudjuk? (Feltehető, hogy az egyes fúrófejek élettartama egymástól független.) (Segítség: használjuk a centrális határeloszlás tételt!)

4. Az X valószínűségi változó Borel eloszlású $\mu \in [0, 1]$ paraméterrel ($X \sim Borel(\mu)$), ha $P(X = k) = \frac{e^{-\mu k}(\mu k)^{k-1}}{k!}$, ahol $k = 1, 2, 3, \ldots$. Adjunk ML-becslést a független, azonos $Borel(\mu)$ eloszlású $X_1, X_2, \ldots, X_n$ minta μ paraméterére! (Az egyszerűég kedvéért feltehetjük, hogy $\mu > 0$ és létezik i, amelyre $X_i > 1$).

5. a) Megmértük 6 véletlenszerűen kiválasztott felnőtt férfi testmagasságát és a következő értékeket kaptuk: 171,33 cm; 185,8 cm; 170,06 cm; 165,25 cm; 170,97 cm; 188,65 cm. Feltételezve, hogy a felnőtt férfiak testmagassága $\sigma = 7{,}13\,\mathrm{cm}$ szórású normális eloszlást követ, adjunk 95%-os szintű konfidenciaintervallumot a testmagasság μ várható értékére!

b) Teszteljük most a "$H_0 : \mu > 178\,\mathrm{cm}$" nullhipotézist a szórásra vonatkozó előzetes információ felhasználása *nélkül*, $\alpha' = 0{,}1$ terjedelem mellett!

Standard normális eloszlás táblázat: `http://kovacsam.web.elte.hu/stdnormelo`

Student (t) eloszlás táblázat: `http://web.cs.elte.hu/~mrobert/segedanyagok/Valszam/Student-eloszlas-tablazata-1.pdf`