Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév
Dr. Szász Domokos
10. feladatsor
Markov láncok

10.1. Milyen paraméterértékekre pozitív rekurrens

(a) az $M/M/k$ rendszer?

(b) az $M/M/\infty$ rendszer?

10.2. Legyen X_t folytonos idejű születési/halálozási folyamat, melynek születési rátái $\lambda_n = 1 + (n+1)^{-1}$, halálozási rátái $\mu_n = 1$. Tranziens-, null rekurrens- vagy pozitív rekurrens-e ez a folyamat? És ha $\lambda_n = 1 - (n+2)^{-1}$?

10.3. Az $X_t \in \mathrm{N}$ Markov folyamat egy populáció méretének időbeli fejlődését modellezi. A populáció minden egyes egyede a többiektől függetlenül λ rátával szül egy új egyedet és μ rátával elhal. Azaz: X_t születési/halálozási folyamat, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda$, halálozási rátái $\mu_n = n\mu$.

(a) Mely λ és μ paraméter értékek mellett hal ki egy valószínűséggel a populáció?

(b) Legyen $f : \mathrm{N} \to \mathbb{R}$. Lássa be, hogy

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\mathbf{E}\big(f(X_{t+h})-f(X_t) \mid X_t = k\big) = \big(f(k+1)-f(k)\big)\cdot k\cdot\lambda+\big(f(k-1)-f(k)\big)\cdot k\cdot\mu$$

(c) Legyen $\mu = \lambda = 1$, legyen $X_0 = 1$. Lássa be, hogy ha $G(t,z) := \mathbf{E}(z^{X_t})$, akkor $G(t,z)$ megoldja az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\partial_t G(t,z) = (z-1)^2 \partial_z G(t,z)$$

Segítség: alkalmazza az előző részfeladat gondolatmenetét az $f(x) = z^x$ függvényre.

(d) Oldja meg az egyenletet a $G(0,z) = z$ kezdeti feltétellel. Segítség: ha $\dot{z}(t) = -\left(z(t)-1\right)^2$, akkor $\frac{d}{dt}G(t,z(t)) = 0$. Ennek segítségével lássa be, hogy $X_0, X_1, X_2, \ldots$ kritikus Galton-Watson-féle elágazó folyamat, melynek utódeloszlása $GEO(\frac{1}{2})$!

10.4. Módosítsuk az előbbi populáció modellt úgy, hogy a populáció egyedeinek születése és elhalása mellett ν rátával egy bevándorló érkezik kívülről. Így olyan születési/halálozási folyamatot kapunk, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda+\nu$, halálozási rátái pedig változatlanul $\mu_n = n\mu$. Mely λ, μ, ν paraméter értékek mellett lesz a folyamat tranziens, null rekurrens, illetve pozitív rekurrens?

10.5. Tekintsünk egy születési/halálozási folyamatot, melynek születési rátái $\lambda_n = 1/(n+1)$, halálozási rátái pedig $\mu_n = 1$. Mutassuk meg, hogy a folyamat pozitív rekurrens és találjuk meg a stacionárius (invariáns) eloszlását.

10.6. Egy parkolóhelyen N autó számára van férőhely. Tegyük fel, hogy az egyes autók parkolási ideje egymástól független μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A parkolni szándékozó autók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot, mely

független a parkolási időktől. Jelölje P_n a következő valószínűséget a *stacionárius állapotban*:
(1) ha $0 \le n \le N$, $P_n = \mathbf{P}$(a parkolóhelyen n autó parkol),
(2) ha $n > N$, $P_n = \mathbf{P}$(a parkolóhely tele van és további $n-N$ autó várakozik a bejutásra).
Határozzuk meg a P_n, $n \ge 0$ valószínűségeket a következő három esetben:
(a) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, addig várakozik, amíg hely nem ürül.
(b) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, azonnal távozik.
(c) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, maximum egy véletlen — ν paraméterű exponenciális eloszlású — ideig várakozik. Ha addig nem jut be a parkolóhelyre, távozik.

10.7. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók, melyeknek van várható értékük és $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

(Azaz: S_n bolyongás $\mathbb{Z}$-n, melynek egymásutáni lépései $X_1, X_2, \dots$.) Legyen továbbá

$$G_n(x) := \mathbf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n} 1\!\!1_{\{S_j = x\}}\Big),$$

a $[0, n]$ időintervallumban az x rácsponton töltött részidő várható értéke. (E függvényt a bolyongás Green-függvényének nevezzük.)
(a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$G_n(0) \ge G_n(x).$$

Útmutatás: Tekintsük az x rácspont első elérésének idejét.
(b) Emlékezzünk a Nagy Számok Gyenge Törvényére: bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(|S_n| < \varepsilon n\Big) = 1.$$

Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy rögzített $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|x|<\varepsilon n} G_n(x) = 1.$$

(c) Az (a) és (b) pontok eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = \infty.$$

(d) A fentiek alapján lássuk be, hogy az S_n Markov lánc rekurrens.
(e) Alkalmazható-e a fenti okoskodás magasabb dimenziós bolyongásra?

10.8. Legyen $\big(p_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n, melyről feltesszük, hogy

$$p_1 > 0, \qquad p_k = 0, \quad \text{ha } k > 1$$

és várható értéke negatív:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} kp_k =: \mu < 0.$$

Értelmezzük az X_n Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P_{i,j} = \begin{cases} p_{j-i} & \text{ha } j > 0, \\ \sum_{k \le 0} p_{k-i} & \text{ha } j = 0. \end{cases}$$

Más szóval: X_n bolyongás, melynek lépés eloszlása $\left(p_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, de nem léphet a negatív félegyenesre. Feladatunk célja bebizonyítani, hogy az X_n bolyongás pozitív rekurrens.
(a) Tegyük fel, hogy $\pi(j)$, $j \in S$, egy invariáns eloszlás. Bizonyítsuk be, hogy minden $i > 0$-ra

$$\pi(i) = \sum_{j=i-1}^{\infty} \pi(j) p_{i-j}.$$

(b) Legyen $q_k = p_{1-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k.$$

egyenletnek létezik egy és csakis egy $s^* \in (0, 1)$ megoldása.
Útmutatás: $\left(q_k\right)_{k=0}^{\infty}$ olyan valószínűségi eloszlás $\mathbb{N}$-en, melynek várható értéke 1-nél nagyobb. A fenti egyenlet jobb oldalán ennek az eloszlásnak a generátorfüggvénye szerepel.
(c) A (b) pont beli s^* érték felhasználásával határozzuk meg az X_n Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.

10.9. Egy boltba λ -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek a vásárlók. A boltban egyetlen eladó dolgozik. Egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama μ-paraméterű exponenciális eloszlást követ, $\mu > \lambda$. Sok idő eltelte után betoppanok én és beállok a sorba. Mi az eloszlása annak az időtartamnak, amit a boltban töltök? *Útmutatás:* Használja a 9.9 feladat eredményét.

10.10. *A Yule-folyamat*

Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba $EXP(1)$ idő elteltével kettéosztódik, és lesz belőle két ugyanolyan amőba, mint az eredeti. Lássa be, hogy a t időpontban a petricsészében lévő amőbák $X(t)$ száma $GEO(e^{-t})$ eloszlású (az a fajta geometriai, amikor nemcsak a kudarcokat számoljuk, hanem beleszámítjuk a sikeres próbálkozást is).

(a) Először lássa be oly módon, hogy felírja az $X(t)$ folyamat infinitezimális generátorát, és leellenőrzi, hogy az amőbák eloszlásának időbeli fejlődésére felírható differenciálegyenletrendszert és a $\mu_k(0) = \delta_{k,1}$ kezdeti feltételt valóban kielégítik a $\mu_k(t) = (1-e^{-t})^{k-1}e^{-t}$ függvények.

(b) Majd annak a felhasználásával, hogy ha $U_1, \dots, U_n$ független és $EXP(1)$ eloszlású valószínűségi változók, akkor $\max\{U_1, \dots, U_n\}$ ugyanolyan eloszlású, mint a $V_1 + \dots + V_n$ független összeg, ahol $V_i \sim EXP(i)$.

Útkereszteződések

A következő feladatokban egy útkereszteződés járműforgalmának egy lehetséges matematikai modelljéről lesz szó. A főútvonalon egymást követő járművek elhaladásának időpontjait Poisson folyamattal modellezzük. A főútvonalon mozgó járműveknek a kereszteződésen való áthaladása ebben az egyszerűsített modellben nem vesz időt igénybe. A mellékútvonalon érkező és a főútvonalat keresztezni akaró jármű áthaladása pozitív időt vesz igénybe, ezért neki addig kell várakoznia, míg a főútvonalon érkező járművek között megfelelő hosszú szabad intervallum nincsen. A főútvonal belátható.

10.11. A főútvonalon egyirányú a forgalom és a járművek elhaladása λ paraméterű Poisson folyamat. A keresztező mellékútvonalon az áthaladás a időt vesz igénybe. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autós k járműnek kell elsőbbséget adjon, mielőtt áthaladhat a kereszteződésen?

10.12. A fenti paraméterek függvényében határozzuk meg azon autók számának várható értékét és szórását, melyeket a mellékútvonalon várakozó autósnak el kell engednie, mielőtt áthaladhat.

10.13. Legyen számszerűen 10 másodperc az mellékútvonalon áthaladás ideje és 5 másodperc a főútvonalon egymásután érkező autók közötti idő várható értéke.
(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autósnak *legfeljebb* 2 főútvonalon érkezőnek kell elsőbbséget adnia?
(b) Mennyi a megvárandó autók számának várható értéke és szórása?

10.14. Tegyük fel, hogy a főútvonalon kétirányú forgalom van: mindkét irányból λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a járművek. A mellékútvonalon érkező autósnak $2a$ időre van szüksége az áthaladáshoz. Válaszoljuk meg ilyen körülmények között az előbbi feladatokban feltett kérdéseket.

10.15. A főútvonalon kétirányú a forgalom: mindkét irányból λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a járművek. A mellékútvonalon áthaladó járműnek mindkét sávon való áthaladásra (egyenként) a időre van szüksége. Ám most a két sáv között elég széles járdasziget van, ahhoz, hogy a mellékútvonalon közlekedő áthaladó jármű a két sáv között megállhasson: először csak a balról érkező járműveknek kell elsőbbséget adnia, míg megfelelő rést nem kap, majd a jobbról érkezőknek ad elsőbbséget. Határozzuk meg a teljes várakozási idő várható értékét és szórását. Hasonlítsuk össze az eredményt az előző feladatéval.