Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév
Dr. Szász Domokos
12. feladatsor
Felújítási folyamatok II

12.1. *(A felújítási függvény korlátossága)* Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos eloszlású nemnegatív és nem nullára koncentrált valószínűségi változók. (Azaz: feltesszük, hogy $1 = \mathbf{P}(X_i \geq 0) \geq \mathbf{P}(X_i > 0) > 0$.) Legyen $T(n) := \sum_{i=1}^n X_i$ és $N(t) := \max\{n : T_n \leq t\}$.

Bizonyítsa be, hogy bármely $t \geq 0$-ra $U(t) = \mathbf{E}(N(t))$ korlátos:

(a) Lássa be, hogy $\mathbf{E}(e^{-X_i}) < 1$.

(b) Bizonyítsa, hogy a következő végtelen összeg konvergens: $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^n X_i < t\Big) < \infty$.

12.2. Igazoljuk, hogy
$$\frac{t}{\mathbb{E}(X_j \wedge t)} \leq U(t) \leq \frac{2t}{\mathbb{E}(X_j \wedge t)}$$

12.3. Tekintsük a következő Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren. Adottak a $p_1, p_2, \dots$ pozitív számok melyek összege 1: $\sum_{j=1}^\infty p_j = 1$. Ha a Markov lánc a 0 állapotba ér, a $\big(p_j\big)_{j=1}^\infty$ eloszlás szerint választja ki következő állapotát. Ha valamely $j > 0$ állapotban van, akkor determinisztikus módon a $j-1$ állapotba lép.

(a) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát. Irreducibilis és aperiodikus-e a Markov lánc?

(b) A Markov lánc nyilvánvaló módon rekurrens. (Miért?) Milyen feltételnek kell a $\big(p_j\big)_{j=1}^\infty$ eloszlásnak eleget tennie ahhoz, hogy a Markov lánc pozitív rekurrens legyen? Segítség: Számoljuk ki a 0-ba való első visszatérés idejének várható értékét.

(c) A pozitív rekurrens esetben számítsa ki a stacionárius eloszlást.
Megjegyzés: Vessük össze az eredményt a 11.3. feladattal. A β_n "hátralévő idő" stacionárius eloszlását számítottuk ki.

12.4. Tekintsünk egy M/G/1 rendszert, amelyben az igények λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek és elvesznek, ha érkezésükkor a kiszolgáló foglalt. Mutassuk meg

(a) azok az időpontok, amikor az igények üres rendszerbe érkeznek, felújítási folyamatot alkotnak. Határozzuk meg ennek átlagos sűsűségét, ha μ a G kiszolgálási idő várható értéke;

(b) Mennyi a kiszolgálást nyerő igények aszimptotikus hányada?

12.5. Igazoljuk, hogy a $\phi(t) = U(t) - \frac{t}{\mu}$ függvény eleget tesz a $\phi = h + \phi * F$ felújítási egyenletnek, ahol $h(t) = \int_t^\infty (1 - F(s))ds$.

12.6. Legyenek $Z_n = \sum_{j=1}^n T_j : n \geq 0$ egy felújítási folyamat pontjai, $\mathbb{E}T_j < \infty$. Legyen továbbá $A_t = t - Z_{N_t}$, $B_t = T_{N_t+1} - t$. Mutassuk meg, hogy
$$\mathbb{P}(A_t > x, B_t > y) \to \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^\infty (1 - F(s))ds$$

12.7. Legyenek $X_1, X_2, \dots > 0$ FAE és $Y_1, Y_2, \dots > 0$ FAE valószínűségi változók F_1 ill. F_2 eloszlásfüggvényekkel. Jelölje továbbá $T_0 = 0$ és $k \geq 1$-re $S_k = T_{k-1} + X_k$, $T_k = S_k + Y_k$. (Másszóval egy gép működik X_j ideig, lerobban és akkor Y_j ideig javítják.) Jelölje $F = F_1 * F_2$ és legyen $H(t)$ annak valószínűsége, hogy a gép dolgozik t időpontban. Igazoljuk, hogy ha F nem-rácsos, akkor $t \to \infty$ esetén

$$H(t) \to \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2},$$

ahol μ_i az F_i várható értéke.

12.8. Tegyük fel, hogy a felújítási folyamatban a közök eloszlásai

$$\mathbb{P}(T_i = 1) = \frac{9}{10}, \qquad P(T_i = 10\pi) = \frac{1}{10}$$

(a) Mi a t-ben éppen folyó kiszolgálás hosszának aszimptotikus eloszlása?

(b) Mi a hátralevő kiszolgálás hosszának aszimptotikus várható értéke? Hasonlítsuk össze $\mathbb{E}T_j$-vel.

12.9. *(CHT felújítási folyamatokra)* Legyenek $\tau_1, \tau_2, \dots$ egymásutáni események közötti független és azonos eloszlású várakozási idők, melyeknek várható értéke $\mathbf{E}(\tau_i) = m \in (0, \infty)$ és szórásnégyzete $\mathbf{Var}(\tau_i) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Legyen $\nu_t := \max\{n : \sum_{i=1}^n \tau_i < t\}$ a $[0, t)$ időintervallumban bekövetkezett események száma. A CHT felhasználásánal bizonyítandó a következő határeloszlás tétel:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_t - \frac{t}{m}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{m^3}}} < x\right) = \Phi(x).$$

ahol Φ az $N(0,1)$ eloszlás eloszlásfüggvénye.