Sztochasztikus folyamatok. 2008/2009 2. félév
Dr. Szász Domokos
3. feladatsor
Martingálok. II.

3.1. Legyen $X_0, X_1, X_2, \dots$ Markov lánc az S véges állapottéren, jelöljük P-vel az átmenetmátrixát. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a sztochasztikus folyamat által generált természetes filtráció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Mutassa meg (a 2.4 és 1.7 feladatok segítségével), hogy az alább definiált M_n martingál erre a filtrációra nézve.

$$M_n = f(X_n) + \sum_{k=1}^{n-1} ((I-P)f)(X_k) - (Pf)(X_0)$$

3.2. Legyen $X_0, X_1, X_2, \dots$ irreducibilis, aperiodikus, stacionárius Markov lánc az S véges állapottéren, jelöljük P-vel az átmenetmátrixát, π-vel a stacionárius eloszlását. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a sztochasztikus folyamat által generált természetes filtráció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Tegyük föl, hogy $\langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi = 0$. Lássa be, hogy van olyan $g : S \to \mathbb{R}$, hogy $\langle \mathbb{1}, g\rangle_\pi = 0$ és $g - Pg = f$. A 3.1. és 2.7 feladatok segítségével lássa be a Green-Kubo-formulát, azaz a következő két egyenlőséget:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{Var}\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{\sqrt{N}}\right) = \langle g, g\rangle_\pi - \langle Pg, Pg\rangle_\pi = 2\langle f, (I-P)^{-1} f\rangle_\pi - \langle f, f\rangle_\pi$$

Segítség: Bizonyítás közben jól jön a szórás-háromszög-egyenlőtlenég, és a belőle levezethető

$$|\mathbf{D}(X) - \mathbf{D}(Y)| \le \mathbf{D}(X - Y)$$

3.3. m (1-től m -ig számozott) golyót helyezünk el k (1-től k-ig számozott) urnában. Diszkrét időegységenként véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztunk egy golyót, kiemeljük a helyéről és áthelyezzük egy másik urnába, melyet véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választunk ki. Legyen X_n az első urnában lévő golyók száma az n-edik lépés után és $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$
(a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$-et.
(b) Értelmezzünk Z_n valószínűségi változókat, melyek martingált alkotnak $\mathcal{F}_n$-re nézve.

3.4. *A Pólya féle urna modell*

Egy urnában piros és kék golyók vannak. Kezdetben egy-egy mindkét színből. Minden egyes $n \in \mathrm{N}$ diszkrét időpontban kihúzunk egy véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztott golyót az urnából, majd visszatesszük a kihúzottat és még egy ezzel azonos színű golyót is beteszünk az urnába. Így az n-edik menet után $n+2$ golyó lesz az urnában. Jelöljük ρ_n-nel, illetve β_n-nel az első n húzás során kihúzott piros, illetve kék golyók számát. ($\rho_0 = \beta_0 = 0$ és $\rho_n + \beta_n = n$. Az n-edik húzás után $\rho_n + 1$, illetve $\beta_n + 1$ piros, illetve kék golyó van az urnában.) A folyamat természetes filtrációja $\mathcal{F}_n$. Legyen $M_n := (\beta_n + 1)/(n + 2)$ az urnában lévő kék golyók aránya az n-edik menet után.

(a) Az előadáson beláttuk, hogy M_n martingál.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{P}(\beta_n = k) = 1/(n+1)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Azaz a piros/kék golyók száma minden egyes lépés után *egyenletes eloszlású.*

(c) Hamarosan belátjuk az u.n. martingál konvergencia tételt, amelyből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n =: M_\infty$ egy valószínűséggel létezik. Ezt feltéve, milyen eloszlású M_∞?

3.5. (Pólya-féle urnamodell, még egyszer.)
Az 3.4 feladat feltételeit és jelölését használjuk. Legyen $\theta \in [0,1]$ rögzített paraméter. Bizonyítandó, hogy

$$N_n(\theta) := \frac{(n+1)!}{\beta_n!(n-\beta_n)!}\theta^{\beta_n}(1-\theta)^{n-\beta_n}$$

martingál.

3.6. *Bayes urna — A β-eloszlás*

Érmedobást játszunk a következő képpen: először választok egy Θ véletlen számot egyenletes eloszlással a $[0,1]$ intervallumból. A Θ számot *nem közölve* adok magának egy olyan *hamis* érmét, amely Θ valószínűséggel mutat fejet és $(1-\Theta)$ valószínűséggel mutat írást. Maga a Θ értéket nem ismeri, csak a fej-írás sorozatot figyeli meg. Legyen β_n az első n dobás során megfigyelt 'fej'-ek száma.

(a) Bizonyítandó, hogy az itt leírt β_n, $n = 1, 2, \ldots$ folyamat eloszlása azonos az 4. feladatban szintén β_n-el jelölt folyamatéval.

(b) Bizonyítandó, hogy a 3.5. feladatban bevezetett $N_n(\theta)$ pontosan a Θ valószínűségi változó feltételes sűrűségfüggvénye, β_1, β_2, ..., β_n megfigyelés mellett.

3.7. *Kis statisztika*
Egy érme θ valószínűséggel mutat FEJet és $1-\theta$ valószínűséggel mutat ÍRÁSt. A $\theta \in (0,1)$ értéket nem ismerjük. Legyen $a, b \in (0,1)$ és két lehetséges hipotézisünk:

$$A := \{\theta = a\}, \qquad B := \{\theta = b\}$$

Legyen

$$Z_n := \frac{\mathbf{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n|A)}{\mathbf{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n|B)},$$

ahol $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n|A)$ (illetve $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n|B)$) az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ FEJ-ÍRÁS sorozat megjelenésének valószínűsége az A (illetve B) hipotézis mellett. Mutassuk meg, hogy a Z_n sorozat pontosan akkor martingál, ha a B hipotézis igaz.

3.8. Legyenek X_i, $i = 1, 2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = r$, ahol $p + q + r = 1$ és $p, q > 0$. Legyen $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(a) Milyen C-re lesz $M_n := C^{S_n}$ martingál?

(b) $a \in \mathrm{N}$ esetén jelölje $T_a = \min\{n : S_n = a\}$ az a elérési idejét. A martingál-megállítási tétel segítségével számolja ki a $\mathbf{P}(T_{-a} < T_b)$ valószínűséget, ahol $a, b > 0$.

(c) Mely $C > 0$ és $\lambda > 0$ választások mellett lesz

$$Z_n := C^n \lambda^{S_n}$$

martingál? Melyik korábbi feladat átfogalmazása ez?