

1. A ξ_t , $t = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:
 - (a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);
 - (b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \dots \xi_t$;
 - (c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.
A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.
2. Legyen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, $g : \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ és $f : \{1, 2, \dots, N\} \times \mathbb{R} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ rögzített (mérhető) függvények. Értelmezzük az X_t , $t = 0, 1, 2, \dots$ folyamatot a következő képpen: $X_0 = g(\xi_0)$, $X_{t+1} = f(X_t, \xi_{t+1})$. Markov láncot alkot-e az X_t sorozat? Ha igen, számítsuk ki az átmenet-mátrixát (a ξ_t valószínűségi változók közös eloszlásának és az f és g függvények ismeretében).
3. There are three Markov chains given below and three distributions given below. Determine the state spaces of the chains, their transition matrices and prove that the corresponding distributions are stationary!
 - (a) There are n urns in a circle, altogether k balls in them. In every second there is one ball chosen uniformly and that ball is moved to the next urn (clockwise) if the urn is empty. If it is not empty, then we do nothing. *Fermi-Dirac distribution*: k ball is put into $n \geq k$ urns randomly such that in every urn there is at most one ball.
 - (b) There are n urns in a circle again, altogether k balls in them. In every second we choose a ball uniformly and put it into the next urn clockwise. *Maxwell-Boltzmann distribution*: k distinguishable balls are put in n urns uniformly.
 - (c) There are n urns in a circle. In each step we choose one of them uniformly and a random ball in it (if any) is moved to the next urn clockwise. *Bose-Einstein distribution*: k indistinguishable balls are put into n urns randomly.